МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство
$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство
$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$
выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1

$$\begin{cases} (1)\ \sin(2\beta+2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ (2)\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\cdot\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right)$$

$$\begin{cases} \sin(2\beta+2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 2\cdot\sin(2\alpha+\cancel{4}2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$(2):\quad -\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\overset{\cos 2\beta}{\cancel{\cos\beta}} = -\frac{4}{5}$$

$$\overset{\cos 2\beta}{\cancel{\cos\beta}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$2\beta = \pm\arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+2\pi k$$

1) $2\beta = \arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)+2\pi k$

$$\sin\left(2\alpha+\arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} + \sqrt{1-\frac{4}{5}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad |\cdot\sqrt{5}$$

$$2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha = -1$$

$$\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$2\cos^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha = 0$$

$$\cos\alpha\neq 0 \qquad \cancel{4}\cos\alpha+2\sin\alpha = 0 \quad |:\cos\alpha$$

$$2tg\,\alpha = -1$$

$$tg\,\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

2) $2\beta = -\arccos\frac{2\sqrt{5}}{5}+2\pi k$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$4\sin 2\alpha-\cos 2\alpha+1 = 0$$

$$4\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 0$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha = 0$ $\qquad 2\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \qquad | : \cos\alpha \neq 0$

$\Downarrow \qquad\qquad \operatorname{tg}\alpha + 2 = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = 0 \qquad\qquad \operatorname{tg}\alpha = -2$

т.к. других $\angle\beta$ не существует, то и других $\operatorname{tg}\alpha$ не будет существовать $\Rightarrow$ всего 3 значения $\operatorname{tg}\alpha$

Ответ: $-2; -\frac{\sqrt{2}}{2}; 0$

Задание 2.

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

Ограничение:

$x - 2y \geqslant 0$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Пусть $\begin{cases} x-2y = a \\ y-1 = b \end{cases}$; ~~$y+1=b$~~ $\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}\begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0 \\ a^2+9b^2-25=0 \end{cases}$

(1) $a^2-5ab+4b^2=0 \quad | : b^2 \neq 0$

$\frac{a}{b} = t \qquad t^2-5t+4=0$

$D = 25-16=9$

$t = \frac{5\pm3}{2} = 4; 1$

1) $\frac{a}{b} = 4$

$a = 4b$

$x = 2y - 2$

2) $\frac{a}{b} = 1$

$a = b$

$x = y+1$

1) $(2y-2-2)^2+9(y-1)^2=25$

$4y^2-16y+16+9y^2-18y+9=25$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$13y^2-34y=0$

$y=0$ $\quad$ $13y=34$

$x=-2$ $\quad$ $y=\frac{34}{13}$ $\quad$ Проверим $\frac{42}{13}-\frac{68}{13}<0$

Проверим $\quad$ $x=\frac{42}{13}$ $\quad$ не уд.

$-2-0\cdot 2\leq 0$

не уд

2) $(y+1-2)^2+9(y-1)^2=25$

$(y-1)^2\cdot 10=25$

$y-1=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$y=\sqrt{\frac{5}{2}}+1$ $\quad$ $y=-\sqrt{\frac{5}{2}}+1$

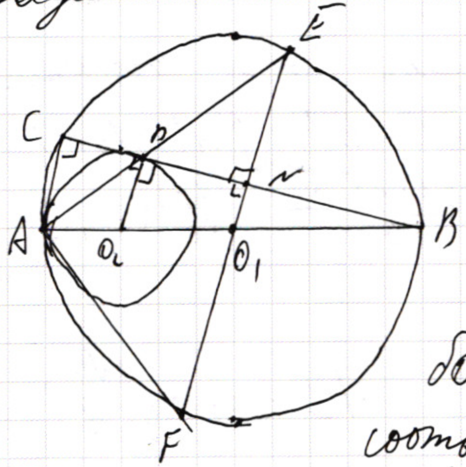
$x=\sqrt{\frac{5}{2}}+2$ $\quad$ ~~x~~ $=-\sqrt{\frac{5}{2}}+2$

Проверим $\sqrt{\frac{5}{2}}+2-2\sqrt{\frac{5}{2}}-2<0$ $\quad$ $-\sqrt{\frac{5}{2}}+2+2\sqrt{\frac{5}{2}}-2>0$

не уд. $\quad$ подходит

Ответ: $(-\sqrt{\frac{5}{2}}+2\,;\,-\sqrt{\frac{5}{2}}+1)$

Задание 4.



