МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

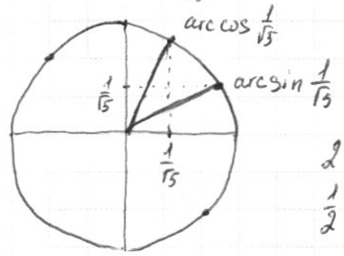
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = \arcsin -\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k \\ 2\alpha+2\beta = \pi - \arcsin -\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2\beta = \arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k \\ 2\beta = -\arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} - \arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k \\ 2\alpha = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5} + \arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k \\ 2\alpha = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} - \arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k \\ 2\alpha = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt5} + \arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k \\ \alpha = \frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt5} - \arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) + \pi k \\ \alpha = \frac{1}{2}\left(\pi - \left(\arccos\frac{1}{\sqrt5} - \arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right)\right) + \pi k \\ \alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k \end{array}\right.$



$2 < \sqrt5 < 3 \Leftrightarrow$

$\frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt5} < \frac{1}{3}$

$\arccos\frac{1}{\sqrt5} > \arcsin\frac{1}{\sqrt5}$

$\left[\begin{array}{ll} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) & (1) \\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt5} - \arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) & (2) \\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt5} + \arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) & (3) \\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\frac{3\pi}{4} & (4) \end{array}\right.$

(1) и (4): $\operatorname{tg}\alpha = -1$

(2) и (3): т.к. $\frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt5} - \arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) + \frac{1}{2}\left(\pi - \arccos\frac{1}{\sqrt5} + \arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) = \frac{\pi}{2}$, то значения $\operatorname{tg}\alpha$ в этих случаях взаимнообратны, и достаточно найти одно значение. Найдем в случае (2)

~~(2): Угол $\gamma = \arccos\frac{1}{\sqrt5}$ Угол $\gamma = \arccos\frac{1}{\sqrt5} - \arcsin\frac{1}{\sqrt5} > 0$, то и $\frac{1}{2}\gamma > 0$~~

(2): Т.к. $\frac{\pi}{2} > 0 < \arcsin\frac{1}{\sqrt5} < \arccos\frac{1}{\sqrt5} < \frac{\pi}{2}$, то

~~$\gamma = \arcsin$~~ $\gamma = \arccos\frac{1}{\sqrt5} - \arcsin\frac{1}{\sqrt5}$ лежит в первой четверти и

$\frac{1}{2}\gamma$ тоже лежит в первой четверти $\Rightarrow$ $tg\,\frac{1}{2}\gamma > 0$

Т.к. для любого $x \in (0; \frac{\pi}{2})$ $tg\,\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$, то

$tg\,\alpha = tg\,\frac{1}{2}(\arccos\frac{1}{\sqrt5} - \arcsin\frac{1}{\sqrt5}) =$

$= \sqrt{\frac{1-\cos(\arccos\frac{1}{\sqrt5} - \arcsin\frac{1}{\sqrt5})}{1+\cos(\arccos\frac{1}{\sqrt5} - \arcsin\frac{1}{\sqrt5})}} = \sqrt{\frac{1-(\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5})}{1+(\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5})}} =$

$= \sqrt{\frac{1-\frac{4}{5}}{1+\frac{4}{5}}} = \sqrt{\frac{5-4}{5+4}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3}$

Тогда в случае (3) $tg\,\alpha = 3$.

Ответ: $\{-1; \frac{1}{3}; 3\}$.

№5. $f(x)$ опр. на $A = \{x \mid x \in \mathbb{Q}, x > 0\}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$ для любых $a, b \in A$

$f(p) = [\frac{p}{4}]$, p – простое число.

1) $f(1\cdot a) = f(1) + f(a) \Rightarrow f(1) = 0$

2) Если $a\cdot b = 1$, то $f(a\cdot b) = f(a) + f(b) = 0 \Rightarrow f(a) = -f(b)$,

т.е. $f(a) = -f(\frac{1}{a})$

3) $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

4) для $z \in \mathbb{N}$, $2 \le z \le 25$ запишем $f(z)$:

$f(2) = 0$; $f(3) = 0$; $f(4) = f(2) + f(2) = 0$; $f(5) = 1$; $f(6) = f(2)\cdot f(3) = 0$;

$f(7) = 1$; $f(8) = 0$; $f(9) = 0$; $f(10) = 1$; $f(11) = 2$; $f(12) = 0$;

$f(13) = 3$; $f(14) = 1$; $f(15) = 1$; $f(16) = 0$; $f(17) = 4$; $f(18) = 0$;

$f(19) = 4$; $f(20) = 1$; $f(21) = 1$; $f(22) = 2$; $f(23) = 5$; $f(24) = 0$;

$f(25) = 2$.

