



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = 20, \\ y + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = -44. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{5x} x^4} \leq \log_{125x} \frac{1}{x^2}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12531.
4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция  $ABCD$  ( $AD$  и  $BC$  – основания,  $AD > BC$ ) и окружность  $\omega$  с центром  $C$ , касающаяся стороны  $AD$ . Касательные к  $\omega$ , проведённые из точки  $B$ , пересекают прямую  $AD$  в точках  $P$  и  $Q$  (точка  $P$  лежит между  $Q$  и  $D$ ). На продолжении стороны  $CB$  за точку  $B$  выбрана точка  $N$  так, что  $\angle CPN$  – прямой. Найдите углы  $ADC$ ,  $NQC$  и площадь четырёхугольника  $NCDQ$ , если известно, что  $\angle NCP = \arctg \frac{5}{12}$ ,  $AP = 13$ ,  $NC = 26$ .

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x - y) = -9 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \\ \cos(x - 2y) - \sqrt{3} \sin(x - 2y) = 20 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения  $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$ , если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2} \leq ax + b \leq -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4}$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}]$ .

7. [6 баллов] Дан параллелепипед  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , грани  $ABB_1 A_1$  и  $BB_1 C_1 C$  которого являются прямоугольниками. Сфера  $S$  касается прямых  $C_1 D_1$  и  $CC_1$ , плоскости  $BB_1 C_1 C$ , а также плоскости  $ABB_1$  в точке  $A$ . Эта сфера повторно пересекает отрезок  $AC_1$  в точке  $M$ . Найдите  $\angle ABC$  и объём параллелепипеда  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ , если известно, что  $AM = 3$ ,  $C_1 M = 2$ .



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = 20 \\ y + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = -44 \end{cases} \Rightarrow \boxed{7x - y = 64} \quad \begin{aligned} 49x^2 - y^2 &= (7x - y)(7x + y) \\ &= 64(7x + y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 7x + y + 2\sqrt[3]{49x^2 - y^2} = -24 \Rightarrow 7x + y + 2\sqrt[3]{64(7x + y)} = -24$$

$$\Rightarrow 7x + y + 8\sqrt[3]{7x + y} = -24 \quad \text{Пусть } \sqrt[3]{7x + y} = t$$

$$\Rightarrow \boxed{t^3 + 8t + 24 = 0} \quad \text{При } t = -2; \quad -8 - 16 + 24 = 0$$

$$\Rightarrow t = -2 \quad (\text{корень уравн.})$$

$$\boxed{(t + 2)(t^2 - 2t + 12) = 0}$$

$t^3 + 8t + 24$	$t + 2$
$t^3 + 2t^2$	$t^2 - 2t + 12$
$-2t^2 + 8t + 24$	
$-2t^2 - 4t$	
$-12t + 24$	
$12t + 24$	
$0$	

$$t^2 - 2t + 12 = 0 \quad \frac{D}{4} = 1 - 12 < 0$$

$$\Rightarrow t + 2 = 0 \Rightarrow \boxed{t = -2} \Rightarrow \sqrt[3]{7x + y} = -2$$

$$\Rightarrow \boxed{7x + y = -8} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x - y = 64 \\ 7x + y = -8 \end{cases} \Rightarrow 14x = 56$$

