МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№ 1}$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\cdot\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{4}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta - \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} - \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}. \quad (1) \\ \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \end{cases}$$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow |\sin 2\beta| = \sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}.$

Из (1):

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} - \frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 \\ 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4\sin\alpha\cos\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha = -1. \\ 4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin\alpha\cos\alpha = -\sin^2\alpha. \\ 2\sin\alpha\cos\alpha = -\cos^2\alpha. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha(2\cos\alpha+\sin\alpha)=0 \\ \cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha)=0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha=0 \\ \sin\alpha=-2\cos\alpha \\ \cos\alpha=0 \\ \sin\alpha=-\frac12\cos\alpha \end{array}\right.$$

Тогда т.к. $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, то

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha=0. \\ \operatorname{tg}\alpha=-2. \\ \operatorname{tg}\alpha\in\varnothing. \\ \operatorname{tg}\alpha=-\frac12. \end{array}\right.$$

Ответ: $0; -2; -\frac{1}{2}$.

$\boxed{№ 2}$ Пусть $x-2=t$; $y-1=f$.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(xy-x-2y+2)} \\ x^2+9y^2-4x+18y=12. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2-4+9(y-1)^2+9=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-2f=\sqrt{tf} \quad (1). \\ t^2+9f^2=25. \end{cases}$$

Из (1): $\begin{cases} t^2-4ft+4f^2=tf \\ t-2f\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-5ft+4f^2=0. \\ t\geq 2f. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{5f\pm3f}{2} \\ t\geq 2f. \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t=4f. \\ t=f. \end{array}\right. \\ t\geq 2f. \end{cases}$

$D=25f^2-4\cdot4f^2=9f^2$

Тогда $\left[\begin{array}{l} 16f^2+9f^2=25. \\ f^2+9f^2=25. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f^2=1. \\ f^2=2,5. \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t=4f \\ f^2=1. \end{cases} \\ \begin{cases} t=f \\ f^2=2,5 \end{cases} \end{array}\right. \\ t\geq 2f \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$\boxed{№2}$ продолжение

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} t = 4f \\ f = \pm 1. \end{cases} \\ \begin{cases} t = f \\ f = \pm\sqrt{7,5} \end{cases} \\ t \ge 2f. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t = 4 \\ f = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} t = -4 \\ f = -1. \end{cases} \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t = \sqrt{7,5} \\ f = \sqrt{7,5} \end{cases} \\ \begin{cases} t = -\sqrt{7,5} \\ f = -\sqrt{7,5} \end{cases} \end{array}\right. \\ t \ge 2f. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t = 4 \\ f = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} t = -\sqrt{7,5} \\ f = -\sqrt{7,5} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2 = 4 \\ y-1 = 1. \end{cases} \\ \begin{cases} x-2 = -\sqrt{7,5} \\ y-1 = -\sqrt{7,5} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 6 \\ y = 2. \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y = 1-\frac{\sqrt{10}}{2}. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(6;2)$; $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2};\ 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$.

$\boxed{№3}$ $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \ge |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$. $x^2-18x = t$.

$5^{\log_{12}t} + t \ge t^{\log_{12}13} \Rightarrow 5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \ge 13^{\log_{12}t}$.

Т.к. $f(t) = 5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t}$ ↑ на $D(f)$ и $g(x) = 13^{\log_{12}t}$ ↑ на $D(g)$, то по правилу о корнях их не более 1 $\Rightarrow$ $\log_{12}t = 2$. Тогда равенство выполняется при $t = 144$. При $t < 144$: $5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} > 13^{\log_{12}t}$; при $t > 144$ — наоборот $<$.

