МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92, \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \leqslant \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12828.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \dfrac{15}{8}$, $AP = 17$, $NC = 34$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3} + y\right), \\ \cos(2x-y) + \sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 26}{2x + 3} \leqslant ax + b \leqslant 1 + \sqrt{-\frac{33}{4} - 13x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{19}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани KLL_1K_1 и $K_1L_1M_1N_1$ которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых MM_1 и M_1N_1, плоскости $K_1L_1M_1$, а также плоскости KLL_1 в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle KK_1N_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 3$, $AM_1 = 1$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} 13x+\sqrt[3]{169x^2-y^2}=92 \ (1) \\ y+\sqrt[3]{169x^2-y^2}=-124 \ (2) \end{cases}$$

сложим (1) и (2), и вычтем из (1) (2). $\left(\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(1)-(2)\\(1)+(2)\end{cases}\right)$ тем самым перейдем к системе, равносильной исходной.

$$\begin{cases} 13x+y+2\sqrt[3]{169x^2-y^2}=-32 \\ 13x-y=216 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x+y+2\sqrt[3]{(13x-y)(13x+y)}=-32 \\ 13x-y=216 \end{cases}$$

подставим $13x-y=216$ в первое уравнение:

$$13x+y+2\sqrt[3]{216\cdot(13x+y)}=-32$$

$$13x+y=t$$

$t+12\sqrt[3]{t}=-32$; рассм ф-ю $f(t)=t+12\sqrt[3]{t}$

она монотон. возрастная сумма монотон возраст. ф-ий. $\Rightarrow$ $f(t)=-32$ имеет не больше одного решения.

$t=-8 \leftarrow$ решение. Итого получаем $13x+y=-8$

$$\begin{cases} 13x+y=-8 \\ 13x-y=216 \end{cases}$$ сложим и вычтем: $$\begin{cases} 26x=208 \\ 2y=-224 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=8 \\ y=-112 \end{cases}$$

Отв: $(8;-112)$

№2

$$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \le \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}$$

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{1}{x^3} > 0 \\ x^3 \ne 0 \\ x^9 > 0 \\ 3x^2 > 0 \\ 9x^3 > 0 \\ 9x^3 \ne 1 \\ 3x^2 \ne 1 \\ \log_{3x^2} x^9 \ge 0 \, (\cdot) \end{cases}$ (A) →

→ (A) $\begin{cases} x > 0 \\ x \ne \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x \ne \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \\ (3x^2-1)(x^9-1) \ge 0 \, (\cdot) \text{ (по методу рационализации)} \end{cases}$

расм $(3x^2-1)(x^9-1) \ge 0$

$(3x^2-1)((x^3)^3-1) \ge 0$

$(3x^2-1)(x^3-1)((x^3)^2+x^3+1) \ge 0 \quad | : ((x^3)^2+x^3+1) > 0$

$(x^3)^2+x^3+1 > 0$ при любом x т.к. $D < 0$

$(3x^2-1)(x^3-1) \ge 0$

$(x-1)(3x^2-1)(x^2+x+1) \ge 0 \,| : (x^2+x+1) > 0$

$(3x^2-1)(x-1) \ge 0$

$-\quad -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad + \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad - \quad 1 \quad + \quad x$

итоговая ОДЗ:

$\begin{cases} x > 0 \\ x \ne \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \\ x \ne \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \\ x \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}] \cup [1; +\infty) \end{cases} \iff x \in (0; \frac{1}{\sqrt[3]{9}}) \cup (\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; \frac{1}{\sqrt{3}}) \cup [1; +\infty)$

вернемся к исходному нер-ву:

$$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \le -\log_{9x^3} x^3$$

расм $x = 1$: $\sqrt{\log_3 1} \le -\log_9 1$

$0 \le 0$ — верно $\Rightarrow x = 1$ явл решением. Далее ~~расм~~ пусть $x \ne 1$. Тогда можем перевернуть логарифмы

$$\frac{1}{\sqrt{\log_{x^9}(3x^2)}} \le -\frac{1}{\log_{x^3} 9x^3}$$

т.к. $x > 0$ из ОДЗ:

$$\frac{1}{\sqrt{\log_{x^9}(3) + \log_{x^9}(x^2)}} \le -\frac{1}{\log_{x^3} 9 + \log_{x^3} x^3}$$