Другими словами:

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(z)=0$, если $z \in \{2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 16; 18; 24\}$ – 10 эл.

$f(z)=1$, если $z \in \{5, 7, 10, 14, 15, 20, 21\}$ – 7 эл

$f(z)=2$, если $z \in \{11; 22; 25\}$ – 3 эл.

$f(z)=3$, если $z \in \{13\}$ – 1 эл.

$f(z)=4$, если $z \in \{17; 19\}$ – 2 эл.

$f(z)=5$, если $z \in \{23\}$. – 1 эл.

5) ~~$f(x)-f(y)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(y)$~~

~~· $f(x)=0$, тогда всего $10 \cdot 14 = 140$ пар~~

~~· $f(x)=1$, тогда всего $7 \cdot 7 = 49$ пар~~

~~· $f(x)=2$, тогда всего $3 \cdot 4 = 12$ пар~~

~~· $f(x)=3$, тогда всего $1 \cdot 3 = 3$ пары~~

~~· $f(x)=$~~

~~· $f($~~

5) $f(x)-f(y)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(y)$

· $f(x)=0$, тогда всего $10 \cdot 14 = 140$ пар

· $f(x)=1$, тогда всего $7 \cdot 7 = 49$ пар

· $f(x)=2$, тогда всего $3 \cdot 4 = 12$ пар

· $f(x)=3$, тогда всего $1 \cdot 3 = 3$ пары

· $f(x)=4$, тогда всего $2 \cdot 1 = 2$ пары

Итого: $140+49+12+3+2 = 189+17 = 206$ пар

Ответ: 206 пар

№3. $10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3 (10x - x^2)}$

$(10x - x^2) + |10x - x^2|^{\log_3 4} - (10x - x^2)^{\log_3 5} \geq 0$, $10x - x^2 > 0$

$t = 10x - x^2 > 0$

$t + |t|^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$ $|t| = t$, т.к. $t > 0$

$t + t^{\frac{\ln 4}{\ln 3}} - t^{\frac{\ln 5}{\ln 3}} \geq 0$

$z = t^{\frac{1}{\ln 3}} > 0$

$\cancel{z^{\ln 3} + t^{\ln}}$ $z^{\ln 3} + z^{\ln 4} - z^{\ln 5} \geq 0$ $z^{\ln 5} > 0$

$z^{\ln \frac{3}{5}} + z^{\ln \frac{4}{5}} - 1 \geq 0$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{\ln z} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\ln z} - 1 \geq 0$

$f(z) = \left(\frac{3}{5}\right)^{\ln z} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\ln z} - 1$ – монотонна, значит ур-ние $f(z) = 0$ имеет ед. корень

при $z = e^2$ $f(z) = \left(\frac{3}{5}\right)^{\ln e^2} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\ln e^2} - 1 = \frac{9+16}{25} - 1 = 0$

Т.к. $f(z)$ монотонно убывает, то неравенство верно при $\cancel{z \in (0; e^2]}$ $0 < z \leq e^2$

Обратная замена:

$0 < t^{\frac{1}{\ln 3}} \leq e^2 \Rightarrow 0 < t \leq e^{2\ln 3} \Rightarrow 0 < t \leq 9$

$0 < 10x - x^2 \leq 9$

1) $0 < 10x - x^2$

$x(x-10) < 0$

$0 < x < 10$

2) $10x - x^2 \leq 9$

$x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$(x-1)(x+9) \geq 0$

$\left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 9 \end{array}\right.$ $\cancel{\left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x > \end{array}\right.}$ $\cancel{\left[\begin{array}{l} x \leq -9 \\ x \geq -1 \end{array}\right.}$

~~$x \in (9; 10)$~~

Ответ: ~~$(0; 10)$~~ $x \in [0; 1] \cup [9; 10)$

Ответ: $[0; 1] \cup [9; 10)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№6. $\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$ $\quad x \in [\frac{1}{4};1]$

$f(x)=\frac{16x-16}{4x-5}$, $g(x)=-32x^2+36x-3$, $g'(x)=-64x+36$

$f(\frac{1}{4})=3$, $f(1)=0$, $g(\frac{1}{4})=4$, $g(1)=1$, $g'(\frac{1}{4})=20$, $g'(1)=-28$