Дано: $CD=8$; $BD=17$

Найти: R; r; $\angle AFE$; S_{AEF}

Решение:

Пусть R и r радиус ~~[illegible]~~ большего и меньшего окружностей соответственно. $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ (по 3-м углам)

$\Downarrow$

$\frac{DB}{BC}=\frac{BO_2}{AB}=\frac{O_2D}{AC}$ $\quad$ $BO_2=2R-r$

$\frac{17}{25} = \frac{2R-r}{2R} \Rightarrow 34R = \cancel{66}\,50R - 25r \Rightarrow R = \frac{25}{16}\cdot r$

По т. Пифагора: $BD^2 + r^2 = O_2B^2$

$289 + r^2 = 4R^2 - 4Rr + r^2$

$4R^2 - 4Rr - 289 = 0$

$4\cdot\frac{25^2}{16^2}\cdot r^2 - \frac{25}{4}\cdot r^2 - 289 = 0$

$25^2 r^2 - 25\cdot 16 r^2 = 289\cdot 64$

$r^2 = \frac{289\cdot 64}{9\cdot 25} = \frac{17\cdot 8}{3\cdot 5} = \frac{136}{15}$

$R = \frac{25}{16}\cdot\frac{136}{15} = \frac{65}{6}$

$\angle CDA = \angle EDN$ (вертикальные)

$\frac{O_2D}{AC} = \frac{17}{25}$ $AC = \frac{25}{17}\cdot r = \frac{40}{3}$

$AD = \sqrt{64 + \frac{1600}{9}} = \frac{\sqrt{2176}}{3} = \frac{8\sqrt{34}}{3}$

$AD\cdot DE = CD\cdot DB$ (пересек. хорды)

$DE = \frac{CD\cdot BD}{AD} = \frac{17\cdot 3\sqrt{34}}{34} = \frac{3\sqrt{34}}{2}$

$AE = AD + DE = \frac{8\sqrt{34}}{3} + \frac{3\sqrt{34}}{2} = \frac{16\sqrt{34} + 9\sqrt{34}}{6} = \frac{25\sqrt{34}}{6}$

По т. синусов: $\frac{AE}{\sin\angle AFE} = 2R$. $\sin\angle AFE = \frac{AE}{2R} = \frac{25\sqrt{34}}{2\cdot 6}\cdot\frac{6}{65} =$
$= \frac{\sqrt{34}}{26}$; $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{\sqrt{34}}{26}\right)$

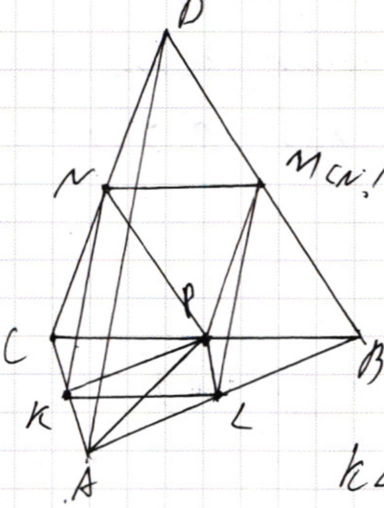
$\sin(\angle ADC) = \frac{40\cdot 3}{3\cdot 8\sqrt{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$; $\sin(\angle ADC) = \frac{EN}{DE}$; $EN = \frac{3\sqrt{34}}{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} =$
$= \frac{15}{2}$; $\cos(\angle ADC) = \frac{3}{\sqrt{34}}$; $DN = \cos\angle ADC\cdot DE = \frac{9}{2}$

$BN = 17 - \frac{9}{2} = \frac{25}{2}$; $CN = 8 + \frac{9}{2} = \frac{25}{2}$. Т.к. хорда $\perp$ BC и делит ~~CK~~ BC пополам, то эта хорда будет диаметром (BC ~~нет~~ не может быть диаметром, т.к. опирается на него) $\Rightarrow FE = \frac{65}{3} \Rightarrow S_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot EF\cdot\sin(\angle AEF) =$
$= \frac{1}{2}\cdot\frac{65}{3}\cdot\frac{25\sqrt{34}}{6}\cdot\cos\left(\arcsin\frac{\sqrt{34}}{26}\right) = \frac{65\cdot 25\cdot\sqrt{34}}{36}\cdot\frac{\sqrt{642}}{26} =$
$= \frac{1625\sqrt{21828}}{936}$

Ответ: $R = \frac{65}{6}$; $r = \frac{136}{15}$; $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{\sqrt{34}}{26}\right)$;
$S = \frac{1625\sqrt{21828}}{936}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 7



$AB=1;\ BD=2;\ CD=3$

$KP=\frac{1}{2};\ NP=1;\ MP=\frac{3}{2}$

KN; NM; ML; KL – средние линии

$NM \parallel BC;\ KL \parallel BC \Rightarrow NM \parallel KL$

$NK \parallel DA;\ ML \parallel DA \Rightarrow ML \parallel KN$

$\Downarrow$

KLMN – параллелограмм; т.к. все его точки лежат на сфере, то этот четырёхугольник можно вписать в ~~сферу~~ окружность. Значит, это прямоугольник. Аналогично AKPL будет прямоугольником $\Rightarrow \triangle ABC$ – прямоугольный с $\angle BAC = 90°$