↘

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2 продолж

$$\frac{1}{\sqrt{\log_{x^9}3+\log_{x^9}x^2}} \le -\frac{1}{\log_{x^3}9+1}$$

$$\log_{x^9}(x^2)=\frac{1}{9}\log_x x^2 = \frac{2}{9}\log_x x = \frac{2}{9} \quad (\text{т.к. } x>0 \text{ по ОДЗ})$$

$$\log_{x^9}3 = \cancel{\tfrac{1}{3}x^3 3}\ \frac{1}{3}\log_{x^3}3$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}\log_{x^3}3+\frac{2}{9}}} \le -\frac{1}{2\log_{x^3}3+1}$$

$\cancel{\frac{1}{\frac{1}{3}(\log}}$ $\qquad t=\log_{x^3}3$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}} \le -\frac{1}{2t+1}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}} + \frac{1}{2t+1} \le 0$$

$$\frac{2t+1+\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}}{(2t+1)\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}} \le 0$$

найдем нули числителя:

$$2t+1+\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}=0$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}=-2t-1 \iff \begin{cases}\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}=4t^2+1+4t\\ -2t-1\ge 0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}4t^2+\frac{11}{3}t+\frac{7}{9}=0\\ t\le\frac{1}{2}\end{cases} \quad \begin{cases}36t^2+33t+7=0\\ t\le\frac{1}{2}\end{cases} \iff \left[\begin{array}{l} t=-\frac{1}{3}\\ t=-\frac{7}{12}\end{array}\right.$$

нули знаменателя: $\left[\begin{array}{l} t=-\frac{1}{2}\\ t=-\frac{2}{3}\end{array}\right.$

↓

№2 продолж.

$$\frac{2t+1+\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}}{(2t+1)\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}}\le 0$$

~~определим знаки на промежутках~~

~~$t\ge -\frac{1}{3}$: +~~

~~$t\le -\frac{1}{2}$: возьмем $t=-1$ и подставим в $f(t)$:~~

~~$-2+1+\sqrt{-\frac{2}{9}+\frac{2}{9}}$~~

~~$(-2+1)$~~

~~Пусть $\begin{cases} a=2t+1 \\ b=\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}} \end{cases}$ $\frac{a+b}{ab}\le 0$~~

~~сл 1. $\begin{cases} ab>0 \\ a+b\le 0 \end{cases}$~~

~~сл 2. $\begin{cases} ab<0 \\ a+b\ge 0 \end{cases}$~~

~~т.к. $b\ge 0$, в сл 1. $\begin{cases} a>0 \\ a+b\le 0 \end{cases}$~~

домножим на $\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}>0$ на ОДЗ:

$$\frac{2t+1+\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}}{2t+1}\le 0$$

$$1+\frac{\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}}{2t+1}\le 0$$

$$\frac{\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}}{2t+1}\le -1$$

сл 1). $2t+1>0$ $t>-\frac{1}{2}$; домножим на $2t+1>0$:

$$\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}\le -2t-1$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}\le -(2t+1)$$ нет реш. т.к. $\begin{cases} -(2t+1)<0 \\ \sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}\ge 0 \end{cases}$

сл 2). $2t+1<0$

домножим на $2t+1<0$:

$$\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}\ge -2t-1$$

возв. в кв т.к. обе части нер-ва неотриц.

$$\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}\ge 4t^2+1+4t$$

↓

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 продолж

$\frac{1}{3}t + \frac{2}{9} \geq 4t^2 + 1 + 4t$

$4t^2 + \frac{11}{3}t + \frac{7}{9} \leq 0$

$(t + \frac{1}{3})(t + \frac{7}{12}) \leq 0$

$t \in [-\frac{7}{12}; -\frac{1}{3}]$

пересек с $t < -\frac{1}{2}$:

$t \in [-\frac{7}{12}; -\frac{1}{2})$

сделаем обрат. замену

$\log_{x^3} 3 \in [-\frac{7}{12}; -\frac{1}{2})$

$$\begin{cases} \log_{x^3} 3 < -\frac{1}{2} \ (1) \\ \log_{x^3} 3 \geq -\frac{7}{12} \ (2) \end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases} \log_{x^3} 3 \leq \log_{x^3} (x^3)^{-\frac{1}{2}} \\ \log_{x^3} 3 > \end{cases}}$$

(1) $\frac{1}{\log_3 x^3} < -\frac{1}{2}$ (т.к. $x \neq 1$)

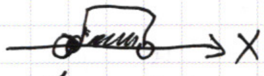
$\frac{1}{\log_3 x^3} + \frac{1}{2} < 0$

$\frac{2 + \log_3 x^3}{\log_3 x^3} < 0$

по методу рационализац.