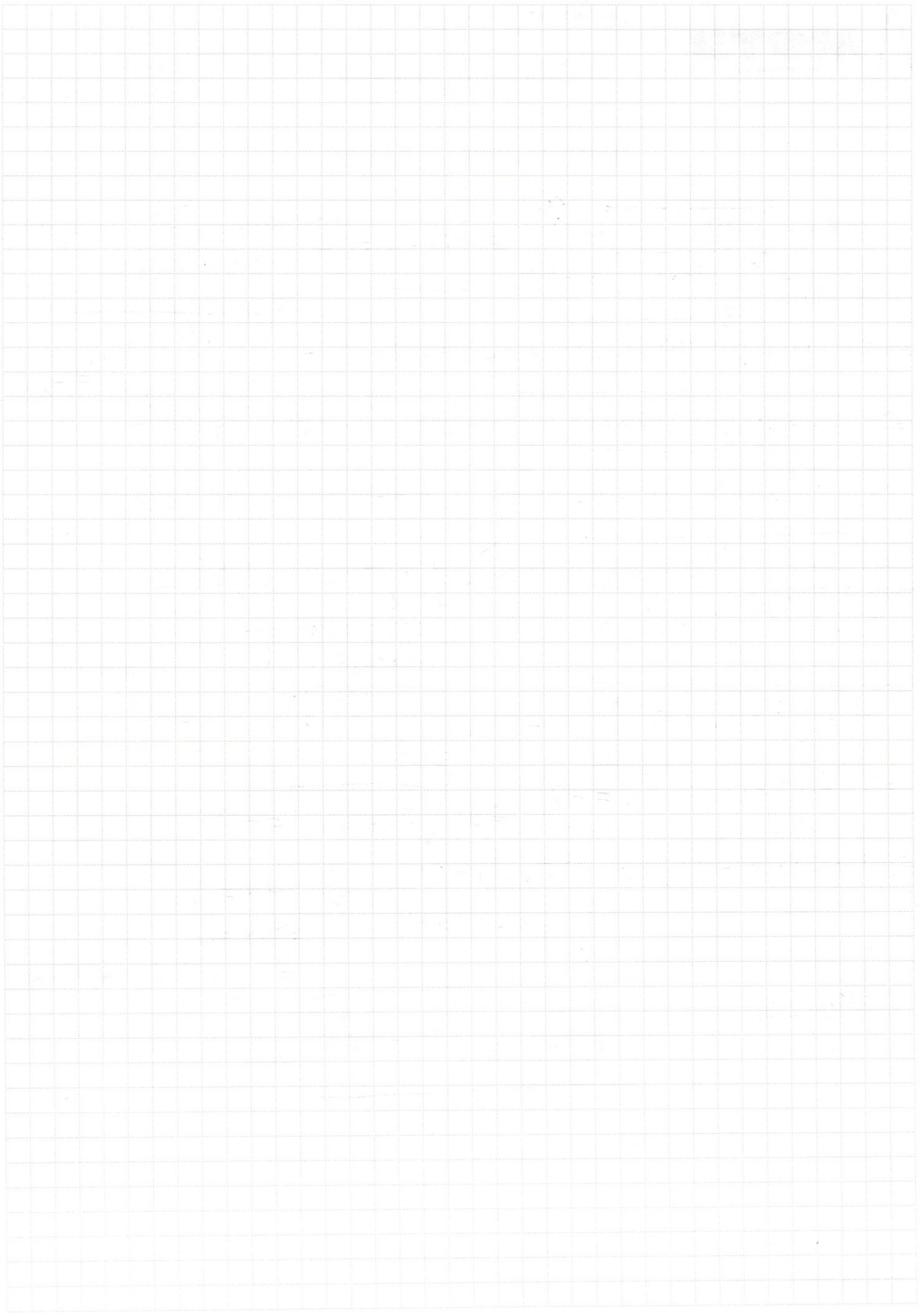
$$\Rightarrow x = 4 \quad 28$$

$$\Rightarrow y = 7 \cdot 4 - 64 = -36$$

$(4; -36)$

Ответ:  $(4; -36)$





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

abcdefg - семизначное число

Рассмотрим остатки при делении на 1, 10, 100

$$\text{Сумма остат.} \leq 0 + 9 + 99 < 12531$$

при делении на 10, 100, 1000

$$\text{Сумма остат.} \leq 9 + 99 + 999 < 12531$$

при делении на 100, 1000, 10000

$$\text{Сумма остат.} \leq 99 + 999 + 9999 < 12531$$

при делении на 1000, 10000, 100000

$$\text{Сумма остат.} \leq 999 + 9999 + 99999 > 12531 (\text{V})$$

⇒ Нужно рассматривать тройки чисел, где наименьшее число  $\geq 1000$

Остатки при делении abcdefg

$$\overline{efg} + \overline{defg} + \overline{cdefg} = 12531$$

$$3 \cdot g = \dots 1 \Rightarrow g = 7$$

$$\overline{ef0} + \overline{def0} + \overline{cdef0} = 12510$$

$$\overline{ef} + \overline{def} + \overline{cdef} = 1251$$

$$3 \cdot f = \dots 1 \Rightarrow f = 7$$

$$\overline{e0} + \overline{de0} + \overline{cde0} = 1230$$

$$\overline{e} + \overline{de} + \overline{cde} = 123$$

$$3 \cdot e = \dots 3 \Rightarrow e = 3$$

$$\overline{d0} + \overline{cd0} = 120$$

$$\overline{d} + \overline{cd} = 12$$

$$d \cdot 2 = \dots 2$$

$$\Rightarrow d = 1, 6$$

Степень 10 не может быть меньше 0, так там уже будут другие числа (не будем отмазывать)

цифры при делении на 3

0	0
1	3
2	6
3	9
4	12
5	15
6	18
7	21
8	24
9	27



№3 программа

При ум. на 2  
цифры

0	0
1	2
2	4
3	6
4	8
5	10
6	12
7	14
8	16
9	18

при  $d=1$

$\overline{c0} = 10 \Rightarrow \overline{c} = 1 \Rightarrow c = 1$

при  $d=6$   $\overline{c0} = 0 \Rightarrow \overline{c} = 0 \Rightarrow c = 0$

$ab11377 \cdot 9 \cdot 10 = 90 \text{ шен}$

$ab06377 \cdot 9 \cdot 10 = 90 \text{ шен}$

( $a \neq 0$ ; т.к. число не пар. с 0)

При ген. на 10000; 100000; 1000000

Сумма  $\overline{defg} + \overline{cdefg} + \overline{bcdefg} = 12531$

Решим все тоже самое по

$\overline{d} + \overline{cd} + \overline{bcd} = 12$

$3 \cdot d = \dots 2 \Rightarrow d = 4 \Rightarrow \overline{c0} + \overline{bc0} = 0$   
 $\Rightarrow b = 0 \quad c = 0$

$a004377 \Rightarrow 9 \text{ шен}$

При ген. на 100000; 1000000; 10000000

$\overline{cdefg} + \overline{bcdefg} + \overline{abcdefg} = 12531$

$\overline{abcdefg} = 12531 \Rightarrow$  для макс степеней

10 не шен  $\Rightarrow$  всего  $90 + 90 + 9 = 189 \text{ шен}$

Ответ: 189 шен.



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{\log_{5x} x^4} \leq \log_{125x} \frac{1}{x^2} \quad (\wedge 2) \Rightarrow \begin{cases} 1) \log_{5x} x^4 \geq 0 \\ 2) \log_{125x} \frac{1}{x^2} \geq 0 \end{cases}$$

1)  $5x \neq 1; 5x > 0; x^4 > 0$   
 $x \neq \frac{1}{5}; x > 0; x \neq 0$   
 при  $5x > 1; x > \frac{1}{5}; x^4 \geq 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$$

при  $0 < 5x < 1; 0 < x < \frac{1}{5}$   
 $x^4 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{5}$$

$$\begin{cases} \text{line 1)} & x \in (0; \frac{1}{5}) \cup [1; +\infty) \\ \text{line 2)} & x \in (\frac{1}{125}; 1] \end{cases} \Rightarrow \emptyset$$

$$\Leftrightarrow x \in (\frac{1}{125}; \frac{1}{5}) \cup \{1\}$$

$$\Rightarrow \sqrt{2 \log_{5x} x^2} \leq -\log_{125x} x^2 \Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\log_{x^2}(5x)}} \leq \frac{-1}{\log_{x^2}(125)}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{2}{\log_{x^2}(5) + \log_{x^2}(x)}} \leq \frac{-1}{3 \log_{x^2}(5) + \log_{x^2}(x)} \quad \log_{x^2}(5) \rightarrow t$$

$$\sqrt{\frac{2}{t + \frac{1}{2}}} \leq \frac{-1}{3t + \frac{1}{2}} \Rightarrow \sqrt{\frac{4}{2t+1}} \leq \frac{-2}{6t+1}$$

Условие:  
 2)  $125x \neq 1; 125x > 0; \frac{1}{x^2} \geq 0$   
 $x \neq \frac{1}{125}; x > 0; x \in \mathbb{R}$   
 при  $125x > 1; x > \frac{1}{125}; \frac{1}{x^2} \geq 1$   
 $x^2 \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1$   
 $\Leftrightarrow \frac{1}{125} < x \leq 1$

при  $0 < 125x < 1; 0 < x < \frac{1}{125}$   
 $\frac{1}{x^2} \leq 1 \Rightarrow x^2 \geq 1$   
 $\Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq -1 \end{cases}$

①  $x^2 \neq 1$   
 условие  $x \in (\frac{1}{125}; \frac{1}{5})$   
~~решение на x~~  
 При  $x^2 \neq 1; x \neq \pm 1$



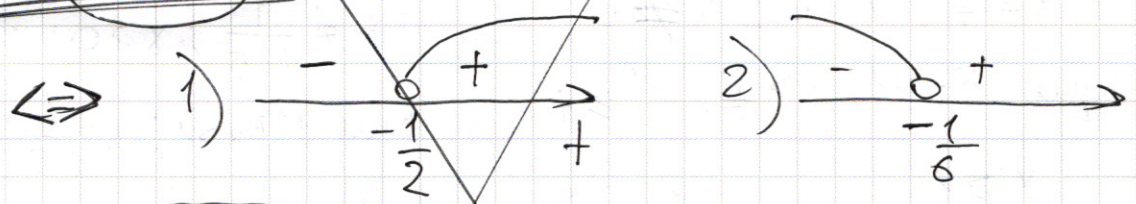
Л2 преобразование

$$\sqrt{\frac{4}{2t+1}} \leq \frac{-2}{6t+1} \Leftrightarrow \begin{cases} 1) \frac{4}{2t+1} \geq 0 & \frac{4}{t+\frac{1}{2}} \geq 0 \\ 2) \frac{-2}{6t+1} \geq 0 & \frac{1}{t+\frac{1}{6}} \leq 0 \end{cases}$$