Тогда $\log_{12}t \le 2 \Rightarrow 0 < t \le 144 \Rightarrow 0 < x^2 - 18x \le 144$.

$$\begin{cases} x(x-18) > 0. \\ x^2 - 18x - 144 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-18) > 0. \\ (x+6)(x-24) \le 0. \end{cases}$$

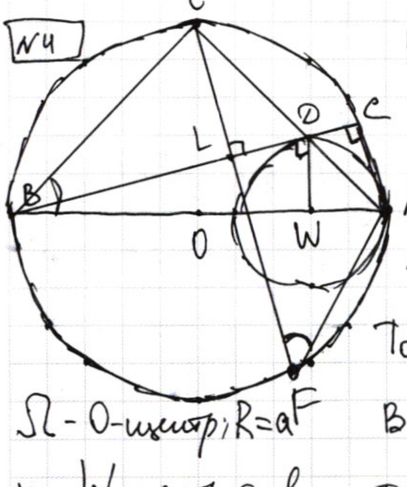
$-6 \quad 0 \quad 18 \quad 24 \quad x$

$D = 81 + 144 = 225 = 15^2$; $x = \frac{9 \pm 15}{1}$

$x \in [-6;0) \cup (18;24]$.

Ответ: при $[-6;0) \cup (18;24]$.

$\boxed{№4}$



Ω - O-центр; $R = a$

w - W-центр, $r = b$.

1) Т.к. BC - кас. к w, то $WD \perp BC$. Т.к. AB - диаметр, то т.к. на нём лежат O и A, то W тоже лежит на нём (лин. центр). А то $\angle ACB = 90^\circ$ по св-ву впис. угла на диам. $\Rightarrow \triangle BDW \sim \triangle BCA$ по двум углам $\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{BW}{BA}$, где $BA = 2a$; $BW = 2a - b$.

Тогда $\frac{17}{25} = \frac{2a-b}{2a} \Rightarrow b = \frac{16}{25}a$. в пр. $\triangle BDW$: по т. Пифагора:

$BD^2 = BW^2 + DW^2 \Rightarrow 17^2 = \left(2a - \frac{16}{25}a\right)^2 + \left(\frac{16}{25}a\right)^2 \Rightarrow a = \frac{85}{6} = 14\frac{1}{6}$,

Тогда $b = \frac{16}{25} \cdot \frac{85}{6} = \frac{136}{15} = 9\frac{1}{15}$.

Ответ: $R_\Omega = 14\frac{1}{6}$; $R_W = 9\frac{1}{15}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 Продолжение

2) В пр. $\triangle BCA$: по т. Пифагора: $CA^2 = AB^2 - BC^2 \Rightarrow CA^2 = \left(\frac{85}{3}\right)^2 - 25^2 \Rightarrow CA = \frac{40}{3}$.

В пр. $\triangle DCA$: $AD^2 = DC^2 + CA^2$ по т. Пифагора $\Rightarrow AD = \sqrt{DC^2 + CA^2} = \sqrt{64 + \frac{1600}{3}} = \frac{8\sqrt{34}}{3}$.

По св-ву окружности: $BD \cdot DC = ED \cdot DA = (EA - DA) \cdot DA$, т.к. $BC \cap EA = D$.

Тогда $17 \cdot 8 = \left(x - \frac{8\sqrt{34}}{3}\right) \cdot 8\frac{\sqrt{34}}{3} \Rightarrow x = \frac{25\sqrt{34}}{6} = EA$.

В $\triangle BEA$: $\angle BEA$ - опир. на диам. $\Rightarrow \angle BEA = 90^\circ \Rightarrow \triangle EBA$ - пр. $\triangle \Rightarrow \sin\angle EBA = \frac{EA}{BA} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$.

В Ω: $\angle EBA = \angle EFA$, т.к. оба опираются на дугу $E\breve{C}A \Rightarrow \angle EFA = \arcsin\frac{5\sqrt{34}}{34}$.

Ответ: $\angle EFA = \arcsin\frac{5\sqrt{34}}{34}$.

3) В пр. $\triangle BEA$: $\sin\angle EBA = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \cos\angle EBA = \sqrt{1 - \frac{25}{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow EB = \frac{3}{\sqrt{34}} \cdot AB = \frac{85}{\sqrt{34}}$.

В пр. $\triangle EBL$ ($EF \cap BC = L$): по т. Пифагора: $EL^2 = EB^2 - x^2 = \frac{85^2}{34} - x^2$.