$\frac{\log_3 x^3 + \log_3 \frac{1}{9}}{x^3 - 1} < 0$

$\frac{(x^3 - \frac{1}{9})}{x^3 - 1} < 0$



x

$\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ 1

пересек с ОДЗ:

$x \in (\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; \frac{1}{\sqrt{3}})$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№2 продолж.

(2) $\log_{x^3} 3 \geq -\frac{7}{12}$

$$\frac{1}{\log_3 x^3} \geq -\frac{7}{12}$$

$$\frac{1}{\log_3 x^3} + \frac{7}{12} \geq 0$$

$$\frac{12 + 7\log_3 x^3}{\log_3 x^3} \geq 0$$

(по методу рационализ)

$$\frac{\log_3 x^{21} - \log_3 3^{-12}}{(x^3-1)} \geq 0$$

$$\frac{(x^{21} - 3^{-12})}{x^3-1} \geq 0$$

$\frac{1}{3^{\frac{4}{7}}}$ 1 x

$x^{21} = 3^{-12}$

$x^7 = 3^{-4}$

$x = \sqrt[7]{3^{-4}}$

$x = \frac{1}{3^{\frac{4}{7}}}$

пересек с ОДЗ:

0 $\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$ $\frac{1}{3^{\frac{4}{7}}}$ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ 1 x

$x \in (0; \frac{1}{\sqrt[3]{9}}) \cup$

$\cup (\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; \frac{1}{3^{\frac{4}{7}}}) \cup$

$\cup (1; +\infty)$

$\frac{1}{3^{\frac{4}{7}}} \overset{<}{\vee} \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}$

$3^{\frac{1}{2}} \vee 3^{\frac{4}{7}}$

$\frac{1}{2} \vee \frac{4}{7}$

$7 \underset{<}{\vee} 8$

$\frac{1}{3^{\frac{4}{7}}} \overset{>}{\vee} \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

$\frac{1}{3^{\frac{4}{7}}} \vee \frac{1}{3^{\frac{2}{3}}}$

$3^{\frac{2}{3}} \vee 3^{\frac{4}{7}}$

$\frac{2}{3} \vee \frac{4}{7}$

$14 \underset{>}{\vee} 12$

(продолж на стр 11)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

если среди трех послед. степеней есть первая, то $10; 10^2; 10^3$ - единств. возм тройка но сумма остатков по mod 10, mod 10^2 и mod 10^3 максимум $10+100+1000 < 12828$

если ~~и~~ тройка $10^2; 10^3; 10^4$, аналогично, сумма остатков по этим модулям макс $100+1000+10000 = 11100 < 12828$

~~значит~~, могут подходить тройки $10^3; 10^4; 10^5$

$10^4; 10^5; 10^6$

$10^5; 10^6; 10^7$

если среди степеней ~~двойки~~ десятки есть 10^7 и больше то т.к. число дает такой же ост. по mod 10^n, как и последние n цифр числа, семизначное число p будет ~~д~~ давать ост. по mod 10^n, больший 12828 ($p \equiv p \mod 10^n$ $n \geq 7$)

значит, возм. два случая трех послед. степеней десятки: сл 1) $10^3; 10^4; 10^5$

сл 2) $10^4; 10^5; 10^6$

($t; a; b; c; d; e; f$ - цифры)

$p = \underline{t}\,\underline{a}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d}\,\underline{e}\,\underline{f}$

сл 2).

если $a \neq 0$ то ост. по mod 10^6 > 12828

$\Rightarrow a = 0$.