~~$\log_{\sqrt{x^2}} 5 = t$~~

~~$5 > 1$   
 $x^2 < 1$  (из условия  $x \in (\frac{1}{125}, \frac{1}{5})$ )~~

~~$t < 0$~~



$\Rightarrow -\frac{1}{2} < t < -\frac{1}{6}$        $-\frac{1}{2} < \log_{\sqrt{x^2}} 5 < -\frac{1}{6}$

$x^{2 \cdot \frac{1}{2}} < 5 < x^{2 \cdot \frac{1}{6}}$   
из условия  $x > 0$

$\Rightarrow \frac{1}{x} < 5 < \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$        $\Rightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ x < \frac{1}{125} \end{cases} \Rightarrow x \in (\frac{1}{125}, \frac{1}{5})$

$125 < \frac{1}{x}$   
 $x < \frac{1}{125}$

Еще  $x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1$  ( $x > 0$ )  
 $\sqrt{\log_5 1} \leq \log_{125} 1 \Rightarrow 0 \leq 0$

$\Rightarrow x = 1$  (Подсудит)  $\Rightarrow x$



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(Условие на нестр. на стр. 4)  $\sqrt{\frac{4}{2t+1}} \leq \frac{-2}{6t+1} \Rightarrow \frac{4}{2t+1} \leq \frac{4}{36t^2+12t+1}$

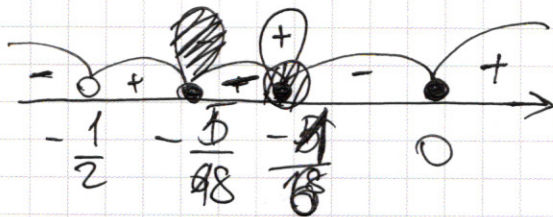
$$\frac{1}{2t+1} \leq \frac{1}{36t^2+12t+1}$$

$$\frac{36t^2+12t+1-2t+1}{(6t+1)^2(2t+1)} \leq 0$$

$$\frac{36t^2+10t+2}{(6t+1)^2(2t+1)} \leq 0$$

$$\frac{t(\frac{5}{18} + \frac{1}{2})}{(6t+1)^2(t+\frac{1}{2})} \leq 0$$

$$\frac{(6t+1)^2}{t+\frac{1}{2}} \geq 0$$



$$t < -\frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, -\frac{5}{18}, 0$$

$$\Rightarrow t < -\frac{1}{2}$$

$$\frac{5}{18} \leq t \leq 0$$

$$\begin{cases} x \in (\frac{1}{125}, \frac{1}{5}) \\ x \in (\frac{1}{125}, \frac{1}{5}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \log_{x^2} 5 < -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{5}{18} \leq \log_{x^2} 5 \leq 0$$

1)  $0 < x^2 < 1$  (из условия на  $x$ )

$$5 > x^{2-\frac{1}{2}} \Rightarrow 5 > \frac{1}{x} \quad x > 0$$

$$\Rightarrow 5 > \frac{1}{x} \Rightarrow x > \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{x^2} \geq 5 \Rightarrow \frac{1}{x^2} \geq 5^{\frac{18}{5}}$$

$$2) (x^2)^{-\frac{5}{18}} \geq 5 \geq 1 \Rightarrow x^2 \leq \frac{1}{5^{\frac{18}{5}}}$$

$$\Rightarrow x \leq \frac{1}{5^{\frac{9}{5}}} \quad (x > 0)$$

$$\frac{1}{5^{\frac{9}{5}}} \geq \frac{1}{125} \quad 5^{\frac{9}{5}} < 5^3 \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{125}, \frac{1}{5^{\frac{9}{5}}}\right)$$

~~Предложение на стр. 4~~ (Перечисление с условием)



Проверим  $x^2=1$

(12 прогнозируете)

② При  $x^2=1 \Rightarrow x=1$  (из условия)

$$\sqrt{\log_5 1} \leq \log_{125} 1 \quad 0 \leq 0 \quad 0=0$$

$$\Rightarrow x=1$$

$$\text{Ответ: } x \in \left( \frac{1}{125}; \frac{1}{5^{\frac{9}{5}}} \right) \cup \{1\}$$



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(N 6)

$$\sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2} \leq ax + b \leq -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4}$$

$g(x)$   $f(x)$

(Т.к. Верш. ветви вниз)

$$f(x) \quad x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}} = 1 \quad f(x) = f(1) = \frac{-1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{27}{4}$$

$$= \frac{-4 + 8 + 81}{12} = \frac{85}{12}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{27}{4} = \frac{-1 + 4 + 81}{12} = \frac{84}{12} = 7$$

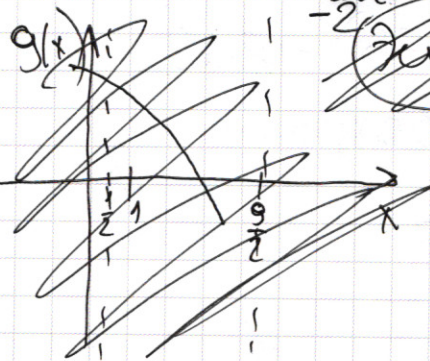
$$f\left(\frac{9}{2}\right) = -\frac{81}{12} + 3 + \frac{27}{4} = \frac{-81 + 36 + 81}{12} = 3$$

$f(x)$  - монотонно возрастает ~~от~~ от  $\frac{1}{2}$  до 1;  
и убывает от 1 до  $\frac{9}{2} \Rightarrow f(x) = 3; \quad f(x) \in [3, \frac{85}{12}]$

$f(x)_{\min} = 3;$   
 $f(x)_{\max} = \frac{85}{12};$

$$g(x) = \frac{175}{4} - 5x - x^2$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{5}{-2} = -2,5 \quad x_0 < \frac{1}{2}$$



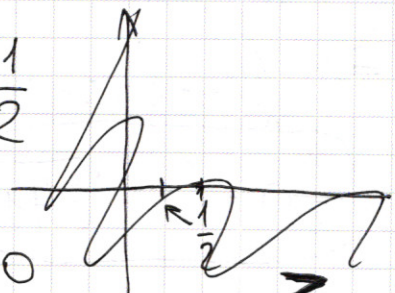
~~Значит~~

$$-x^2 - 5x + \frac{175}{4} = 0$$

$$x^2 + 5x - \frac{175}{4} = 0$$

$$D = 25 + \frac{175}{4} = 200$$

$$x = \frac{-5 \pm 10\sqrt{2}}{2}$$



$$\frac{-5 + 10\sqrt{2}}{2} > \frac{9}{2}$$

$$-5 + 10\sqrt{2} > 9$$

$$10\sqrt{2} > 14$$

$$5\sqrt{2} > 7$$

$$50 > 49$$

$$50 > 49$$



$$\frac{-5-10\sqrt{2}}{2} < \frac{1}{2} \Rightarrow \overline{g(x)_{\max}} = \overline{g\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \sqrt{\frac{175-24}{4} - \frac{24}{35^2}}$$

(с вв. в. в. в.)  
 П.к. это переобла, то наше  $x_0$ , функция  
 монотонно убывает.