В пр. $\triangle EDL$ ($DL = DB - BL = 17 - x$) по т. Пифагора: $EL^2 = ED^2 - (17-x)^2 = \left(\frac{3\sqrt{34}}{2}\right)^2 - 17^2 + 34x - x^2$

$\Rightarrow x = \left(\frac{85}{34}\right)^2 - \left(\frac{9 \cdot 34}{2 \cdot 34} + \frac{17^2}{34}\right) = 12{,}5 = BL \Rightarrow L$ - сер. $BC \Rightarrow EF$ - диаметр $\Omega \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ \Rightarrow \triangle EAF$ - пр. $\triangle \Rightarrow EA = EF \cdot \sin\angle AFE = \frac{85}{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}}$

$AF = EF \cdot \cos\angle AFE = \frac{85}{3} \cdot \frac{85}{\sqrt{34}} \Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot EA \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot \frac{85 \cdot 5}{3 \cdot \sqrt{34}} \cdot \frac{85 \cdot 85}{3 \cdot \sqrt{34}} = 59\frac{1}{36}$

Ответ: $S_{AEF} = 59\frac{1}{36}$.

№6. $f(x) = \frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{1}{2x+1{,}5}$. На $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right) \downarrow$ (т.к. гипербола)

$g(x) = -8x^2 - 30x - 17$. $x_B = -\frac{30}{2 \cdot 8} = -\frac{15}{8}$; $y_B = 11\frac{1}{8}$. Парабола; ветви опущены вниз

$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3} = 3 + \frac{1}{2x+1,5} = 3 + \frac{1}{2(x+0,75)}$

$\frac{2}{4x+3} = -1$

$2 = -4x-3$

$5 = -4x$

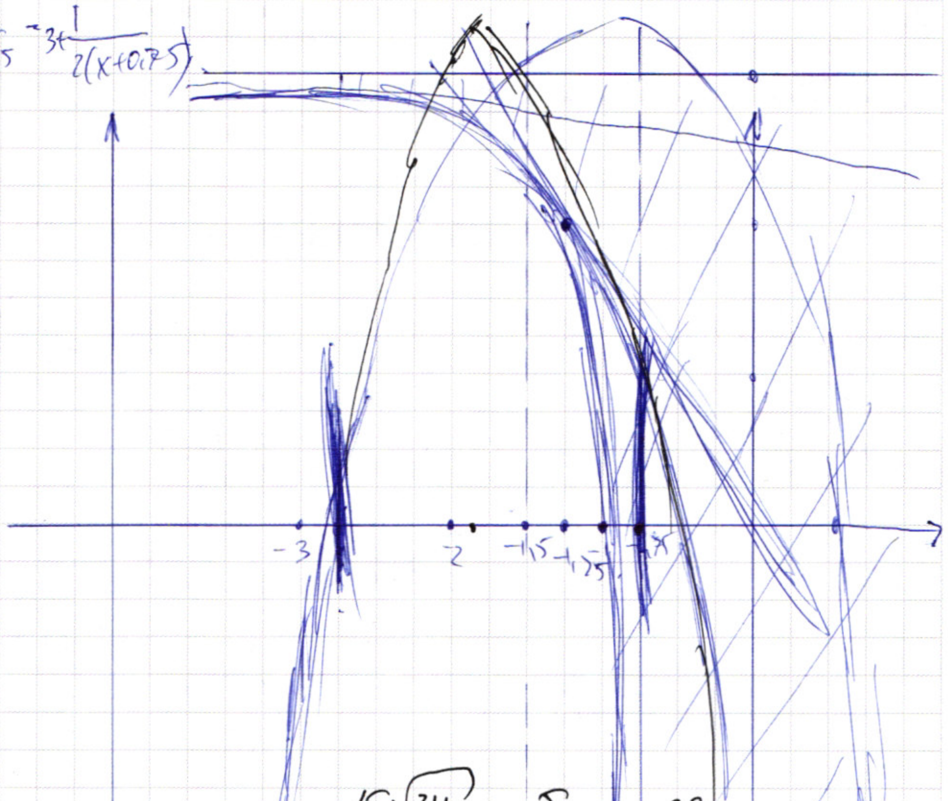
$x = -\frac{5}{4}$

$-\frac{11}{4} = -3$

$\frac{17\cdot 3}{\sqrt{34}} = \frac{\sqrt{17}\cdot 3^3}{\sqrt{27}} = \frac{8\sqrt{34}}{3}$

