МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство
$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$
выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{N1}$

$$-\frac{8}{17} = \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta =$$

$$= 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta\ ;\quad \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}\ ;\quad 2\beta = \pm\arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi k,\quad k\in Z$$

Пусть $\arccos\frac{4}{\sqrt{17}} = \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} = x$, тогда $\beta = \pm\frac{x}{2}+\pi k$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}\qquad \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi n \\ 2\alpha+2\beta = \pi-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi n \end{array}\right.\quad n\in Z\quad \left[\begin{array}{l} \alpha+\beta = -\frac{x}{2}+\pi n \\ \alpha+\beta = \frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}+\pi n \end{array}\right.$$

подставляя $\beta = \pm\frac{x}{2}+\pi k$, получим $\left[\begin{array}{l} \alpha = \pi(n-k) \\ \alpha = -x+\pi(n-k) \\ \alpha = \frac{\pi}{2}+\pi(n-k) \\ \alpha = \frac{\pi}{2}+x+\pi(n-k) \end{array}\right.$ при условии, что $tg\,\alpha$ определён, получаем след. знач.

$$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = 0 \\ tg\,\alpha = tg(-x) \\ tg\,\alpha = tg\left(\frac{\pi}{2}+x\right) \end{array}\right.\qquad \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = 0 \\ tg\,\alpha = -tg\,x \\ tg\,\alpha = -ctg\,x \end{array}\right.$$

Вычислим значения $tg\,x$, $ctg\,x$: $x\in\left(0;\ \frac{\pi}{2}\right)$, значит можем применить следующие формулы:

$$tg\,x = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 x}-1} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2}-1} = \frac{1}{4}$$

$$ctg\,x = \sqrt{\frac{1}{\sin^2 x}-1} = \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2}-1} = 4$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = 0 \\ tg\,\alpha = -\frac{1}{4} \\ tg\,\alpha = -4 \end{array}\right.$$

Ответ: $0;\ -\frac{1}{4};\ -4$

$\boxed{N2}$

Сделаем замену $x-1=u$, $y-\frac{2}{3}=v$ тогда система преобразуется в

$$\begin{cases} 3v-2u=\sqrt{3uv} & (1) \\ u^2+v^2=\frac{25}{9} & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим равенство (1):

$$3v-2u=\sqrt{3uv} \Leftrightarrow \begin{cases} (3v-2u)^2=9v^2-12vu+4u^2=3uv \\ 3v-2u\geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 9v^2-15vu+4u^2=0 \\ 3v-2u\geq 0 \end{cases}$$

Решим ур-е $9v^2-15vu+4u^2=0$ как квадратное относительно v

$$v=\frac{15u\pm 9u}{18} \qquad v=\frac{4}{3}u \quad \text{или} \quad v=\frac{1}{3}u$$ подставим это в (2)

1) $v=\frac{4}{3}u$ $\quad u^2+\frac{16}{9}u^2=\frac{25}{9}$; $\quad u^2=1$; $\quad u=\pm 1$

если $u=-1$, то $v=-\frac{4}{3}$, но тогда $3v-2u\geq 0$ не выполняется $\varnothing$

если $u=1$, то $v=\frac{4}{3}$, такие значения u, v подходят

$x=2$; $y=2$

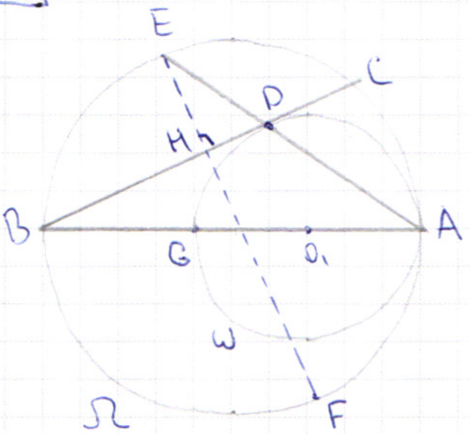
2) $v=\frac{1}{3}u$ $\quad u^2+\frac{1}{9}u^2=\frac{25}{9}$; $\quad u^2=\frac{5}{2}$; $\quad u=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$3v-2u=3v-6v=-3v\geq 0 \Rightarrow v\leq 0$, значит подходит только вариант $u=-\sqrt{\frac{5}{2}}$; $\quad v=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}$ $\quad x=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$, $y=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}$