$x_0 < \frac{1}{2} \Rightarrow$  минимум функции на проме  $[\frac{1}{2}, \frac{9}{2}]$   
 в точке  $\frac{9}{2}$ ; а max в  $\frac{1}{2}$

$$g(x)_{\max} = g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{175}{4} - \frac{5}{2} - \frac{1}{4} = \frac{175-10-1}{4} = \frac{164}{4}$$

$$= 41; \quad g(x)_{\min} = g\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{175}{4} - \frac{45}{2} - \frac{81}{4}$$

$$= \frac{175-90-81}{4} = \frac{4}{4} = 1$$

$$g(x) \in [1; 41] \quad \text{при } x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right]$$

$$\sqrt{g(x)} \in [1; \sqrt{41}] \quad \text{при } x \in \left[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right]$$

$$f(x) \in \left[3; \frac{85}{12}\right]$$

(при  $a > 0$ )

$\sqrt{g(x)}$  - убывает;  $a(ax+b)$  - возрастает

$$\Rightarrow (ax+b) \geq \sqrt{g(x)}_{\max} \quad \overline{ax+b \geq \sqrt{41}}$$

$$\left(\frac{1}{2}a + b \geq \sqrt{41}\right)$$

от 1 до  $\frac{9}{2}$   $f(x)$  - убав.  
 $a(ax+b)$  - возрастает.

$$ax+b \leq f(x)_{\min}$$

$$\left(\frac{9}{2}a + b \leq 3\right)$$

$$(a > 0)$$

$$\begin{cases} -\frac{1}{2}a - b \leq -\sqrt{41} \\ \frac{9}{2}a + b \leq 3 \end{cases}$$

$$4a \leq 3 - \sqrt{41} \Rightarrow a < 0 \quad \phi$$



16 программисте

при  $a < 0$

$(a+b)$  убавяем

$$f(x)_{\max} \geq a+b$$

$$\frac{85}{12} \neq a+b$$

2 программисте



$$\log_{25} \neq -\frac{1}{6}$$

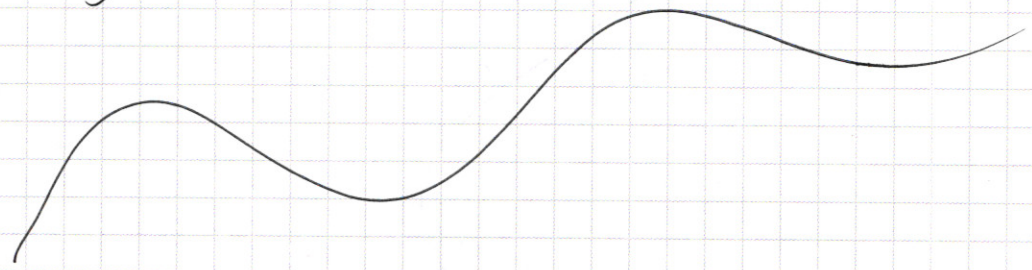
$$x^2 \neq \frac{1}{5^8}$$

$$x \neq \frac{1}{5^8} = \frac{1}{125}$$

$$x \neq \frac{1}{125}$$

$$\log_5 5^{\frac{18}{5}} = \frac{18}{5}$$

$$\log_5 5^{-\frac{18}{5}} = -\frac{18}{5}$$







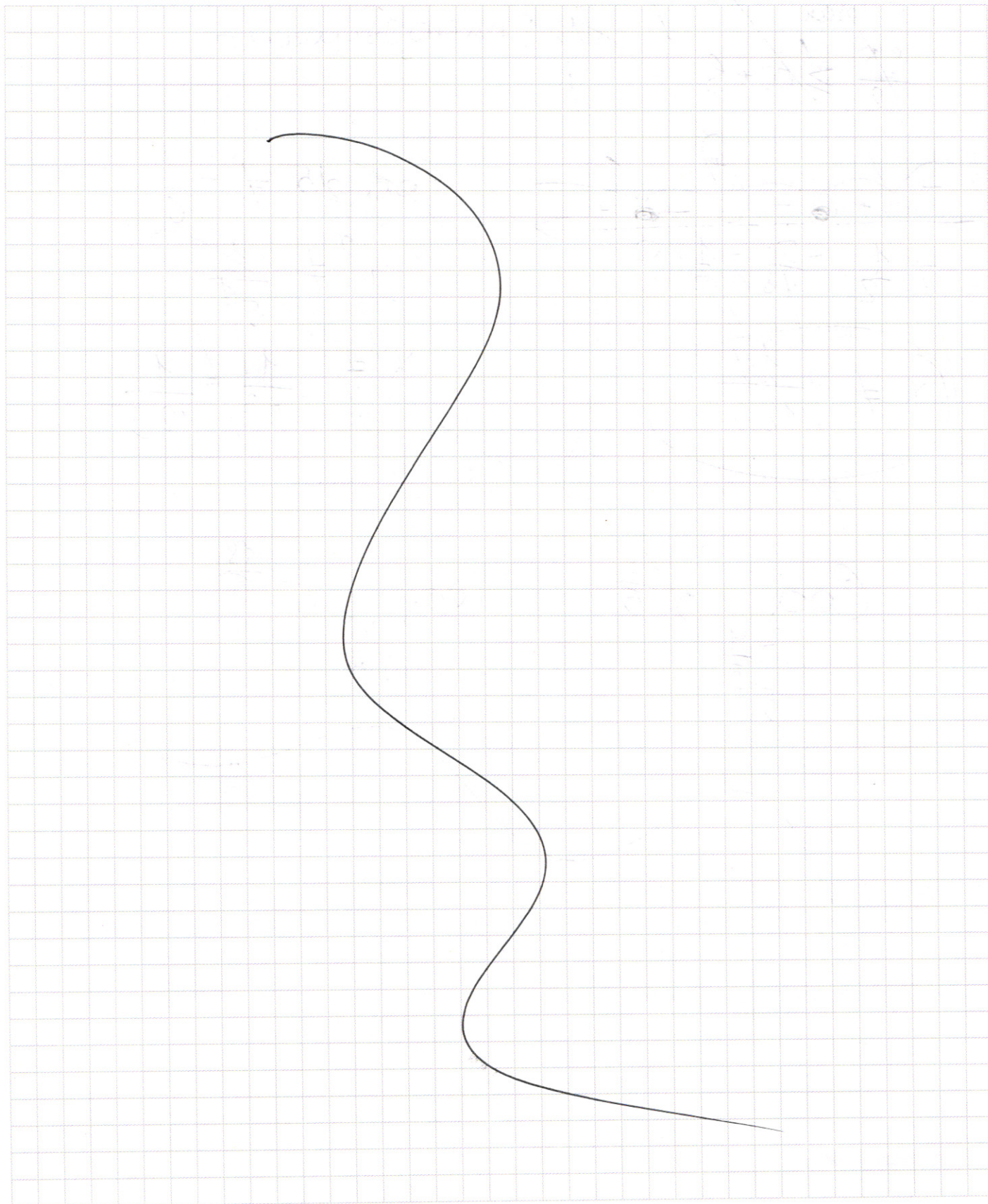
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
------