Возьмем точки $(\frac{1}{4};4)$ и $(1;1)$ и построим прямую:

$$\begin{cases} 4=\frac{1}{4}k+b \\ 1=k+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3=-\frac{3}{4}k \\ 1=k+b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=-4 \\ b=5 \end{cases} \qquad y(x)=-4x+5$$

Точки перес. $f(x)$ и $y(x)$.

$$\frac{16x-16}{4x-5}=-4x+5 \Rightarrow 16x-16=-(4x-5)^2 \Rightarrow$$

$$16x-16=-16x^2+40x-25 \Rightarrow$$

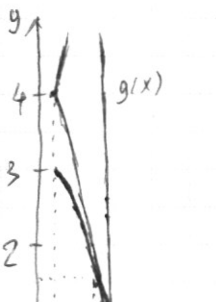
$$16x^2-24x+9=0 \Rightarrow (4x-3)^2=0 \Rightarrow 4x-3=0 \quad x=\frac{3}{4}$$

~~$4x+3=0$~~ $\quad x \ne \frac{5}{4}$

ед. точка. перес. - значит это точка касания.

~~Во~~ прямая $y(x)=-4x+5$ ~~проходит~~ удовлетворяет ур-нию $f(x) \le y(x) \le g(x)$ на $[\frac{1}{4};1]$, при этом достигаются оба равенства: и $f(x)=y(x)$ и $g(x)=y(x)$, значит $y(x)$ - ед. такая прямая. ~~и~~ ~~а=~~ Тогда $a=-4$, $b=5$

~~Ответ: (-4;5).~~



Ответ: $(-4;5)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x + |10x - x^2|^{\log_3 4} \geq x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 5}$

$t = 10x - x^2 > 0$ $\qquad a^b = e^{b\ln a}$

$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0 \qquad t^{\frac{1}{\ln 3}} = z$

$z^{\ln 3} + z^{\ln 4} - z^{\ln 5} \geq 0$

$\cancel{z^{\log_5 3} + z^{\log_5 4} \geq 1 \qquad z^{\log_5 3} + z^{\log_5 4} = 1}$ $\qquad z^{\log} \qquad x^{\ln\frac{3}{5}} \qquad \ln\frac{3}{5} < 0$

$\cancel{z\log_5 3 + z\log_5 4 = 0}$

$z^{\ln\frac{3}{5}} + z^{\ln\frac{4}{5}} \geq 1$

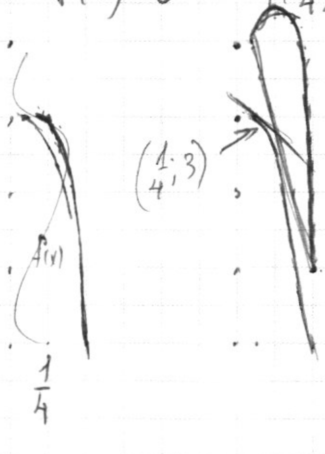
$\left(\frac{3}{5}\right)^{\ln z} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\ln z} \geq 1 \qquad \ln z = 2 \qquad z = e^2$

$+ \quad 1 \quad - \quad 9 \quad +$

$\frac{16x - 16}{4x - 5} = 4 + \frac{4}{4x - 5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$

$f(x) = 4 + \frac{4}{4x-5} \qquad g(x) = -32x^2 + 36x - 3 \qquad g'(x) = -64x + 36$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = 3 \qquad f(1) = 0 \qquad g\left(\frac{1}{4}\right) = -2 + 9 \cdot 3 = 4 \qquad g(1) = 1 \qquad g'\left(\frac{1}{4}\right) > 0 \qquad g'(1) < 0$