Ответ: $(2;2)$ $\quad \left(1-\sqrt{\frac{5}{2}};\ \frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



1) Пусть O_1-центр. окр ω, тогда прямоуг. треуг. ΔBDO_1, ΔBCA подобны по 2-м углам ($\angle ABC$ - их общий острый угол)

$\frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA}$; $\frac{13/2}{9} = \frac{2R-r}{2R}$

$13R = 18R - 9r$; $9r = 5R$; $r = \frac{5}{9}R$

где r, R - радиусы окр. ω и Ω соотв.

2) Пусть $G = AB \cap \omega$, тогда $BD^2 = BG \cdot BA$

$\frac{169}{4} = (2R-2r)\cdot 2R = 4R(R-r) = 4R\cdot\frac{4}{9}R$; $13^2 = \left(\frac{8}{3}R\right)^2$; $\frac{8}{3}R = 13$

$R = \frac{39}{8}$; $r = \frac{65}{24}$

3) Прямоуг. ΔADG, ΔAEB подобны по 2-м углам ($\angle BAE$ - их общий острый угол) $\frac{AD}{AE} = \frac{AG}{AB} = \frac{2r}{2R} = \frac{r}{R} = \frac{5}{9}$; $AD = \frac{5}{9}AE$, пусть $AE = x$, тогда $AD = \frac{5}{9}x$; $DE = \frac{4}{9}x$

4) $BD\cdot DC = AD\cdot DE$; $\frac{13}{2}\cdot\frac{5}{2} = \frac{5}{9}x\cdot\frac{4}{9}x$; $\frac{20}{81}x^2 = \frac{65}{4}$; $x^2 = \frac{65\cdot 81}{80}$; $x = \frac{9\sqrt{13}}{4}$

5) По теор. синусов для ΔAFE: $\frac{AE}{2\sin\angle AFE} = R$; $\sin\angle AFE = \frac{AE}{2R} = \frac{x}{2R} = \frac{9\sqrt{13}}{8\cdot\frac{39}{8}} = \frac{9\sqrt{13}}{39}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{9\sqrt{13}}{39}$

6) $\angle AFE + \angle BAE = 90^\circ$; $\angle AFE = 90^\circ - \angle BAE = \angle AGD = \angle ADC$, значит четырёхуг. $AFHD$ - впис. где $H = EF \cap BC \Rightarrow \angle FAE = \angle FHD = 90^\circ$

$FE = AE\cdot\frac{1}{\sin\angle AFE} = \frac{9\sqrt{13}}{4}\cdot\left(\frac{9\sqrt{13}}{39}\right)^{-1} = \frac{39}{4}$. По теор. Пифагора:

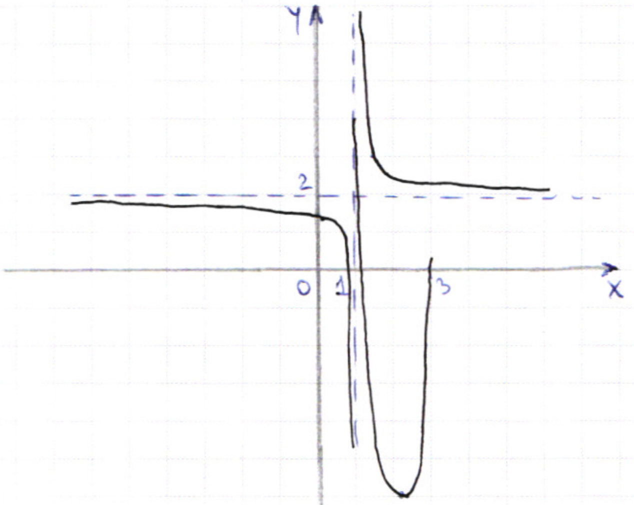
$AF^2 = FE^2 - AE^2 = \left(\frac{39}{4}\right)^2 - \left(\frac{9\sqrt{13}}{4}\right)^2 = \frac{1521}{16} - \frac{1053}{16} = \frac{468}{16} = \frac{117}{4}$; $AF = \frac{\sqrt{117}}{2}$