Задание 3.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

Ограничения

(1) $x^2+18x>0$

Пусть $x^2+18x=a$

$5^{\log_{12}a} + a \geqslant |a|^{\log_{12}13}$

т.к. у нас есть условие (1), то a не может быть отрицательным

$a^{\log_{12}5} + a^{\log_{12}12} - a^{\log_{12}13} \geqslant 0$

$a^{\log_{12} 12} + a^{\log_{12} 5} \geqslant a^{\log_{12} 13}$

$12^{\log_{12} a} + 5^{\log_{12} a} \geqslant 13^{\log_{12} a}$

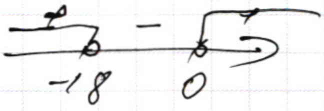
$f(x) = 12^{\log_{12} a} + 5^{\log_{12} a}$

$g(x) = 13^{\log_{12} a}$

т. к. $a > 0$ и $\log_{12} a$ – возрастающая функция, то $f(x)$ будет больше или равна $g(x)$ при $a > 0$

$x^2 + 18x > 0$

$x(x + 18) > 0$



Ответ: $x \in (-18; 0)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle CDA = \angle EDN$ (вертикальные)

$\frac{O_2D}{AC} = \frac{17}{25}$; $AC = \frac{25}{17}\cdot r = \frac{25}{17}\cdot\frac{136}{15} = \frac{40}{3}$

$AD = \sqrt{64+\frac{1600}{9}} = \sqrt{\frac{576+1600}{9}} = \frac{\sqrt{2176}}{3} = \frac{8\sqrt{34}}{3}$

$64 \times 9 = 576$

2176	2
1088	2
544	2
272	2
136	2
68	2
34	2
17	17

4 $AD\cdot DE = CD\cdot DB$

$DE = \frac{CD\cdot DB}{AD} = \frac{8\cdot17\cdot3}{8\sqrt{34}} = \frac{17\cdot3}{\sqrt{34}} = \frac{17\cdot3\sqrt{34}}{34} = \frac{3\sqrt{34}}{2}$

$AE = AD + DE = \frac{8\sqrt{34}}{3} + \frac{3\sqrt{34}}{2} = \frac{16\sqrt{34}+9\sqrt{34}}{6} = \frac{25\sqrt{34}}{6}$

$\frac{AE}{\sin\angle AFE} = 2R$

~~$\sin\angle AFE = \frac{AE}{2R} = \frac{25\sqrt{34}}{2\cdot6}\cdot\frac{15}{136} = \frac{375\sqrt{34}}{1632}$~~

~~$\angle AFE = \arcsin(\frac{375\sqrt{34}}{1632})$~~

$25 \times 15 = 125 + 25 = 375$

$136 \times 12 = 272 + 136 = 1632$

$\sin\angle AFE = \frac{25\sqrt{34}}{2\cdot6}\cdot\frac{6}{65} = \frac{\sqrt{34}}{26}$

$\angle AFE = \arcsin(\frac{\sqrt{34}}{26})$

$\sin(\angle ADC) = \frac{40\cdot3}{3\cdot8\sqrt{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\sin(\angle ADC) = \frac{EN}{DE}$; $EN = \frac{3\sqrt{34}}{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{15}{2}$

$\cos(\angle ADC) = \sqrt{1-\frac{25}{34}} = \sqrt{\frac{9}{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$DN = \cos\angle ADC\cdot DE = \frac{3}{\sqrt{34}}\cdot\frac{3\sqrt{34}}{2} = \frac{9}{2}$

$BN = 17 - \frac{9}{2} = \frac{34-9}{2} = \frac{25}{2}$; $CN = 8 + \frac{9}{2} = \frac{25}{2}$

~~$CN\cdot NB = EN\cdot NF$~~ т.к. ~~BN~~ ~~BC~~

~~$NF = \frac{CN\cdot NB}{EN} = \frac{25}{2}$~~ ~~т.к. BC делит~~ пополам

~~хорда проведенн~~ т.к. BC делит пополам хорду ⊥ к ней, то эта хорда диаметр $\Rightarrow FE = \frac{65}{3}$

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$$

17×32
34
51
544

$356 \mid 2$
$178 \mid 2$
89

$-8x^2-30x-17=0$

$D=900-544=356$

$$\frac{12x+11}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3}$$

$$x=\frac{30\pm2\sqrt{89}}{-16}=\frac{-15\pm\sqrt{89}}{8}$$

$$\begin{cases} ax+b \leq -8x^2-30x-17 \\ ax+b \geq \frac{12x+11}{4x+3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax+b \leq -8x^2-30x-17 \\ ax+b \geq 3+\frac{2}{4x+3} \end{cases}$$