если $b \geq 2$ то ост по mod 10^5 > 12828

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\left[\begin{array}{l} b=0 \\ b=1 \end{array}\right.$

12828

если $b=0$:

$p=\underline{t}\ \underline{0}\ \underline{0}\ \underline{c}\ \underline{d}\ \underline{e}\ \underline{f}$

~~тогда $\overline{cdef} \equiv 12828 \mod 10^4$~~

~~но такого не может быть $\Rightarrow$~~

~~$b \neq 0$~~

ост. при дел на 10^4: $\overline{cdef}$

10^5: $\overline{cdef}$

10^6: $\overline{cdef}$

$3\overline{cdef}=12828$

$\overline{cdef}=4276$

$b=1$:

$p=\underline{t}\ \underline{0}\ \underline{1}\ \underline{c}\ \underline{d}\ \underline{e}\ \underline{f}$

ост при дел на 10^6: $\overline{1cdef}$

ост при дел на 10^5: $\overline{1cdef}$

ост при дел на 10^4: $\overline{cdef}$

сумма больше 12828

$(\overline{1cdef}+\overline{1cdef}>20000)$

$\Rightarrow b \neq 1$.

~~значит, этот сл. невозм.~~

Вернемся к сл $b=0$.

$\overline{cdef}=4276$

$c;d;e;f$ определ. однознач.

$c=4;\ d=2;\ e=7;\ f=6$.

на место t можно поставить любую из 9 цифр (кроме 0)

итого 9 вар.

сл 2) $10^3;\ 10^4;\ 10^5$

$p=\underline{t}\,\underline{q}\ \underline{a}\ \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{d}\ \underline{e}$ если $a \geq 2$ то сумма остатков по mod 10^3, 10^4, 10^5 будет > 12828.

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=0 \\ a=1 \end{array}\right.$

рассм $a=1$: $p=\underline{t}\,\underline{q}\ \underline{1}\ \underline{b}\ \underline{c}\ \underline{d}\ \underline{e}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$p = \underline{t}\,\underline{q}\,\underline{1}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d}\,\underline{e}$

ост при дел на 10^4 ост при дел на 10^5

$\overline{cde} + \overline{bcde} + \overline{1bcde} = 12828$

ост при дел на 10^3

$\overline{cde} + 1000b + \overline{cde} + 10000 + 1000b + \overline{cde} = 12828$

$2000b + 10000 + 3\overline{cde} = 12828$

$2000b + 3\overline{cde} = 2828$

если $b = 0$ решений нет т.к.

если $b \geq 2$ то $3\overline{cde} < 0$ $\quad 3\overline{cde} \vdots 3$, $2828 \not\vdots 3$

$\Rightarrow b = 1$.

$3\overline{cde} = 828$

$\overline{cde} = 276$

$c; d; e$ определ. однознач.

на места t и q можно поставить цифры $9 \cdot 10 = 90$ способами.

итого 90 вар.

рассм $a = 0$:

$p = \underline{t}\,\underline{q}\,\underline{0}\,\underline{b}\,\underline{c}\,\underline{d}\,\underline{e}$

ост при дел на 10^3: $\overline{cde}$

ост при дел на 10^4: $\overline{bcde}$

ост при дел на 10^5: $\overline{bcde}$

$\overline{cde} + 2(1000b + \overline{cde}) = 12828$

$2000b + 3\overline{cde} = 12828$

если $b \leq 3$ то $12828 - 2000b \geq 6000$

а $3\overline{cde} < 3000$

$b=4$: $8000+3\overline{cde}=12828$

$3\overline{cde}=4828$

$4828 \not\vdots 3 \Rightarrow b\neq 4$

$b=5$:

$10000+3\overline{cde}=12828$

$3\overline{cde}=2828$; $2828 \not\vdots 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow b=5$ не подх

$b=6$:

$12000+3\overline{cde}=12828$

$3\overline{cde}=828$

$\overline{cde}=276$

$c;d;e$ определ. однознач.

на место t можно поставить одну из 9 цифр

~~итого~~ итого $9\cdot10$ вар. $= \underbrace{90 \text{ вар}}$ на f — одну из 10

(если $b\geq 7$ то $2000b\geq 14000 \Rightarrow$ равенство не м.б. верно)

итого, получаем $90+90+9$ чисел

189

Отв: 189

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

итого, ~~объединяя~~ пересекая два случая, получаем

$$\begin{cases} x \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ x \in \left(0; \frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right) \cup \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; \frac{1}{3^{\frac{4}{7}}}\right) \cup (1; +\infty) \end{cases}$$

$$x \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; \frac{1}{3^{\frac{4}{7}}}\right)$$

объединяя с $x = 1$ получаем

$x \in \left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; \frac{1}{3^{\frac{4}{7}}}\right) \cup \{1\}$ – удовлет. ОДЗ.