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S_{\triangle CPO} = ?$

(14)

$\angle ADC = ?$   
 $\angle NQC = ?$   
 $\alpha = \arctg \frac{5}{12}$   
 $AP = 13$   
 $NC = 26$   
 $\tan \alpha = \frac{5}{12}$   
 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$   
 $\sin \alpha = \frac{5}{13}$   
 $\cos \alpha = \frac{12}{13}$   
 $\sin \alpha = \frac{5}{13}$   
 $\cos \alpha = \frac{12}{13}$   
 $\sin \alpha = \frac{5}{13}$   
 $\cos \alpha = \frac{12}{13}$   
 $(\cos \alpha = \frac{12}{13})$

$\Rightarrow \sin \alpha = \frac{5}{13}; \cos \alpha = \frac{12}{13} \Rightarrow CP = \cos \alpha \cdot NC = 24$

$\angle BNP = \angle APN$  (напр. л. еп.)

$\Rightarrow \angle CPQ = \alpha$  (т.к.  $\angle PMC + \angle MCP + \angle MPC = 180^\circ$ )

$\angle QPN + \angle NPC + \angle CPD = 180^\circ$   
 $(+ 90^\circ + \alpha = 90^\circ)$   $(+ \alpha + 90 = 180)$   $PD = 2 \cdot \frac{288}{13}$

$PH = CP \cdot \cos \alpha = \frac{24 \cdot 12}{13} = \frac{288}{13}$

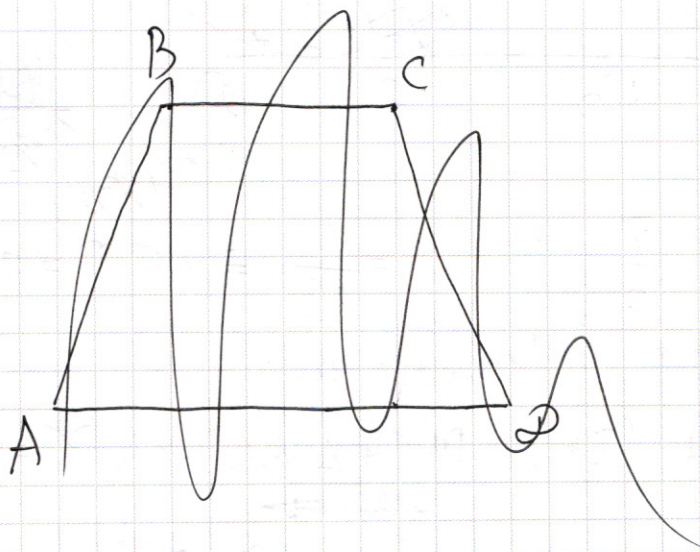
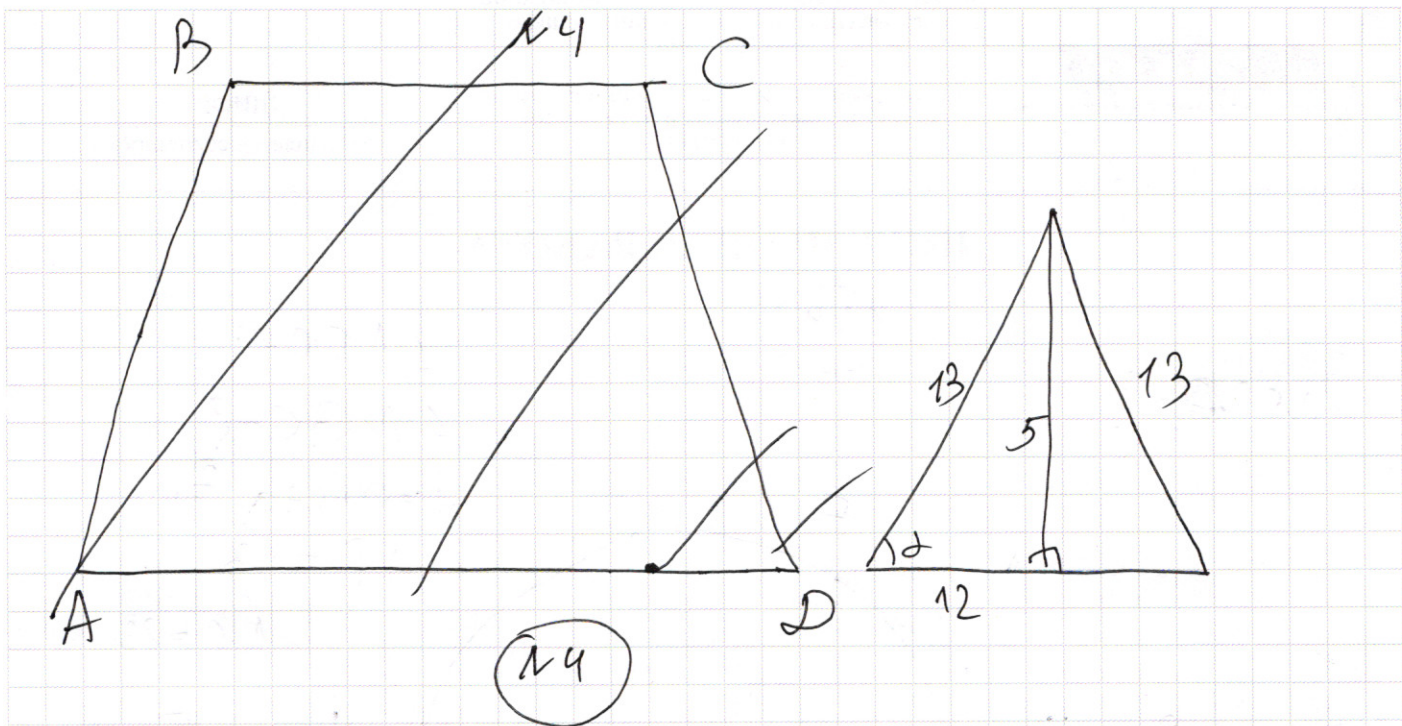
$CH$  - радиус  $\Rightarrow CH = CP \cdot \sin \alpha = \frac{24 \cdot 5}{13} = \frac{120}{13}$