$11/4$
11

$$3+\frac{2}{4x+3} \leq -8x^2-30x-17$$

85
-18
67
$\times 3$
201

$$\frac{2}{4x+3} \leq -8x^2-30x-20 \qquad \frac{1}{4x+3} \leq -4x^2-15x-10$$

$$\frac{(-4x^2-15x-10)(4x+3)-1}{4x+3} \geq 0$$

$$\frac{(4x^2+15x+10)(4x+3)+1}{4x+3} \leq 0$$

$-8x^2-30x-17$

$+85$
$\cdot 16$
101

$x_в = -\frac{30}{8\cdot2}=-\frac{15}{8}$

$y_в =$

$$\frac{16x^3+60x^2+40x+12x^2+45x+30+1}{4x+3} \leq 0$$

$$\frac{16x^3+72x^2+85x+31}{4x+3} \leq 0$$

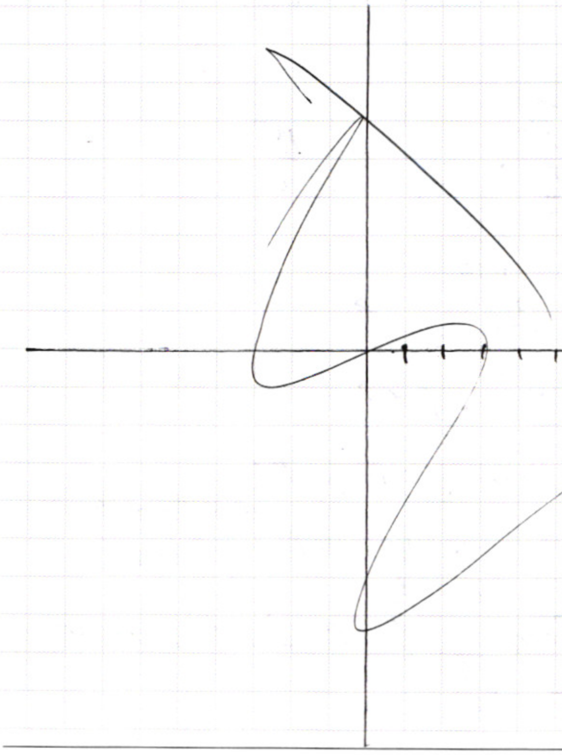
~~$-\frac{3}{4}+\frac{11\cdot3}{4}-\frac{85\cdot3}{4}+31$~~

~~$85+31-$~~ ~~$-\frac{3}{4}-\frac{101}{4}$~~

~~$-\frac{104}{4}+31$~~

~~$-\frac{11}{4}+\frac{8\cdot11}{4}-\frac{85}{4}+31$~~

~~88~~



~~$ax+b$~~

$$\begin{cases} -a\frac{11}{4}+b \geq 3+\frac{2}{-4\cdot\frac{11}{4}+3} \\ -a\frac{3}{4}+b < 3+ \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a\frac{11}{4}+b \geq 3-\frac{1}{4} \\ -a\frac{3}{4}+b<3 \end{cases} \qquad \begin{cases} -11a+4b \geq 11 \\ -3a+4b<12 \end{cases}$$

~~$7-11a+4b$~~ $\begin{cases} -11a+4b \geq 11 \\ 3a-4b>-12 \end{cases}$ +

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~8a~~ $\left\{ \cancel{-a\cdot\frac{11}{4}+b \geqslant 3+\frac{2}{11}} \right.$

$$\begin{cases} -a\frac{11}{4}+b \geqslant \frac{121}{2} + \frac{15\cdot 11}{2} - 17 \\ -a\frac{3}{4}+b < -\frac{9}{2}+\frac{30\cdot 3}{4} - 17 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a\frac{11}{4}+b \geqslant \frac{165-121}{2} - 17 \\ -a\frac{3}{4}+b < -\frac{9}{2}+\frac{45}{2} - 17 \end{cases}$$

$22-17=5$

$18-17=1$

$15 \cdot 11 = 15 + 150 = 165$

$$\begin{cases} -\frac{11}{4}\cdot a + b \geqslant 5 \\ -\frac{3}{4}\cdot a + b < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11a+4b \geqslant 20 \\ -3a+4b < 4 \end{cases}$$

$65 \cdot 65 = 325 + 3250 = 3575$ (с поправкой: 326, 325)

$$\begin{cases} -11a+4b \geqslant 11 \\ -3a+4b < 12 \\ -3a+4b < 4 \\ -11a+4b \geqslant 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -11a+4b \geqslant 20 \\ -3a+4b < 4 \end{cases}$$

$26 \cdot 26 = 156 + 52 = 676$

$676 - 34 =$
$= 642 \,|\, 2$
$321 \,|\, 3$
$107 \,|$

$$AF = \cancel{\sqrt{\frac{3575}{9} - \frac{25\cdot 34}{36}}} = \sqrt{\frac{65^2\cdot 4 - 25\cdot 34}{36}} =$$