Отв: $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}; \frac{1}{3^{\frac{4}{7}}}\right) \cup \{1\}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 найти: $tg x - tg y$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right) \ (1) \\ \cos(2x-y)+\sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \ (2) \end{cases}$$

(2) $\frac{1}{2}\cos(2x-y)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x-y) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$

$$\underline{\cos\left(2x-y-\frac{\pi}{6}\right) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)}$$

$$\cos\left(2x-y-\frac{\pi}{6}\right) = 6\left(\sin y\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\cos y\cdot\frac{1}{2}\right)$$

$$\cos\left(2x-y-\frac{\pi}{6}\right) = 3\sqrt{3}\sin y + 3\cos y$$

(1) $\sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\cos y - 7\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sin y$

$$\sqrt{3}\cos(x-y) = -\frac{7}{2}\cos y - \frac{7}{2}\sqrt{3}\sin y$$

$$\sqrt{3}\cos(x-y) = -\frac{7}{2}\left(\cos y + \sqrt{3}\sin y\right)$$

$$\cos\left(2x-y-\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\sqrt{3}\sin y+\cos y\right)$$

$$\begin{cases} \cos\left(2x-y-\frac{\pi}{6}\right) = 3\left(\sqrt{3}\sin y+\cos y\right) \ (2) \\ \sqrt{3}\cos(x-y) = -\frac{7}{2}\left(\cos y+\sqrt{3}\sin y\right) \ (1) \end{cases}$$

$$tg x - tg y = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$$

$$\cancel{\sqrt{3}\cos\left(2x-y-\frac{\pi}{6}\right)\cos(x-y)}$$

(1) $\sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right)$

$$\sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{\pi}{2}+y+\frac{\pi}{6}\right)$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right)$$

$$\sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+y\right)$$

$$\sqrt{3}\cos(x-y) = -7\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = -7\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \quad (1) \\ \cos(2x-y) + \sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = -7\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \\ \cos\left(2x-y-\frac{\pi}{6}\right) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right) \\ \cos(2x-y)+\sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$$

$\frac{\pi}{6}$ $\frac{2\pi}{3}$

$\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{3}$

$\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}$

$7\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}+y\right)$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N= _ _ _ _ _ _ _

возм три сл: 10^3 10^4 10^5

10^4 10^5 10^6

10^5 10^6 10^7

чис

12828

a b c d e

1234567

$a+b+c+d+e+c+d+e+b+c+d+e=$

12828

$a+2b+3c+3d+3e=12828$

$a=0$

a

_ _ a b c d e

$b=1$

$b=0$

12828 | 3

4276

8

6

22

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 13x+\sqrt[3]{169x^2-y^2}=92 \\ y+\sqrt[3]{169x^2-y^2}=-124 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x+\sqrt[3]{(13x-y)(13x+y)}=92 \\ y+\sqrt[3]{(13x-y)(13x+y)}=-124 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x+y+2\sqrt[3]{(13x-y)(13x+y)}=32 \\ 13x-y=92+124 \end{cases}$$

216

216

-124
-92
32

$13x+y=t$

$13x-y=b$

216

$$\begin{cases} t+2\sqrt[3]{tb}=32 \\ b=216 \end{cases}$$

$t+2\sqrt[3]{216t}=32$

$t+2\cdot6\sqrt[3]{t}=32$

единств. реш.:

$t+12\sqrt[3]{t}=32$

$t=8$

$8+12\cdot2=$

$8+24=32$

$$\sqrt{\log_{3x^2}x^9}\le\log_{9x^3}\frac{1}{x^3}$$

ОДЗ: $9x^3>0$ $x>0.$

$9x^3\ne1$

$\frac{1}{x^3}>0$

$x^3\ne0$

$x^9>0$

$3x^2\ne1$

$3x^2>0$

$-8-24=-32$

$\sqrt{}\le-\log_{9x^3}x^3$

~~расмотр $\log_{9x^3}\frac{1}{x^3}\ge0$~~

$\log_{3x^2}x^9$

$3\log_{3x^2}x^3$

$1/\sqrt[3]{3^4}$

$\sqrt[7]{3^{4}}$

$x=\sqrt[7]{3^{-4}}$

$3^{3/2}$

$x=\sqrt[21]{3^{-12}}$

$x^{21}=3^{-12}$

$26x=208$

$x=\frac{208}{26}=\frac{104}{13}$

$\frac{13}{8}=8$

$2y=-224$

$y=-112$

$3^{4/7}$ $3^{3/2}$ $3^{3/2}\vee3^{4/7}$

$3^{3/2}\vee3^{4/7}$

$21\vee8$

$21\vee7$

$-2\cdot6$

10^n 10^{n+1} 10^{n+2}

12828

т.к. остаток

только

$10000=10^4$

10^5

10^6

10^7

$\frac{1}{3}t\times\frac{2}{9}=0$

-112

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

12828

если есть 10 то 10^2 10^3

~~900т~~

$999 \quad 9+99 < 12828$

$10^2 \quad 100 \quad \cancel{99}$

$10^3 \quad 1000 \quad \cancel{999} \quad \cancel{9999}$

$10^4 \quad 10000 \quad < 12828 \quad \cancel{999}$

$\cancel{9999}$

$$\left[\begin{array}{ll} 10^3\,10^4\,10^5 & 1000 \\ 10^4\,10^5\,10^6 & 10000 \\ 10^5\,10^6\,10^7 & 100000 \end{array}\right.$$

$$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \le \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}$$

$$\begin{cases} x \ne 0 \\ x \ne \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \\ x \ne \frac{1}{3\sqrt{3}} \\ x > 0 \end{cases}$$

$0 \quad \frac{1}{\sqrt[3]{9}} \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \quad 1$

расм $x=1$:

$\sqrt{\log_{3} 1} \le \log_9 1$

$0 \le 0$ - верно $\Rightarrow x=1$ явл. реш.

далее $x \ne 1$:

тогда можем перевернуть логи

$$\frac{1}{\sqrt{\log_{x^9} 3x^2}} \le \frac{1}{-\log_{x^3} 9x^3}$$

$(9x^3;\ 3x^2 \ne 1 \Rightarrow$ ~~знаменатели~~ не будут равны нулю)

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}\log_{x^3} 3x^2}} \le \frac{1}{-\log_{x^3} 9 - \log_{x^3} x^3}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}\log_{x^3} 3x^2}} \le \frac{1}{-\log_{x^3} 9 - 1}$$

т.к. $x>0$ на одз.

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}\log_{x^3} 3 + \frac{1}{3}\log_{x^3} x^2}} \le \frac{1}{-\log_{x^3} 9 - 1}$$

$$\frac{1}{3}\log_{x^3} x^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\log_x x = \frac{2}{9}$$

$\frac{1}{\sqrt[3]{9}} \overset{<}{\vee} \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}}$

$\frac{1}{3^{\frac{2}{3}}} \vee \frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}$

$3^{-\frac{2}{3}} \vee 3^{-\frac{1}{2}}$

$-\frac{2}{3} \vee -\frac{1}{2}$

$\frac{1}{2} \vee \frac{2}{3}$

$3 \overset{<}{\vee} 4$

$9x^3 \ne 1$

$x^3 \ne \frac{1}{9}$

$x \ne \frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

$(x^3)^3 - 1 \ge 0$

$(x^3-1)($

$t^3 - 1 \ge 0$

$(t-1)(t^2-$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right) \ (1) \\ \cos(2x-y)+\sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \ \vert :2 \ (2) \end{cases}$$

$$tg\,x - tg\,y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x\cos y - \sin y\cos x}{\cos x\cos y} = \frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$$

$$\underset{\cos\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}}\cos(2x-y) + \underset{\sin\frac{\pi}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\sin(2x-y) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cos\left(2x-y-\frac{\pi}{3}\right) = 6\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right) \ (2)$$

$$(1)\ \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\frac{2\pi}{3}\cos y - 7\sin\frac{2\pi}{3}\sin y = -\frac{7}{2}\cos y - \frac{7\sqrt{3}}{2}\sin y$$