$R = \frac{120}{13}$ ; Пусть E и F точки на BC

BE и PH - перп.; CP - рад.  $\Rightarrow \angle EPC = \angle CPN = \alpha$

$\Rightarrow \angle PCB = 180^\circ - 2\alpha$





черновик     чистовик  
 (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № ~~10~~  
 (Нумеровать только чистовики)



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

14 задание

$$\cos \alpha = \frac{12}{13}$$

$$\Rightarrow PB = 13; BC = 13$$

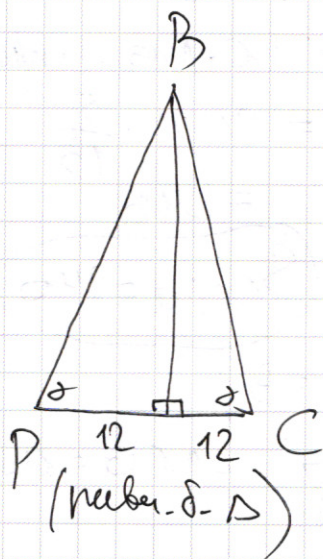
$$\angle A + \angle B (\text{в туп.}) = 180^\circ$$

$$\text{так как } BP = AP = 13$$

$$\Rightarrow \angle PAB = \angle ABP = \frac{180^\circ - \angle PBC}{2} = \alpha$$

$$\Rightarrow \angle BAC = \alpha$$

$$\angle ADC = \angle BAC = \alpha = \arctan \frac{5}{12}$$



$$\Rightarrow \triangle KCD \cong \triangle PNC$$

$$\Rightarrow CD = PC = 24 \text{ (равн. кат.)}$$

$$\angle MBA = 180^\circ - \angle ABC = \alpha; MB = MC - BC = 13$$

$$\Rightarrow \triangle MBT \cong \triangle ATP \text{ (по см. и 2 углам)}$$

$$\Rightarrow BT = TA = 12 \text{ (равн. кат.)}$$

~~$$S_{\triangle CDA} = MC \cdot CD \cdot \sin(\angle MCD)$$~~

~~$$\equiv 26 \cdot 24 \cdot \sin(180^\circ - \alpha) = 26 \cdot 24 \cdot \sin \alpha = 26 \cdot 24 \cdot \frac{5}{13}$$~~

~~$$= 240 \Rightarrow S_{\triangle CDA} = 240$$~~

$$\angle QAB = 180^\circ - \alpha$$

$$\angle BQD = \angle FBC = 180^\circ - 2\alpha$$

$$\sin(180^\circ - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha = 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} = \frac{120}{169}$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha = \frac{5}{13}; \frac{QB}{\sin \alpha} = \frac{AB}{\sin 2\alpha} \text{ (Теор. син. } \triangle QAB)$$

$$\Rightarrow QB = \frac{24 \cdot \frac{5}{13}}{\frac{120}{169}} = \frac{24 \cdot 5 \cdot 169}{120 \cdot 13} = 13$$



ИЧ програмување

~~AB = BA~~

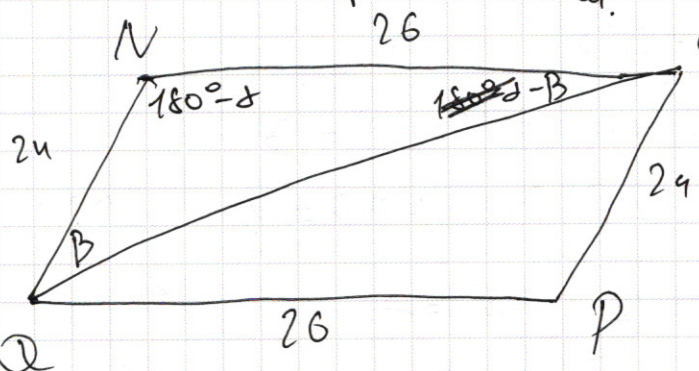
Т.К.  $NB \parallel QA$

$NB = QA = 13$

$\Rightarrow NA = AB = 24$

$MA \parallel AB$

$\Rightarrow QMCP$  - паралелограм.



$\angle ABC = \angle QMC$  (при парал. прями.)  
 $\Rightarrow \angle QMC = 180^\circ - \alpha$

$$S_{MCPQ} = MC \cdot MQ \cdot \sin(180^\circ - \alpha)$$

$$= 26 \cdot 24 \cdot \frac{5}{13}$$

$$= 240$$

$S_{MCPQ} = 240$

$\angle MAC = B$ ;

$\angle CQA = 180^\circ - \alpha - \beta$

~~$QC = \sqrt{MQ^2 + MC^2 + 2MQ \cdot MC \cdot \cos(180^\circ - \alpha)}$~~

~~$= \sqrt{576 + 676 + 2 \cdot 24 \cdot 26 \cdot \frac{24}{13}}$~~   $= \sqrt{576 + 676 + 2 \cdot 576}$

$$\frac{24}{\sin(180^\circ - \beta)} = \frac{26}{\sin \beta} \quad (\text{Теор. син.})$$

$$\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha}{24}$$

$$= \frac{\sin \beta}{26} = \frac{\frac{5 \cos \beta}{13} + \frac{12 \cdot \sin \beta}{13}}{24} = \frac{\sin \beta}{26}$$

$$\frac{10 \cos \beta + 24 \cdot \sin \beta}{24} = \frac{\sin \beta}{26} ; \quad \frac{10}{24} \cos \beta + \sin \beta = \frac{\sin \beta}{26}$$

$\Rightarrow \cos \beta = 0 \Rightarrow \beta = 90^\circ$       $\sin \beta = \frac{5}{24} \cos \beta$

$\tan \beta = \frac{5}{24} \Rightarrow \beta = \arctan\left(\frac{5}{24}\right)$

$\angle MAC = \frac{5}{24}$ ;      $S_{PDC} = \frac{PD \cdot CH}{2} = \frac{288}{13} \cdot \frac{120}{13}$

$S_{MCPQ} = S_{PDC} + S_{MCPQ} = \frac{34560}{169} = 240 + \frac{34560}{169}$      *Одговор:*



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$$1) \left\{ \begin{array}{l} \sin(x-y) = -9 \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) \end{array} \right.$$

$$2) \left\{ \begin{array}{l} \cos(x-2y) = -\sqrt{3} \cdot \sin(x-2y) = 10 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \end{array} \right.$$