~~$S = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot EF\cdot \sin(\angle AEF)$~~ $S = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot EF\cdot \sin(\angle AEF)$

$S = \frac{1}{2}\cdot\frac{65}{3}\cdot\frac{25\sqrt{34}}{6}\cdot \cos(\angle AEF)$ $\arcsin\frac{\sqrt{34}}{4}$

$$S = \frac{65\cdot 25\sqrt{34}}{36}\cdot\sqrt{1-\frac{34}{26^2}} = \frac{65\cdot 25\sqrt{34}}{36}\cdot\frac{\sqrt{642}}{26}$$

642×34
2568
1926
21828

36×26
216
72
936

25×65

65×25
325
130
1625

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$BM \cdot AB = 169$~~

~~$2R \cdot (2R - 2r) = 169$~~

~~$4R^2 - 4Rr = 169$~~

~~$4 \cdot \frac{441}{64} \cdot r^2 - 4 \frac{21}{8} \cdot r^2 = 169$~~

~~$\frac{441 \cdot r^2}{16} - \frac{21}{2} \cdot r^2 = 169$~~

~~$441r^2 - 168r^2 = 169 \cdot 16$~~

$273r^2 = 169 \cdot 16$

$r^2 = \frac{13 \cdot 13 \cdot 4^2}{273} = \cancel{\frac{4 \cdot 13}{91 \cdot 3}}$

~~$.169$~~

$$\begin{array}{r} 441 \\ -168 \\ \hline 273 \end{array}$$

$\frac{DB}{BC} = \frac{BO_2}{AB}$

$BO_2 = 2R - r$

$\frac{17}{25} = \frac{2R - r}{2R}$

~~$34R = 16R - 8r$~~

$34R = 50R - 25r$

$16R = 25r$

$R = \frac{25}{16} \cdot r$

5

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 8 \\ \hline 136 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ \times\ 5 \\ \hline 85 \end{array}$$

~~17~~

$O_2A^2 + O_2D^2 = .$

$289 + r^2 = O_2B^2$

$289 + r^2 = 4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2}$

$4R^2 - 4Rr - 289 = 0$

$4 \cdot \frac{25^2}{16^2} \cdot r^2 - 4 \cdot \frac{25}{16} \cdot r^2 - 289 = 0$

$\frac{25^2}{64} \cdot r^2 - \frac{25}{4} \cdot r^2 - 289 = 0$

$25^2 \cdot r^2 - 25 \cdot 16 \cdot r^2 = 289 \cdot 64$

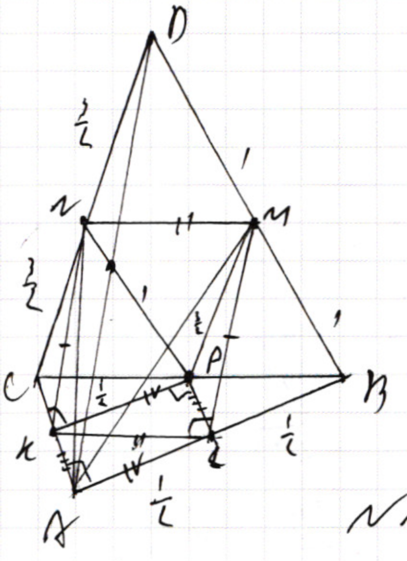
$25r^2 \cdot (25 - 16) = 289 \cdot 64$

$25 \cdot 9 \cdot r^2 = 289 \cdot 64$

$r^2 = \frac{289 \cdot 64}{9 \cdot 25}$; $r = \frac{17 \cdot 8}{3 \cdot 5} =$ //

$R = \frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{16}_{2}} \cdot \frac{\cancel{136}^{17}}{\cancel{15}_{3}} = \frac{85}{6} \neq \frac{136}{15}$

7.



AB = 1

BD = 2

CD = 3

~~Т.к. ∠KAM + ∠KLM = ∠NKL + ∠NML = 180°~~

$KP = \frac{1}{2}$

$NP = 1$; $MP = \frac{3}{2}$

NMKL – параллелограмм, т.к. NM ∥ KL; ~~на одном~~ KN ∥ ML, т.к. его точки ~~вписаны~~ лежат на одной сфере, то NMKL – вписанный четырёхугольник ⇒ NMKL – прямоуг.