$S(AEF) = \frac{1}{2}AF\cdot AE = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{117}}{2}\cdot\frac{9\sqrt{13}}{4} = \frac{9\cdot 39}{16} = \frac{351}{16}$. Ответ: $R = \frac{39}{8}$; $r = \frac{65}{24}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{9\sqrt{13}}{39}$; $S(AEF) = \frac{351}{16}$

№6

$$2+\frac{1}{2x-2}=\frac{4x-3}{2x-2}\geq ax+b\geq 8x^2-34x+30$$

Решим неравенство графическим методом:



$2+\frac{1}{2x-2}$ – гипербола с асимптотами $x=1$, $y=2$

$8x^2-34x+30$ – парабола ветвями вверх с вершиной в $\left(\frac{17}{8};-\frac{49}{8}\right)$ и проходящая через точки $(1;4)$, $(3;0)$

пусть прямая $ax+b$ проходит через точки $A(1;y_1)$ $B(3;y_2)$

Чтобы на ~~отрезке~~ интервале $(1;3]$ прямая была выше параболы необходимо чтобы $y_2\geq 0$. Если $y_2=0$, то прямая $ax+b$ должна лежать не выше касательной из B к $2+\frac{1}{2x-2}$, эта касательная имеет вид $y=-2x+6$, поскольку $2+\frac{1}{2x-2}=-2x+6$ имеет только одно решение $x=\frac{3}{2}$, эта касательная проходит через точку $(1;4)$, значит прямая $ax+b$ не может лежать ниже неё иначе она пересечёт $8x^2-34x+30$ в точке $1<x_0<3$ и тогда на интервале $(1;x_0)$ парабола будет выше прямой. Значит при $y_2=0$ прямая $y=ax+b$ может быть только такой: $y=-2x+6$

Если $y_2>0$, то касательная из B к $2+\frac{1}{2x-2}$ касается в точке $x_0>\frac{3}{2}$, значит в точке $\frac{3}{2}$ она принимает значение меньшее $2+\frac{1}{2\cdot\frac{3}{2}-2}=$

$=3$, а значит на интервале $\left(1;\frac{3}{2}\right)$ лежит ниже прямой $y=-2x+6$ а значит ~~пересекает~~ в точке $x=1$ принимает значение меньшее 4 т.е. пересекает параболу в точке $1<x_0<3$, а значит парабола на интервале $(1;x_0)$ лежит выше касательной. Таким образом, прямая

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y=ax+b$ не может лежать выше касательной, иначе пересечёт $y=2+\frac{1}{2x-2}$ в двух точках, и на интервале между ними нер-во выполняться не будет. Также прямая $y=ax+b$ не может совпадать или лежать ниже касательной, тогда она пересечёт параболу $y=8x^2-34x+30$ в точке $1<x_0<3$ и тогда на интервале $(1;x_0)$ нер-во выполняться не будет. Значит при $y_2>0$ решений нет.