$x^2 = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

$\frac{85}{35} \cdot \frac{5}{17}$



$ED = \frac{25\sqrt{34}}{6} - \frac{10\sqrt{34}}{6} = \frac{9\sqrt{34}}{6} = \frac{3\sqrt{34}}{2}$.

$\frac{5\sqrt{34}}{34} = \frac{5}{\sqrt{34}}$ $\frac{3}{\sqrt{34}}$.

$\frac{9\cdot 34}{4} - x^2 = \frac{85^2}{34} - (17-x)^2$. $|\cdot 34$.

$EB = \frac{3}{\sqrt{34}} \cdot \frac{85}{3} = \frac{85}{\sqrt{34}}$.

$\frac{9\cdot 34}{4} = \frac{85^2}{34} - 17^2 + 34x$.

$\frac{5}{2} = 2,5$. $6,25$.

$2,25 + 8,5 - 6,25 = 4,5$. $4,5 + 8 = 12,5$

$6,25 - 2,25 + 8,5 =$

$x = \frac{9}{4} - \left(\frac{85}{34}\right)^2 + \frac{17}{2}$.

$\frac{85^2 \cdot 85 \cdot 5}{2\cdot 9\cdot 34\, 2} = \frac{25}{4\cdot 9} \cdot 85$.

17

$85 \times 25 = 425 + 170 = 2125$

$2125 : 36 = 59$, -180, 325, 324

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y})$. <0 $f(\frac{1}{2}) = \cancel{f} - f(2) = -1$. $y \neq 1$.

$f(3) = f(2) + f(1,5)$ >0 $= f(2) + f(\frac{1}{2}) + f(3)$ $f(4) = 2f(2) =$ $f(\frac{3}{2}) = f(3) + f(\frac{1}{2})$

$(1:4) = \cancel{f(1) + f(\frac{1}{4}) = 1 + f(\frac{1}{4})} \cancel{f(2) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})}$

$f(1) = 0$

$f(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$. $= f(1) + f(\frac{1}{4}) = f(2) + f(\frac{1}{2}) +$

$+ f(2) + f(\frac{1}{8}) = f(2) \cdot 2 + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{4})$

$2f(2) = -f(\frac{1}{4}) \Rightarrow$ $f(\frac{1}{4}) = -2$.

$2 \cdot 4 = [\frac{2}{2}] = 1$.

$f(\frac{1}{3}) = f(1) + f(\frac{1}{3}) = f(2) + f(\frac{1}{6}) =$ $f(2) + f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3})$

$f(\frac{1}{5}) = f(2) + f(\frac{1}{10}) = f(2) +$

$f(\frac{1}{6}) = f(\frac{1}{4}) + f(\frac{2}{3}) = f(\frac{1}{4}) + f(2) + f(\frac{1}{3})$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) =$

$3 + \frac{2}{4x+8} = 3 + \frac{1}{2(x+4)}$ $\frac{1}{2x+1} = \frac{1}{2(x+0,5)}$

$-8x^2 - 30x - 17$.

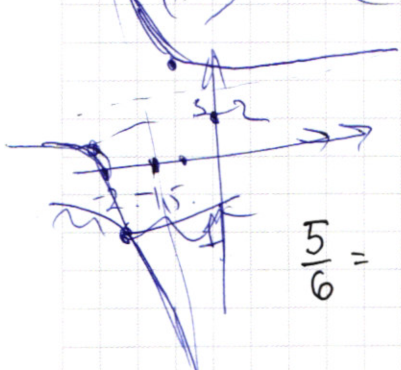
$x_B = \frac{-b}{2a} = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$

$-8\frac{225}{8} + \frac{30 \cdot 15}{8} - 17 = \frac{225}{8} - \frac{136}{8} = \frac{89}{8}$ $= 11\frac{1}{8}$

$8x^2 + 30x + 17 = 0$.