$$\sqrt{3}\cos(x-y) = -\frac{7}{2}\cos y - \frac{7\sqrt{3}}{2}\sin y$$

$$\frac{12x+26}{2x+3} \le ax+b \le 1+\sqrt{-\frac{33}{4}-13x-x^2}$$

$$\frac{6(2x+3)+2}{2x+3} \le ax+b \le 1+$$

$$6+\frac{2}{2x+3} \le ax+b \le 1+$$

$$ax+b \le 1+\sqrt{}$$

$$ax+b \ge 6+\frac{2}{2x+3}$$

найти max

$$-\frac{7}{12} \quad -\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{3}$$

$$-x^2-13x-\frac{33}{4}$$

$$-\frac{1}{3}v^2-\frac{7}{12}$$

$$-\frac{12}{3}v-\frac{7}{3}$$

$$-4v-\frac{21}{7}$$

$$\left[-\frac{19}{2};-\frac{3}{2}\right)$$

$$-\frac{1}{3}v-\frac{1}{2}$$

$$-2v-\frac{3}{7}$$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{3\pi}{6}-\frac{\pi}{6}=\frac{2\pi}{6}=\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{3\pi-2\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$$

$$\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi-3\pi}{6}=-\frac{2\pi}{6}=-\frac{\pi}{3}$$

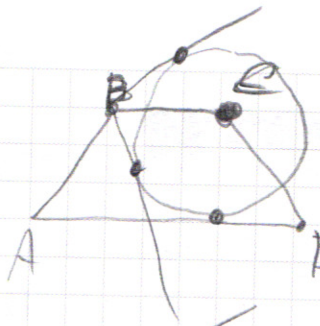
☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

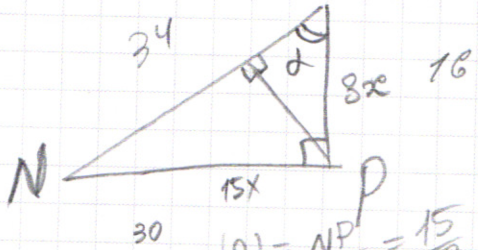
$34 \cdot \frac{1}{2} \cdot h = \frac{30 \cdot 16}{2}$

$17h = 15 \cdot 16$

$h = \frac{15 \cdot 16}{17}$



C



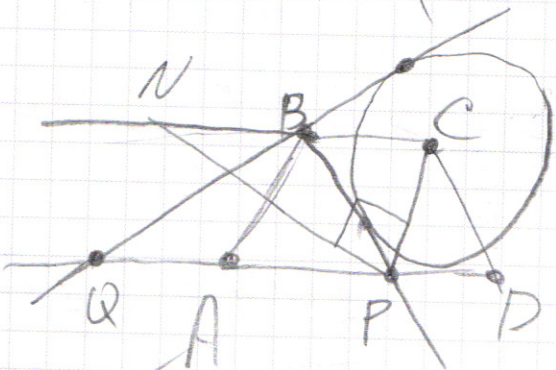
$tg\alpha = \frac{NP}{CP} = \frac{15}{8}$