Ответ: $(-2;6)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№5}$ $f(ab) = f(a)\cdot f(b)$ $\quad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $\quad$ p-простое

$\#(x;y)$ $\quad 3\le x\le 27$, $3\le y\le 27$: $f(x/y) < 0$

$f(2)=0;\ f(3)=0;\ f(5)=1;\ f(7)=1$

$f(11)=2;\ f(13)=3;\ f(17)=4;$

$x=3$ $\quad f\left(\frac{3}{4}\right) = f(3)+f\left(\frac{1}{4}\right)$

$4-\frac{17}{2}+\frac{15}{4}$

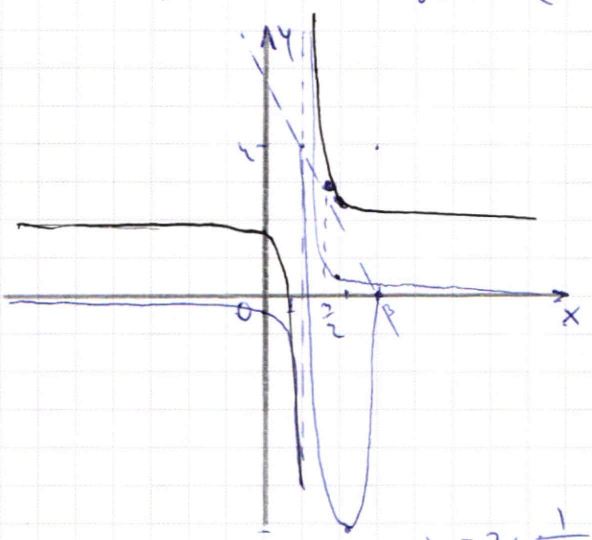
$f\left(\frac{1}{3}\right) =$ $\quad x^2-\frac{17}{4}x+\frac{15}{4}$ $\quad 17^2$ $\quad 72-102+30$ $\quad \frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}$ $\quad x_0 = \frac{34}{16} = 2\frac{1}{8}$

$\boxed{№6}$

$2+\frac{1}{2x-2} \ge ax+b \ge 8\left(x^2-\frac{17}{4}x+\frac{15}{4}\right) = 8\left(\left(x-\frac{17}{8}\right)^2\right.$ $\quad 8x^2-34x+30$

$x=\frac{17}{8}$: $\quad \frac{17^2}{8}-\frac{34\cdot 17}{8_4}+30$ $\quad -\frac{49}{8}$

$\frac{17^2}{8}-\frac{17^2}{4}+30 = 30-\frac{17^2}{8} = \frac{240-289}{8}$



$x=1$: $\quad 8-34+30=4$ $\quad \frac{6-3}{3-2}=3$

$x=3$: $\quad 72-102+30=0$

$kx+b=y$: $\begin{cases} k+b=4 \\ 3k+b=0 \end{cases}$ $-2k=4;\ k=-2$, $b=6$

$\begin{cases} y=-2x+6 \\ y=2+\frac{1}{2x-2} \end{cases}$ $\quad 6-2x = 2+\frac{1}{2x-2} = \frac{4x-3}{2x-2}$

$0 = \cancel{4x}-4+4x^2-\cancel{4x}-12x+12$

$4x^2-12x+8=0$

$x^2-3x+4=0$

$x=-1 \quad x=-4$

$y = 2+\frac{1}{2x-2} = (2x-2)^{-1}$

$y' = -\frac{1}{\ }$ $\quad \boxed{№7}$

$(6-2x)(2x-2) = 4x-3$

$12x-4x^2-12+4x = 4x-3$

$4x^2-12x+9=0$

$(2x-3)^2=0$

$x=\frac{3}{2}$

$f(1)\ge 4$ $\quad$ $6-2$ $\quad 4a+2b\ge 4$

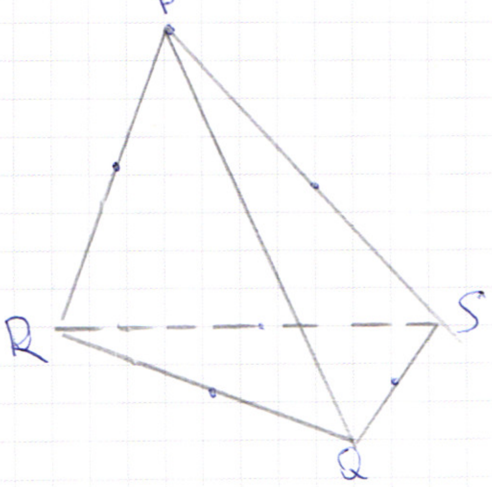
$f(3)\ge 0$

$f\left(\frac{3}{2}\right)\le 3$

$\begin{cases} a+b\ge 4 \\ 3a+b\ge 0 \\ \frac{3}{2}a+b\le 3 \ |\cdot 2 \end{cases}$