$D = 225 - 8 \cdot 17 = 89$. $x = \frac{-15 \pm \sqrt{89}}{8} \approx \frac{-15 \pm 9}{8}$

$225 - 136 = 89$ $80 + 56 = 136$



$\frac{5}{6} = 5 + \frac{1}{6}$ $f(4) = \underbrace{f(2) + f(2) + f(2)}_{3} + \underbrace{f(3)}_{1}$ -3 $[\quad]$ $\frac{3}{4}$

4

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

1) $2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$2 \cdot 2\cos\alpha \cdot \sin\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha = -1$

$4\cos\alpha\sin\alpha = -2\sin^2\alpha$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ 4\cos\alpha = -2\sin\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ -2\cos\alpha = \sin\alpha \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \operatorname{tg}\alpha = -2 \end{array}\right.$

2) $2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$ $\quad 2\cos^2\alpha - 1$

$\cancel{4}\cos\alpha\sin\alpha = -2\cos^2\alpha$

$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \\ 4\sin\alpha = -2\cos\alpha \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha \in \varnothing \\ \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{1}{2} = \operatorname{tg}\alpha \end{array}\right.$

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x + 18y = 12 \end{cases}$ $\quad (x-2y)^2 = (x-2)(y-1)$ $\quad (x-2y)^4 = (x-2)^2(y-1)^2$

$(x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

$x - 2y = x - 2$

$(3y-3)^2 = 25 - (x-2)^2$ $\quad (x-2) - 2(y-1)$

$(3y-3)^2 = (27 - x)(23 + x)$

$x - 2y = y - 1$

$(x-2)^2 = 25 - 9(y-1)^2$

$(x-2y)^4 = (25 - 9(y-1)^2)(y-1)^2 = 25(y-1)^2 - 9(y-1)^4$

$t^2 + 9f^2 = 25$ $\quad t^2 = 25 - 9f^2$ $\quad (x-2) - 2(y-1) = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$t - 2f = \sqrt{tf}$ $\quad \cancel{(x-2)}$ $\quad f + t = \frac{5}{f} \Rightarrow f = \frac{5}{f+t}$

$t^2 - 4ft + 4f^2 = tf$

$25 - 9f^2 + 4f^2 - 5ft = 0$

$25 = 5f(f+t)$ $\quad f^2 + ft = 5$ $\quad ft = f^2 - 5$

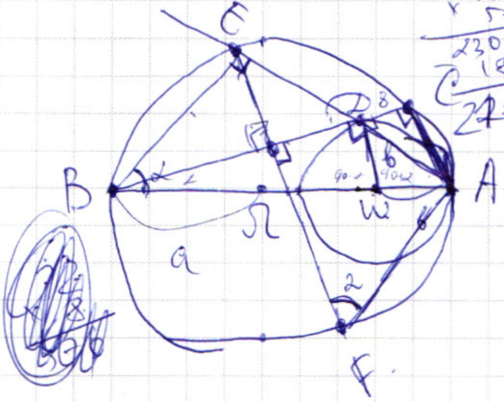
☑ черновик ☐ чистовик

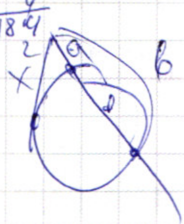
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$46 \cdot 46 = 46 \cdot 50 - 46 \cdot 4$





$x^2 = a \cdot b$

$(34-16)(34+16) = 18 \cdot 50$

$$\frac{17}{25} = \frac{2a-b}{2a}$$

$34a = 50a - 25b$

$25b = 16a$

$$\boxed{b = \frac{16}{25}a}$$

$$2a - \frac{16}{25}a = \frac{34}{25}a$$

$$17^2 + \left(\frac{16}{25}a\right)^2 = \left(\frac{34}{25}a\right)^2$$

$17^2 \cdot 25^2 + 16^2 a^2 = 34^2 a^2$

$a^2 \, 18 \cdot \cancel{50} = \cancel{25} \cdot 25 \cdot 17 \cdot 17$

$$a = \sqrt{\frac{5^2 \cdot 17^2}{6^2}} = \frac{5 \cdot 17}{6} = \frac{85}{6} = 14\frac{1}{6}$$

$$b = \frac{16}{25} \cdot \frac{85}{6} = \frac{8 \cdot 17}{15} = \frac{136}{15} = 9\frac{1}{15}$$