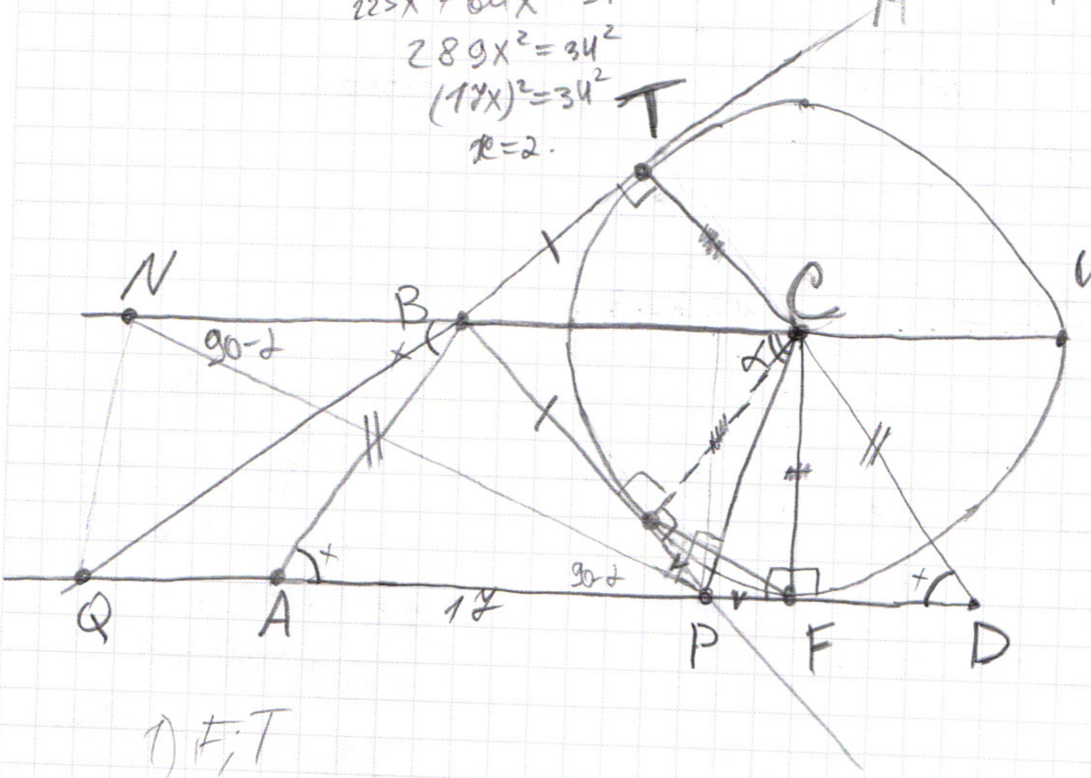
$225x^2 + 64x^2 = 34^2$

$289x^2 = 34^2$

$(17x)^2 = 34^2$

$x = 2.$





$\angle ADC$ - ?

$\angle NQC$ - ?

S_{NCDQ} - ?

$tg\alpha = \frac{15}{8}$

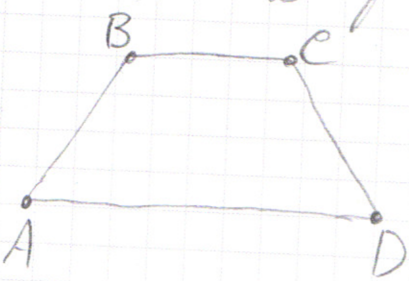
$NC = 34$

$AP = 17$

1) F, T

2) NCP можем найти все

3) найдем высоту из пр. угла, это будет радиус



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №___

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}} + \frac{1}{2t+1} \le 0$$

$$\frac{2t+1+\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}}{\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}\cdot(2t+1)} \le 0$$

~~[illegible]~~

$$\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}} \ge -2t-1$$

$\_\ \_\ \_\ \underline{a_5}\ \underline{a_4}\ \underline{a_3}\ \underline{a_2}\ \underline{a_1}$

12828

$10;\ 10^2;\ 10^3$

$10^2\ 10^3\ 10^4 \quad < 2 \ldots$

$10^3\ 10^4\ 10^5$ v сл 1.

$10^4\ 10^5\ 10^6$ v сл 2.

$10^5\ 10^6\ 10^7$ v сл 3.

4 10^8 x

$\overline{a_3 a_2 a_1}$

$-\frac{7}{72}$ v $-\frac{1}{3}$

-7 v -4

$2t+1 \ge 0$

$\log_{x^3} 9 + 1 \ge 0$

$\log_{x^3} 9 + \log_{x^3} x^3 \ge 0$

$\log_{x^3} 9x^3 \ge 0$

$(x^3-1)(9x^3-1) \ge 0$

$(x-1)($

$\frac{1}{3}t = -\frac{2}{9}$

$t = -\frac{2}{3}$

$4t^2 + 4t - \frac{1}{3}t + 1 - \frac{2}{9}$

$33^2 - 36\cdot 4\cdot 7$

$33^2 - 36\cdot 28$

$-\frac{3}{9}$

$= -\frac{4}{12}$

$2t+1$ v $\sqrt{\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}}$

108 9

$-\frac{42}{72}$

$\frac{-33\pm 9}{72} = -\frac{24}{72}$

$4t^2+1+4t$ v $\frac{1}{3}t+\frac{2}{9}$

$4t^2 + \frac{11}{3}t + \frac{7}{9}$ v 0

$36t^2 + 33t + 7$ v 0

$33^2 - 36\cdot 4\cdot 7$

$\frac{1}{9}$

$\frac{1}{\sqrt[3]{9}}$

+ − +

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)