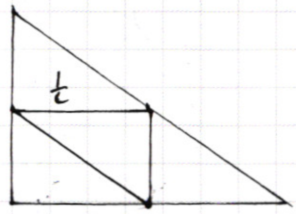
Аналогично AKPL – прямоуг. BC = 2KL ⇒ ∠A = 90°

$KL = \sqrt{PL^2 + KP^2}$

$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2}$; $4PL^2 + 4KP^2 = AB^2 + AC^2$

~~4P~~

~~BC = 2KL~~

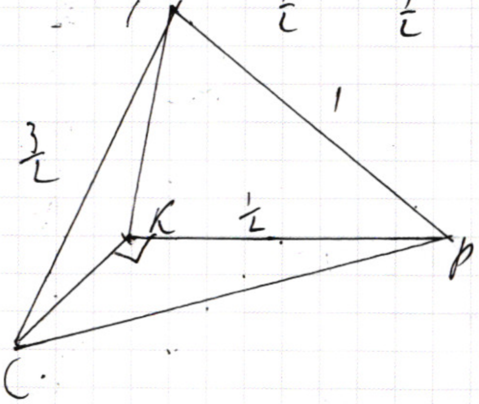


~~$\frac{1}{4} = 1 + \frac{9}{4} - 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot \cos\angle CNP$~~

~~$0 = 1 + 2 - 3 \cdot \cos\angle CNP$~~

~~cos~~ ~~$\cos\angle CNP = 1$~~

~~∠C~~



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$ $\cos(2\alpha+2\beta)$ $\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt5}$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases} +$$

$$\sin 2\alpha(\cos 2\beta + \cos 4\beta + 1) + \cos 2\alpha(\sin 2\beta + \sin 4\beta) = -\frac{4+\sqrt5}{5}$$

$$2\sin 2\alpha \cos 3\beta \cos\beta + 2\cos 2\alpha \sin 3\beta \cos\beta = -\frac{4+\sqrt5}{5}$$

$$2\cos\beta(\sin 2\alpha \cos 3\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 3\beta) = -\frac{4+\sqrt5}{5}$$

$$2\cos\beta \sin(2\alpha+3\beta) = -\frac{4+\sqrt5}{5}$$

~~$\sin(2\alpha+2\beta)+\sin(2\alpha$~~

$$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot \cos 2\beta + \frac{2}{\sqrt5}\cdot \sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$-\cos 2\beta + 2\sin 2\beta + \sqrt5 \cdot \sin 2\alpha = \cancel{-\frac{4\sqrt5}{5}} \cdot \sin \ -\frac{4\sqrt5}{5}$$

$$-1+2\sin^2\beta + 4\sin\beta\cos\beta + \sqrt5 \cdot \sin 2\alpha = -\frac{4\sqrt5}{5}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \frac{4}{\sqrt5}\sin(2\alpha+2\beta)$$

$\sin(2\alpha+$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$-\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2\cdot 4\cdot\sqrt5}{5\cdot 2}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5}$$

$$2\beta = \pm\arccos\frac{2\sqrt5}{5} + 2\pi k$$

~~$\beta = \pm\frac{\arccos\frac{2\sqrt5}{5}}{2} + \pi k$~~

2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

Ограничения.

~~(1)~~ $x-2y\geq 0$

$xy-x-2y+2=x^2-4xy+4y^2$, т.к. $x-2y\geq 0$, то уравнение будет равносильным.

~~$x^2-5xy+4y^2-x-2y-2=0$~~

~~$\begin{cases} x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0 \\ x^2-4x+9(y^2-2y)=12 \end{cases}$~~

$(x-2)^2+(3y-1)^2=1$~~8+2a+~~

$\frac{1}{144}+\frac{1}{25}\ \nabla\ \frac{1}{169}$

$x^2-5xy+4y^2$ ~~$+x+2y$~~ $-2=0$

~~25+144~~

~~$x-2y=4$~~ ~~x^2+9y^2~~ $-4x-18y=12$

$5^2+13^2+13^2\cdot 12^2 \vee 12^2\cdot 25^2$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=$ ~~12+4+23~~

$13^2(5^2+12^2)$

$x-2y=\sqrt{y(x-2)-(x-2)}$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ \text{~~$(x-2)^2+(3y-3)^2$~~}=12 \end{cases}$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2-4+(3y-3)^2-9=12 \end{cases}$

$(x-2)-2(y-1)=$
$=x-2-2y+2=x-2y$

$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$

$\Downarrow$

$\begin{cases} x-2=a \\ y-1=b \end{cases}$ $\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1)\ a^2-5ab+4b^2=0 \\ (2)\ a^2+9b^2-25=0 \end{cases}$

(1) $a^2-5ab+4b^2=0 \mid :b^2\neq 0$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2-5\cdot\left(\frac{a}{b}\right)+4=0$

$\frac{a}{b}=t$ $\quad t^2-5t+4=0$ $\quad D=25-16=9$

$t=\frac{5\pm 3}{2}=4;1$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~sin(2α+~~ 1) ~~$\beta = \frac{\arccos\frac{2\sqrt5}{5}}{2}$~~. $2\beta = \arccos\frac{2\sqrt5}{5} + 2\pi k$