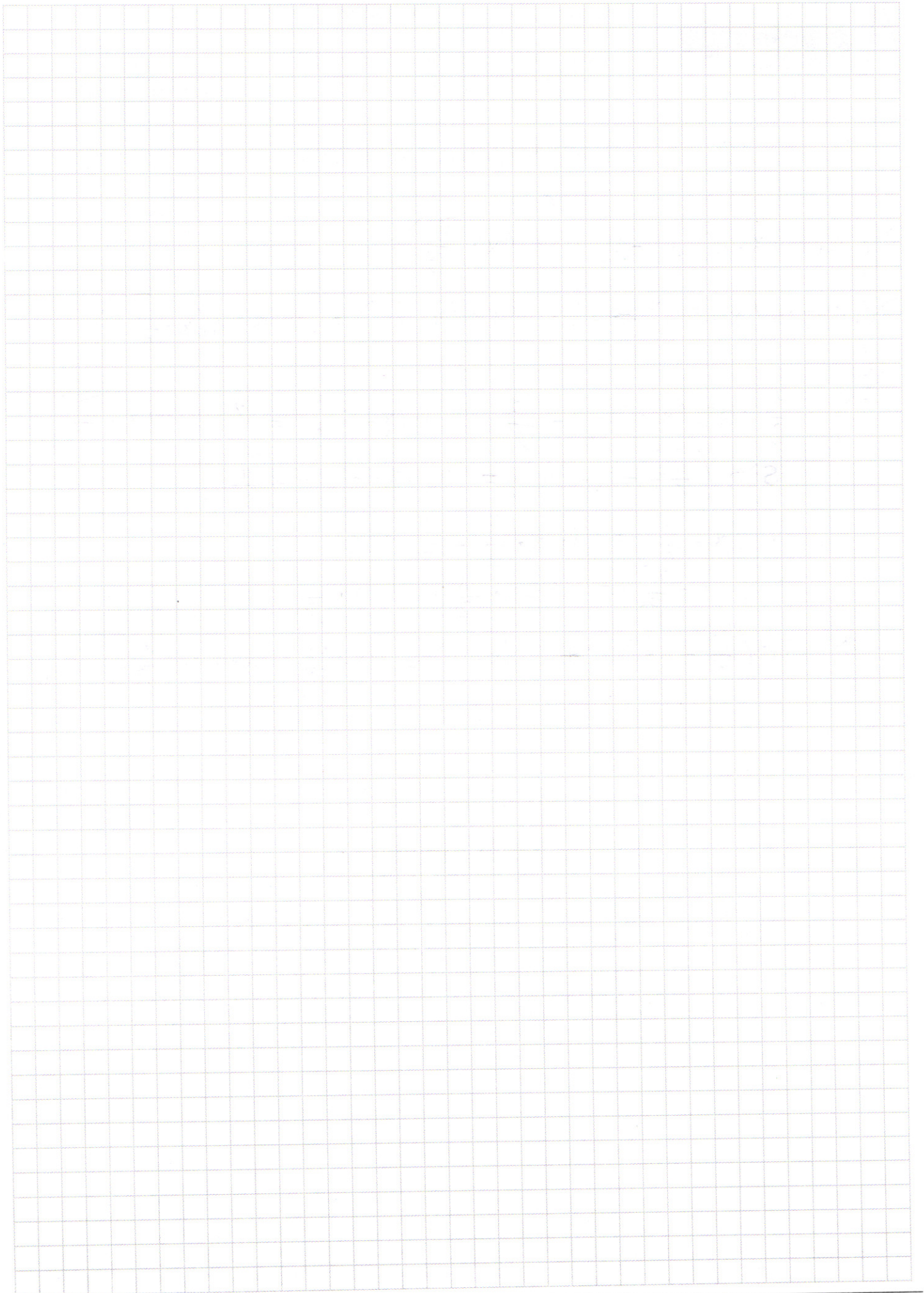
$$2) \quad \frac{1}{2} \cos(x-2y) - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(x-2y) = 10 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - x + 2y\right) = 10 \cdot \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \sin x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \cos x$$

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \cos x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \sin x \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6} - x + 2y\right) + \sin(x-y) = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin x + 10 \cdot \frac{1}{2}$$





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{\frac{1+5}{4} - 5x - x^2} \leq ax + b \leq \frac{-x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4}$$

$$f(x) = \frac{-x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4} \quad x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{3} = 1$$

$$f(x_0) = \frac{-1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{27}{4} = \frac{1}{3} + \frac{27}{4} - \frac{2}{3}$$

$$= \frac{4 + 81 - 8}{12} = \frac{77}{12}$$

$$f_{\max} = 7$$

$$f_{\min} = 3$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{12} + \frac{1}{3} + \frac{27}{4} = \frac{-1 + 4 + 81}{12} = \frac{84}{12} = 7$$

$$f\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{-81}{12} + 3 + \frac{27}{4} = \frac{-81 + 36 + 81}{12} = 3$$

$$\sin(180^\circ - \alpha - \beta)$$

$$= \sin(180^\circ - \alpha) \cdot \cos \beta - \sin \beta \cdot \cos(180^\circ - \alpha)$$

$$= \sin \alpha \cdot \cos \beta + \sin \beta \cdot \cos \alpha$$

$$= \frac{5}{13} \cdot \cos \beta + \frac{12}{13} \cdot \sin \beta$$

$$\frac{576}{2} \cdot 2 \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{12}{13} \quad 240 + 48 = 288$$

$$= \frac{576 \cdot 60}{169} \quad \text{P.D.}$$



$$\log_{5^{-\frac{4}{5}}} 5^{\frac{18}{5}} = \log_{5^{\frac{6}{5}}} 5^{\frac{-18}{5}}$$

$$\frac{5}{4} \cdot \frac{18}{5} = \frac{9}{2}$$

$$\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{18}{5}\right) = -3$$



$$\overline{efg} + \overline{defg} + \overline{cdefg} = 12531$$

3g. зкен на 1

~~g=9~~  $g=7; f=7; e=1; d=4; c=0$

$$\begin{array}{r} 12531 \\ - 21 \\ \hline 12510 \end{array}$$

$$\overline{ef} + \overline{def} + \overline{cdef} = 1251$$

$$\overline{e} + \overline{de} + \overline{cde} = 123$$

$$\overline{d} + \overline{cd} = 12$$

$$\overline{ab04177}$$

Емн ом  $\overline{3905}$

Емн ом  $\overline{4906}$

$$\overline{d} + \overline{cd} + \overline{bcd} = 12$$

$$\overline{c} + \overline{bc} = 0 \quad b;=0; c=0$$

$$g \cdot 10 = 90 \text{ чмен}$$

~~$$\overline{ef} + \overline{def} + \overline{cdef}$$~~

$$\overline{fg} + \overline{efg} + \overline{defg} = 12531$$

$$\overline{f} + \overline{ef} + \overline{def} = 1251$$

$$\overline{e} + \overline{de} = 123$$

$$\overline{d} = 12$$

0	0	0
1	3	3
2	6	6
3	9	9
4	12	12
5	15	15
6	18	18
7	21	21
8	24	24
9	27	27



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$7x + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = 20$$