$2a - b$

$$\frac{17}{25} = \frac{\frac{136}{15}}{x}$$

$$x = \frac{136 \cdot 25}{15 \cdot 17} = \frac{40}{3}$$

$$\left(\frac{85}{3}\right)^2 - 25^2 = \left(28\frac{1}{3} - 25\right)\left(28\frac{1}{3} + 25\right) = 3\frac{1}{3} \cdot 53\frac{1}{3} = \frac{10 \cdot 160}{9} = \left(\frac{40}{3}\right)^2$$

$$AO = \sqrt{8^2 + \frac{1600}{9}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 64 + 1600}{9}} = \frac{\sqrt{2176}}{3}$$

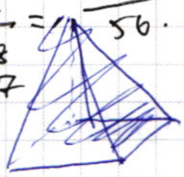
2176

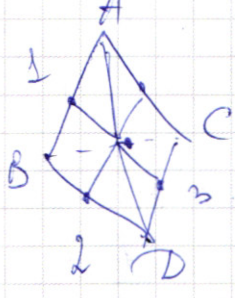
$$\cos\alpha = \frac{BO}{BW}$$

~~$AO^2 = BO^2 + BA^2 - 2\cos BO\,BA$~~

$$\frac{86 \cdot 32}{9 \cdot 3} =$$

$$\frac{EA}{BA} = \frac{\frac{85 \cdot \sqrt{34}}{3 \cdot 2}}{\frac{85}{3} \cdot 28} = \frac{5\sqrt{34}}{56}$$





$4 \cdot 2 \cdot \sqrt{34}$

$$\frac{x^2 - 40^2}{9} = 84$$

$x^2 = 64 \cdot 9 + 40^2$, $\boxed{x = \sqrt{2176}}$

$$\frac{\sqrt{2176}}{3}\left(x - \frac{\sqrt{2176}}{3}\right) = 17 \cdot 8$$

$$x = \frac{17 \cdot 8 \cdot 3}{\sqrt{2176}} + \frac{\sqrt{2176}}{3} = \frac{17 \cdot 8 \cdot 9 + 2176}{3\sqrt{2176}} = \frac{\sqrt{17}(9+16)}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{34} \cdot 25}{6}$$

$$= \frac{17 \cdot 8 \cdot 9 + 4 \cdot 8 \cdot 2 \cdot 17}{3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot \sqrt{34}}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

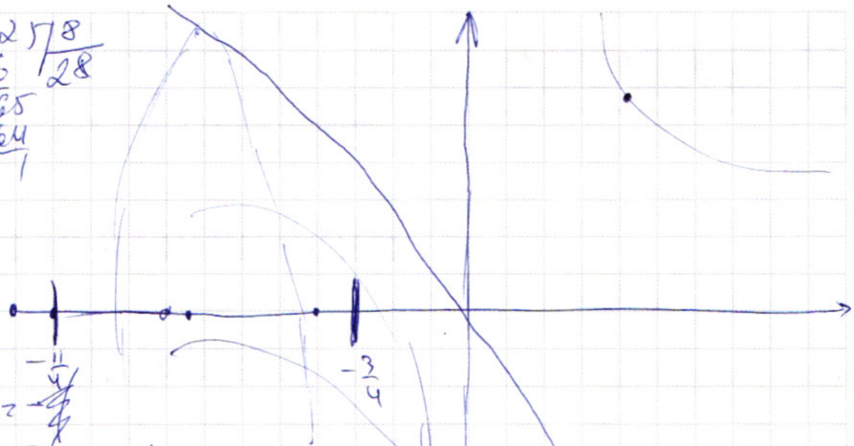
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\cancel{f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)}$