$\sin(2\alpha + \arccos\frac{2\sqrt5}{5}) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt5}{5} + \sqrt{1-\frac{4}{5}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt5} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad |\cdot\sqrt5$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha} + \cos^2\alpha + \cancel{\sin^2\alpha} + 4\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$2\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha$

~~$1.1\ \cos\neq 0$~~ $\quad \cos\alpha \neq 0$ $\quad$ ~~cos~~

~~$2\cos\alpha + 4\sin\alpha = 0$~~

$\cos\alpha + 2\sin\alpha = 0 \quad |:\cos\alpha \neq 0$

~~2sin~~ $2\,tg\alpha + 1 = 0$

$tg\alpha = -\frac{1}{\sqrt2}$

2) $2\beta = -\arccos\frac{2\sqrt5}{5}$

т.к. функция 2β не существует, то и функция tgα не будет существовать => всего 3 знач tgα

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} - \frac{1}{\sqrt5} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha + 1 = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha - \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha + \sin^2\alpha + \cancel{\cos^2\alpha} = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$ $\quad 4\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha = 0$

$\sin\alpha = 0 \quad 2\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \quad |:\cos\neq 0$

$\Downarrow$

$tg\alpha = 0 \quad tg\alpha + 2 = 0$

$tg\alpha = -2$

Ответ: $-2; -\frac{1}{\sqrt2}; 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1) $\frac{a}{b} = 4$

$\begin{array}{r}34\\-13\\\hline 21\end{array}$

2) $\frac{a}{b} = 1$

~~$a-b \geqslant 0$~~

~~$a-b \geqslant 0$~~

~~$2b$~~

$a = 4b$

$x-2 = 4y-4$

$x = 2y - 2$

$x = 2(y-1)$

$a = b$

$x-2 = y-1$

$x = y+1$

1) $\cancel{2(y-1)}\cdot(2y-2-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

$(2y-4)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

$\cancel{4y^2+}\ 4y^2 - 16y + 16 + 9y^2 - 18y + 9 = 25$

$13y^2 - 34y = 0$

$\boxed{\begin{matrix}y=0\\x=-2\end{matrix}}$

$-2-0 \geqslant 0$

не уд.

$13y = 34$

$y = \frac{34}{13}$

~~$x = \frac{34}{13}\cdot 2$~~

$x = 2\left(\frac{34}{13}-1\right)$

$x = 2\cdot\frac{34-13}{13}$

$x = \frac{21\cdot 2}{13} = \frac{42}{13}$

$x - 2y \geqslant 0$

$-2 - 0 \geqslant 0$

$\frac{42}{13} - \frac{68}{13} \geqslant 0$

не уд.

2) $(y+1-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

$(y-1)^2 + 9(y-1)^2 = 25$

$\cancel{1\cdot 9y}\ (y-1)^2\cdot 10 = 25$

$2\cdot(y-1)^2 = 5$

*

$(y-1)^2 = \frac{5}{2}$

$y-1 = +\sqrt{\frac{5}{2}}$

$y = \sqrt{\frac{5}{2}} + 1$

$x = \sqrt{\frac{5}{2}} + 2$

$y-1 = -\sqrt{\frac{5}{2}}$

$y = -\sqrt{\frac{5}{2}} + 1$

~~y~~ $x = -\sqrt{\frac{5}{2}} + 2$

$\sqrt{\frac{5}{2}} + 2 - 2\sqrt{\frac{5}{2}} - 2 \geqslant 0$

не уд.

$-\sqrt{\frac{5}{2}} + 4 + 2\sqrt{\frac{5}{2}} - 2 \geqslant 0$

$\sqrt{\frac{5}{2}} \geqslant 0$

Ответ: $\left(-\sqrt{\frac{5}{2}}+2;\ -\sqrt{\frac{5}{2}}+1\right)$

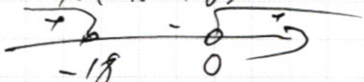
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

~~$x^2+18 \geq 0$~~ $x^2+18x > 0$

$x^2-18x = 12^{\log_{12}a}$

$x(x+18) > 0$



$5^{\log_{12}a} + 12^{\log_{12}a} - 13^{\log_{12}a} \geq 0$

$x^2+18x + 5^{\log_{12}(x^2+18x)} - |x^2+18x|^{\log_{12}13} \geq 0$

$x^2+18x = a$ $\quad a + 5^{\log_{12}a} - |a|^{\log_{12}13} \geq 0$

$$\begin{cases} a > 0 \\ a + 5^{\log_{12}a} - a^{\log_{12}13} \geq 0 \end{cases}$$