$3a+2b\le 6$

$4a+2b\ge 4$



$3a+b \ge 3a+4-a$

если $\quad a<-2$:

$b>6$ $\quad \cancel{3a+6>3a+6}$

$\cancel{-6+6>3a-6}$ $\quad < \frac{3}{2}a+b\le 3$

$\frac{3}{2}a+6_b$ $\quad \frac{3}{2}a\le -3$

$3a+b>0;\ b>3a$ $\quad a\le -2$

$3a+2b<6$ $\quad (1)\ a+b<4$ $\quad a\ge 4-6$

$3a<6-2b$

$-\frac{1}{3}b < a < 2-\frac{2}{3}b$ $\quad a>-\frac{1}{3}b$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1 $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$; $2\overbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}^{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

$\operatorname{tg}\alpha - ?$ ≥ 3 знач

$+\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = +\frac{8}{17}$

$\boxed{\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\sin\beta$

$\sin(\overbrace{\alpha+\beta}^{x}) + \sin(\overbrace{\alpha-\beta}^{y}) = 2\sin\alpha\cdot\cos\beta$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cdot\cos\frac{x-y}{2}$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = \arcsin -\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n \\ 2\alpha+2\beta = \pi - \arcsin -\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n \end{array}\right.$

$2\beta = \pm\overbrace{\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}}^{x} + 2\pi k$

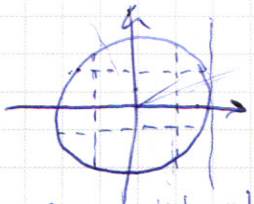
$2\beta = \pm x + 2\pi k$; $\beta = \pm\frac{x}{2} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

$\arcsin(x) = \arccos(\sqrt{1-x^2})$

$x = \sin(\arccos(\sqrt{1-x^2})) = x$

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = -\overbrace{\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}}^{x} + 2\pi n \\ 2\alpha+2\beta = \pi + \overbrace{\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}}^{x} + 2\pi n \end{array}\right.$



$\left\{\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} \alpha+\beta = -\frac{x}{2} + \pi n \\ \alpha+\beta = \pi/2 + \frac{x}{2} + \pi n \end{array}\right. \\ \beta = \pm\frac{x}{2} + \pi k \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \alpha = \pi(n-k) \\ \alpha = -x + \pi(n-k) \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi(n-k) \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + x + \pi(n-k) \end{array}\right.$

$\operatorname{tg}\alpha = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} -x = -\operatorname{tg} x = -\operatorname{tg}(\arccos\frac{4}{\sqrt{17}}) = \frac{-1}{4}$

не опред.

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x = -\operatorname{ctg}(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}) = -4$

$\operatorname{tg}\alpha - ?$ $\cos\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \mid : \cos^2\alpha$; $\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$ $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha} - 1} = \frac{1}{4}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \mid : \sin^2\alpha$; $\operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1$ $\operatorname{ctg}\alpha = \sqrt{\frac{1}{\sin^2\alpha} - 1} =$

$3x^2 - 6x + 3$

$x + \frac{3}{2}y - \frac{3}{2}xy + 1 = (x+1)(\frac{3}{2}y - 1)$ $(1-x)(1+\frac{3}{2}y)$

N2 $\left\{\begin{array}{l} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x + 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{array}\right.$

$(\sqrt{3}x)^2 - 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}x + (\sqrt{3})^2 = (\sqrt{3}x - \sqrt{3})^2 \geq 0$

$(\sqrt{3}y)^2 - 2\cdot\sqrt{3}y\cdot\frac{2}{\sqrt{3}} + (\frac{2}{\sqrt{3}})^2 = (\sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}})^2 \geq 0$