$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$225 : 8 = 28$, 16, 65, 64, 1

$12x+11 : (4x+3) = 3$, $12x+9$, 2



$-8x^2 - 30x - 17 = -(8x^2+30x+17) = -\frac{1}{4}$

$x_B = -\frac{b}{2a} = \frac{-30}{-8 \cdot 2} = -\frac{15}{8} = -1\frac{7}{8}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\sin 2\alpha = 2 \cdot \sin\frac{2\alpha}{2} \cdot \cos\frac{2\alpha}{2}$

$-\frac{11}{4} = -2\frac{3}{4}$

$-8 \cdot \frac{225}{64_8} + \frac{30 \cdot 15}{8} - 17 = \frac{450-225}{8} - 17 = \frac{225}{8} - 17 = 28\frac{1}{8} - 17 = 11\frac{1}{8}$

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 3} - 18x$ $\quad x^2+18x = t$

$\log_2\left(x^{\log_2 4}\right) =$

$|t|^{\log_{12} 5} + |t|^{\log_{12} 3} + t \geq 0$ $\quad \sin(\alpha+\beta) = \frac{\quad}{2}$

$\left(\log_{12} 5 - \log_{12} 3 + 1\right) \log_{12}|t| \geq 0$

$\sin(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{2}$

$\log_{12}\left(\frac{5 \cdot 12 \cdot 4}{3}\right) = \log_{12} 20 \cdot \log_{12}|t| \geq 0$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = 2 \cdot \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\alpha \cdot + \frac{1}{\sqrt5} \cdot \cos 2\beta = +\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) =$ $\quad 60 \quad 90 \quad 180$

$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{2} =$ $\quad \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\cancel{\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)} =$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt3}{2} + \frac{\sqrt3}{2}\cdot\frac{1}{2} =$

$\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta - \sin 2\beta \cos 2\alpha =$

$= 1)\ \sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} - \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2)\ \frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cancel{\sin(2(\alpha+\beta)) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\cancel{\sin(\alpha+\beta) = \sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha+\beta}{2}}$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$x-2y = \sqrt{x(y-1)-2(y-1)} = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$(x-2)^2-4+9(y-1)^2-9=12$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$t=-1$

$f=-1$

$-1\geq-2$

$x\geq 2y$

$\begin{cases} (x-2y)^2=(x-2)(y-1) \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$

$(x-2y)^2 = tf$

$t^2+9f^2=25$

$f=-1$

$t=-4$

$-4\leq-2$

$9f^2=25-t^2$

$9f=(25-x+2)(25+x-2)=$

$=(27-x)(23+x)$

$9(y-1)^2=($

$\cancel{6-4=2^2=4}$

$\cancel{(4+4=64}$

$\boxed{\begin{matrix} y=2 \\ x=6 \end{matrix}}$

$t=x-2$

$f=y-1$

$\sqrt{25}=\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{5\sqrt{10}}{10}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$x^2+x-5xy+4y^2+2y-2=0$

$\log_2(f^{\log_2 4}) = \cancel{2\log_2 f}$

$=\log_2(4^{\log_2 f}) = \log_2 f\cdot\log_2 4$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq|x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

$x^2+18x=t$

$|x^2+18x|^{\log_{12}5}-|x^2+18x|^{\log_{12}13}\geq-x^2-18x$

$t^{\log_{12}5}-t^{\log_{12}13}\,\cancel{\geq -t}+t\geq0$

$5^{\log_{12}t}+12^{\log_{12}t}\geq13^{\log_{12}t}$

$5\cdot\log_{12}5-13\log_{12}t+\log_{12}t\geq0$

$\log_{12}t=f$

$\cancel{36t}$

$6\cdot(6+18)=6\cdot24$

$5+12\geq13$

$\cancel{2t}\ \log_{12}t\geq0$

$\log_{12}t(\log_{12}5-\log_{12}13+\log_{12}12)\geq0$

$\frac{5\cdot12}{13}$

-6. 24.

$\log_{12}t$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)