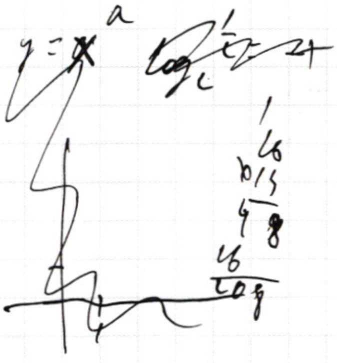
$5^{\log_{12}a} =$ ~~$\log_{12}5 \cdot \log_{12}a = \log_{12}a^{\log_{12}5}$~~

$a^1 + a^{\log_{12}5} - a^{\log_{12}13} \geq 0$

~~$a + \log_{12}$~~ $a^{\log_{12}12} + a^{\log_{12}5} - a^{\log_{12}13} \geq 0$

$a^{\log_{12}12} + a^{\log_{12}5} \geq a^{\log_{12}13}$

~~$a + a^{\log_{12}5} \geq a^{\log_{12}13}$~~

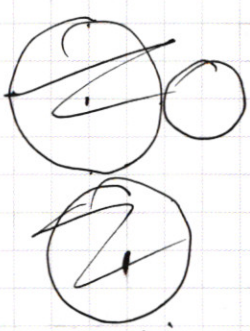


$12^{\log_{12}a} + 5^{\log_{12}a} - 13^{\log_{12}a} \geq 0$

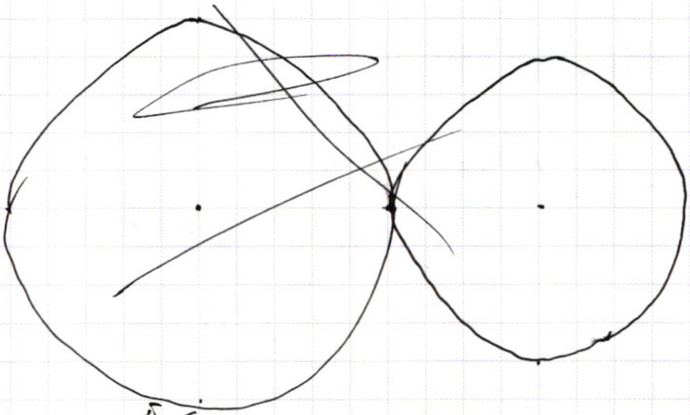
$\frac{1}{12} + \frac{1}{5} \vee \frac{1}{13}$

$\frac{5+12}{60} \vee \frac{1}{13}$

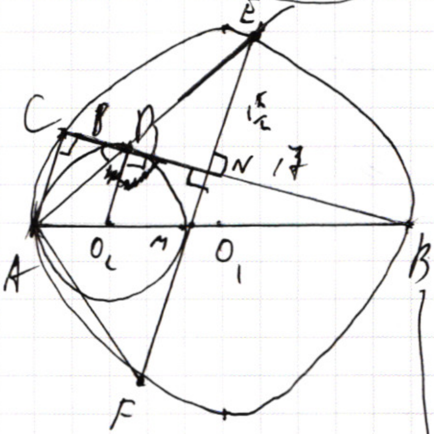
$\frac{16}{60} \vee \frac{1}{13}$ $\quad \frac{108}{\dots} \vee 60$



$$\begin{array}{r} 4 \\ 18 \\ \times 16 \\ \hline 108 \\ 18 \\ \hline 288 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 441 \\ -288 \\ \hline 153 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21 \\ \times 13 \\ \hline 63 \\ 21 \\ \hline 273 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 21 \\ \times 21 \\ \hline 21 \\ 42 \\ \hline 441 \end{array}$$



$\boxed{B[illegible] = 2R - 2r}$

$CD = 8;\ BD = 17$

$\cancel{BC}\ BD^2 = BM \cdot AB$

$\cancel{CA}\ 17^2 = BM \cdot AB$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$\Delta BDO_2 \sim \Delta BCA$ (по 3-м углам)

$\frac{DB}{BC} = \frac{BO_2}{AB}$; $\frac{DB}{BC} = \cancel{\frac{R+r}{R}} = \frac{2(R-r)}{2R}$

~~$\frac{DB}{BC} = \frac{R-r}{R}$~~

~~$13R = 21R - 21r$~~

$8R = 21r$; $R = \frac{21}{8} \cdot r$

$DB^2 + O_2D^2 = O_2B^2$

~~$169 + r^2 = 4R^2 - 8Rr + 4r^2$~~

~~$4R^2 - 8Rr + 3r^2 - 169 = 0$~~

~~$4 \cdot \frac{441}{64} \cdot r^2 - 8\frac{21}{8} \cdot r^2 + 3r^2 - 169 = 0$~~

~~$\frac{441}{16} \cdot r^2 - 21r^2 + 3r^2 - 169 = 0$~~

~~$441r^2 - 16 \cdot 18r^2 = 169$~~

~~$441r^2 - 288r^2 = 169$~~

~~$r^2 = \frac{169}{153}$~~

~~$r^2 = \frac{13}{\sqrt{153}}$~~