$(\sqrt{3}x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}y - \frac{2}{\sqrt{3}})^2 = 8\frac{1}{3} = \frac{25}{3}$ $3y^2 - 4y + \frac{4}{3}$

$3(x-1)^2 + 3(y-\frac{2}{3})^2 = \frac{25}{3}$

$\boxed{(x-1)^2 + (y-\frac{2}{3})^2 = (\frac{5}{3})^2}$

$3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \iff \left\{\begin{array}{l} 9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2 \\ 3y - 2x \geq 0 \ ; \ y \geq \frac{2}{3}x \end{array}\right.$

$9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x + 3y = 2$

$(3y-2x)^2 + 2x + 3y - 3xy - 2 = 0$

$2x + 3y - 3xy - 2 = 2(x-1)(1-\frac{3}{2}y)$

$x - 1 = u;\ y - \frac{2}{3} = v$

$3y - 2x = 3v - 2u$

$2(x-1)(\frac{3}{2}y - 1) = (x-1)(3y-2)$

$= u\cdot 3v$

$\left\{\begin{array}{l} 3v - 2u = \sqrt{3uv} \\ u^2 + v^2 = (\frac{5}{3})^2 \end{array}\right.$ $\left\{\begin{array}{l} 3v - 2u = \sqrt{3uv} \\ u^2 + v^2 = (\frac{5}{3})^2 \end{array}\right.$

N2 $x-1=u$ $\quad y-\frac{2}{3}=v$ $\quad 3x-3-$ $\quad 3y-2+2-2x$ $\quad u=3v;$ $\quad 3v-6v\geq 0$, $-3v\geq 0$, $v\leq 0$ $\quad 3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$

$$\begin{cases} 3v-2u=\sqrt{3uv} \\ u^2+v^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} (3v-2u)^2=9v^2-12vu+4u^2=3vu \\ 3v-2u\geq 0 \\ u^2+v^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2 \end{cases}$$

$36\cdot 4=144$

$u^2+v^2=x^2-2x+1+y^2-\frac{4}{3}y+\frac{4}{9}=\frac{25}{9}$

$x^2-2x+y^2-\frac{4}{3}y-\frac{12}{9}\,|\cdot 3$

$15 \cdot 15 = 75 + 15 = 225$

$9v^2-15vu+4u^2=0$ $\qquad 3xy-2x-\cancel{3y}+\cancel{2}$

$225-144=81$

$D=(15u)^2-4\cdot 4u^2\cdot 9=225u^2-144u^2=81u^2$

$v=\dfrac{15u\pm 9u}{18}$ $\qquad \left[\begin{array}{l} v=\frac{24}{18}u=\frac{4}{3}u \\ v=\frac{6}{18}u=\frac{1}{3}u \end{array}\right.$

$39\cdot 9=$
$=390-39=351$

(1) $v=\frac{4}{3}u$ $\quad u^2+\frac{16}{9}u^2=\frac{25}{9};$ $\quad \frac{25u^2}{9}=\frac{25}{9}$

$u^2=\pm 1$ $\quad u=\left[\begin{array}{l} u=1 \\ v=\frac{4}{3} \end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} u=-1 \\ v=-\frac{4}{3} \end{array}\right.$

117^2: $117\cdot 13=351$, $+117$, 1521

$(2;2)$ $\qquad \varnothing$ н.к.

(2) $v=\frac{1}{3}u;$ $\quad u^2+\frac{1}{9}u^2=\frac{25}{9};$ $\quad 10u^2=25$

$u^2=\frac{5}{2};$ $\quad u=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$ $\quad \left[\begin{array}{l} u=\sqrt{\frac{5}{2}} \\ v=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$ или $\left[\begin{array}{l} u=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ v=-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}} \end{array}\right.$

$\frac{5}{8}\cdot\frac{39}{8}=\frac{65}{24}$

$\varnothing$ н.к. $\qquad x=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$, $y=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{5}{2}}$

N3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$ $\qquad$ $x^2+6x=t\geq 0$ - ОДЗ!!!