$$y + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = -44$$

$$7x - y = 64$$

$$49x^2 - y^2 = (7x - y)(7x + y) = 64(7x + y)$$

$$7x + 4\sqrt[3]{7x + y} = 20$$

$$y + 4\sqrt[3]{\frac{49x^2 - y^2}{7x + y}} = -44$$

$$7x + y + 8\sqrt[3]{7x + y} = -24$$

$$t + 8\sqrt[3]{t} = -24$$

$$d^3 + 8d + 24 = 0$$

$$d = -2$$

abcdefg

$$1, 10, 100$$

$$9 + 99 <$$

$$10, 100, 1000$$

$$9 + 99 + 999 <$$

$$100, 1000, 10000 <$$

$$1000, 10000, 100000$$

$$10000, 100000, 1000000$$

$$\begin{array}{r} d^3 + 8d + 24 \quad | \quad d + 2 \\ \underline{d^3 + 2d^2} \phantom{+ 24} \quad | \quad d^2 - 2d + 12 \\ -2d^2 + 8d + 24 \phantom{+ 24} \quad | \phantom{d^2} - 2d + 12 \\ \underline{-2d^2 - 4d} \phantom{+ 24} \quad | \phantom{d^2} - 2d + 12 \\ 12d + 24 \phantom{+ 24} \quad | \phantom{d^2} - 2d + 12 \\ \underline{12d + 24} \phantom{+ 24} \quad | \phantom{d^2} - 2d + 12 \\ 0 \phantom{+ 24} \quad | \phantom{d^2} - 2d + 12 \end{array}$$



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sqrt{\log_{5x} x^4} \leq \log_{125x} \frac{1}{x^2}$$

$$\log_{5x} x^4 \geq 0$$

$$5x > 1 \quad x > \frac{1}{5}$$

$$x^4 \geq 1$$

$$\Rightarrow x \geq 1$$

$$x \leq -1$$

$$\Rightarrow x \geq 1$$

$$0 < 5x < 1$$

$$\cdot 0 < x < \frac{1}{5}$$

$$x^4 \leq 1$$

$$\cdot -1 < x < 1$$

$$0 < x < \frac{1}{5}$$

Ореш

$$\frac{1}{125} < x < \frac{1}{5}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\log_{(x^2)(5x)}}} \leq \frac{1}{\log_{(x^2)(25x)}}$$

$$\sqrt{\frac{2}{\log_{(x^2)(25x)}}} \leq \frac{-1}{\log_{x^2} 125x}$$

$$\log_{125x} \frac{1}{x^2} \geq 0$$

$$x > \frac{1}{125}$$

$$\frac{1}{x^2} \geq 1$$

$$\frac{36}{10} = \frac{18}{5}$$

$$x^2 \leq 1$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

$$\frac{1}{125} < x \leq 1$$

$$0 < x < \frac{1}{125}$$

$$\frac{1}{x^2} \leq 1$$

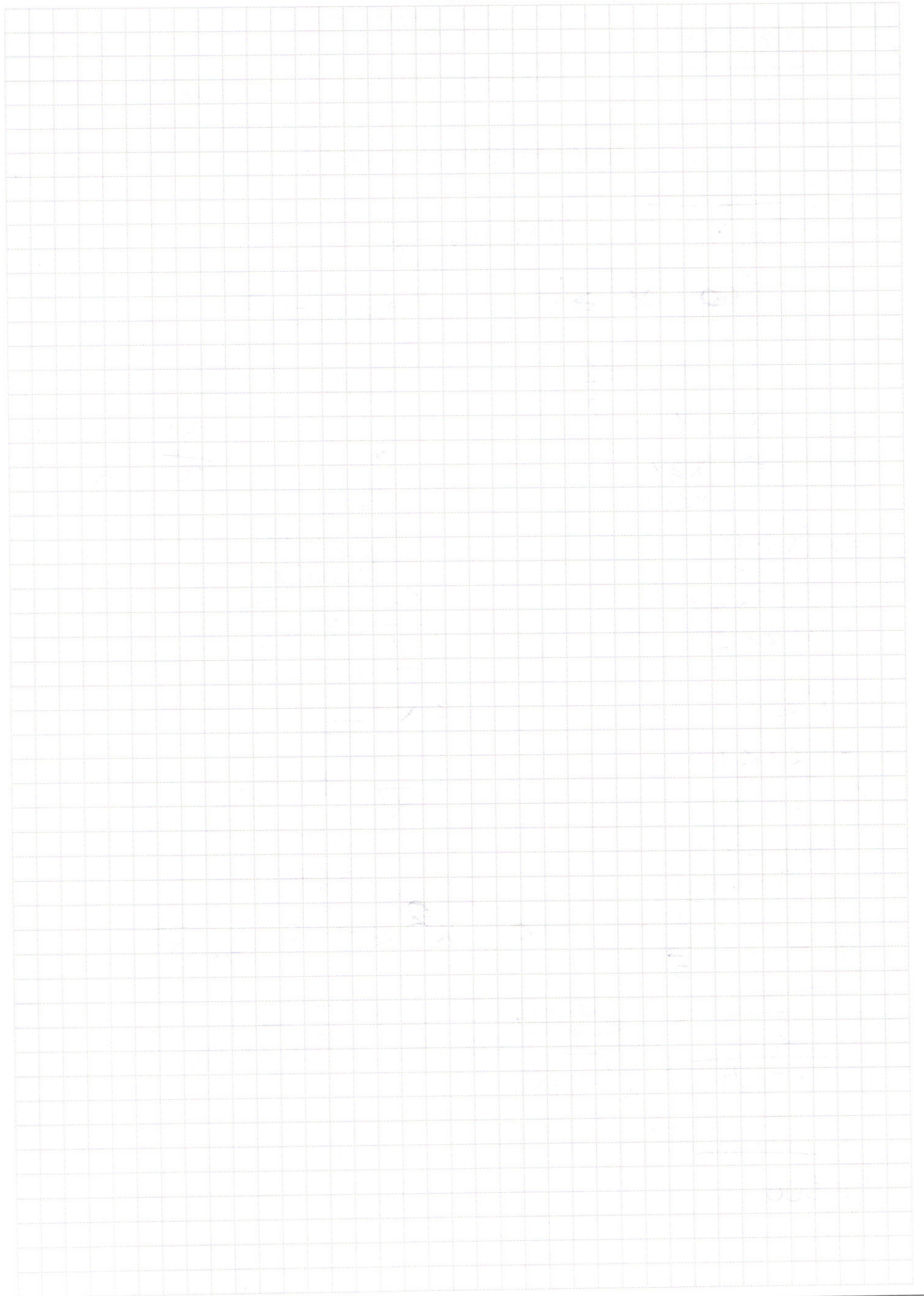
$$x \geq 1$$

$$x \leq -1$$

$$\log_{5x} x^2 \leq -\log_{125x} \frac{1}{x^2}$$

$$\frac{1}{\log_{(x^2)(25x)}} \leq \frac{-1}{\log_{x^2} 125x}$$





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)