$3^{\log_4 t}+t-|t|^{\log_4 5}\geq 0$ $\qquad 3^{\log_4 t}=4^{\log_4 3\cdot\log_4 t}=t^{\log_4 3}$

$t^{\log_4 3}+t-|t|^{\log_4 5}\geq 0$ $\qquad t^{\log_4 3}+t\geq |t|^{\log_4 5}$

$\left(\frac{27}{4}\right)^2-\left(\frac{9\sqrt{13}}{4}\right)^2=\frac{27^2-81\cdot 13}{16}$

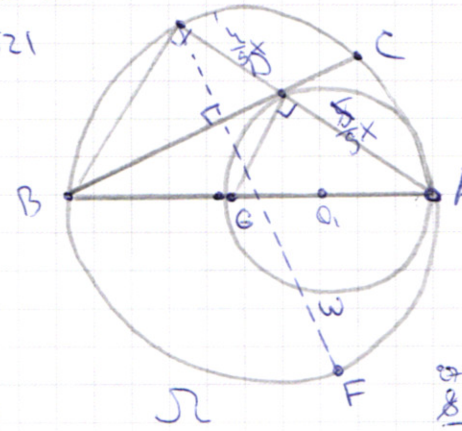
N4

$\cancel{\frac{3\cdot 5\sqrt{13}}{4}}\cdot\frac{39}{\cancel{5\sqrt{13}}}=\frac{39}{4}$ $\qquad R_\Omega=R,\ R_\omega=r$ -? $\ \angle AFE$-? $\ S(AEF)$-?

$(40-1)^2=1600-80+1$
$=1521$

$CD=\frac{5}{2};$ $\quad BD=\frac{13}{2}$

$27\cdot 27=189+54=729$



1) $BD^2=BG\cdot BA=(AB-AG)\cdot AB=$

$=\cancel{(2R_\Omega-2R_\omega)\cdot 2R}$

$\frac{169}{4}=(2R-2r)\cdot 2R=4R(R-r)$

$1521-1053=468$

$1521-1053=468$

234
117

2) $\triangle BDO_1\sim\triangle BCA$

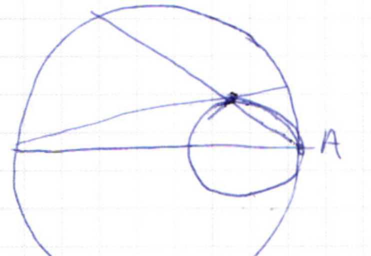
$\frac{BD}{BC}=\frac{BO_1}{BA};$ $\quad \frac{13/2}{9}=\frac{2R-r}{2R}$

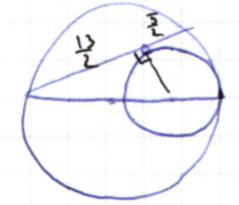
$81\cdot 13=243+81=1053$

$\frac{\cancel{81}\cdot 13}{4\cdot\cancel{39}}=\frac{27}{4}$ $\quad 13R=18R-9r;$ $\quad 9r=5R;$ $\quad r=\frac{5}{9}R$

$169=16R\cdot\frac{4}{9}R;$ $\quad 169=\frac{64}{9}R^2$

$13^2=\left(\frac{8}{3}R\right)^2;$ $\quad \frac{8}{3}R=13;$ $\quad \boxed{R=\frac{39}{8}}$





$\frac{AD}{AE}=\frac{AG}{AB}=\frac{2r}{2R}=\frac{r}{R}$ $\qquad r=\frac{9\sqrt{13}}{4}$

$AD=AE\cdot\frac{r}{R}=\frac{5}{9}AE$

$\frac{20}{81}x^2=\frac{65}{4};$ $\quad x^2=\frac{81\cdot 65}{80}$ $\quad x=\frac{9\sqrt{65}}{4\sqrt{5}}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)