$\cancel{3 = \frac{k}{4} + b}$ $\quad 12 = k + 4b$

$1 = k + b \qquad 3 = -\frac{3}{4}k \qquad k = -4$

$4 = \frac{1}{4}k + b \qquad b = 5$

$y(x) = -4x + 5$

$f'(x) = \frac{-16}{(4x-5)^2} = -4 \qquad 4x - 5 = \pm 2$

$x = \frac{5}{4} \pm \frac{1}{2}$

$\frac{16x - 15}{4x - 5} = -4x + 5 \qquad x = \frac{5 \pm 2}{4}$

$x = \frac{3}{4}$

$16x - 16 = -(4x+5)^2$

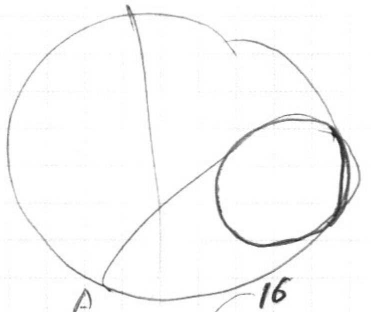
$16x - 16 = -16x^2 + 40x - 25$

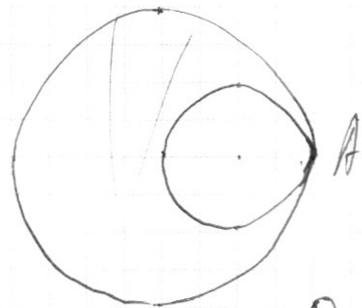
$16x^2 + 56x + 9 = 0 \qquad 28^2 - 4^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 = (28 - 24)(28 + 24) = 4 \cdot 52$

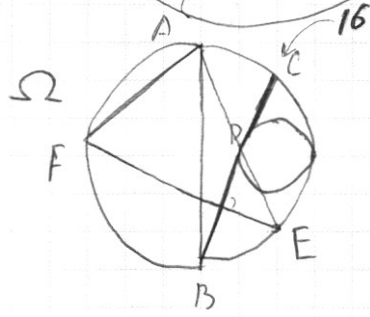
$\cancel{8x^2 + 28x + 5 = 0} \qquad \frac{D}{4} = 14^2 - 40 = 144$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)







$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

$BC = 16$

$f(x)$, $x \in \mathbb{Q}$, $x>0$

$f(p) = [p/4]$ – простое

$f(ab) = f(a) + f(b) \approx \log_n m$

$f(2)=0$, $f(3)=0$, $f(5)=1$, $f(7)=1$,

$f(11)=3$, $f(13)=3$

$f(1)=0$ $\quad f \;\; g(a) = \cancel{-f}\ \frac{1}{f(-a)}$

$f(x/y) < 0$

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) = [\frac{x}{4}] - \cancel{[y]}\ [\frac{y}{4}] < 0$

$[\frac{x}{4}] < [\frac{y}{4}]$ $\quad \cancel{x>y}\ \cancel{x<y}$

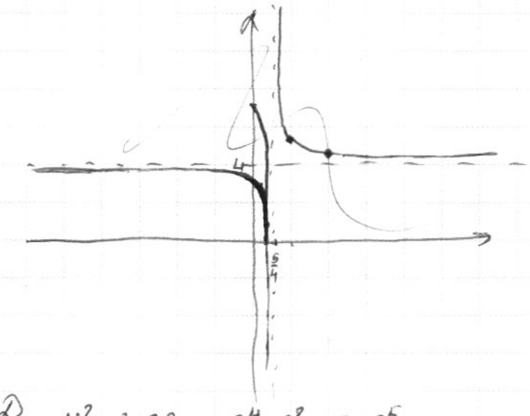
$x<y$

$2 - 3 \to 0$

$4 \to 7 \to 1$

$8 \to 11 \to 2$

$11 \to$



$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

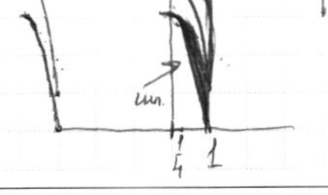
$\frac{D}{4} = 18^2 - 3 \cdot 32 = 3^4 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2^5 =$

$= 3 \cdot 2^2 (27-8) = 3^2 2^2 \cdot 7$

$4 + \frac{4}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$ $\quad \frac{36}{64} = \frac{9}{16}$ $\quad -64x+36$

$-2+9-3=4$

$\frac{1}{4} \to 3 \quad 1 \to 0$



$\frac{1}{4} \to 4 \quad 1 \to 1$ $\quad -\frac{\cancel{32}^{2} \cdot 81}{\cancel{16^2}_{8}} + \frac{\cancel{36}^{9} \cdot 9}{\cancel{16}_{4}} \cdot 3 =$

$\frac{16}{(4x-5)^2} = 1$ $\quad \frac{1}{4}$

$= -\frac{81}{8} + \frac{81}{4} - 3 = \frac{81}{8} - 3 = 7\frac{1}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{(x+ay+b)(x+cy+d) = x^2 + (a+c)xy + (a+c)y^2}\ acy^2 + b(y + \cancel{dx + bd}$

$a=-24 \quad c=-2 \quad d=1 \quad b=-6$

$\cancel{144y^2}$ $x^2 - 26xy + 144y^2 + 12y + x - 6 = 0$

$x^2 + x(1-26y) + 144y^2 + 12y - 6 = 0$

$D = (1-26y)^2 - 4(144y^2 + 12y - 6) =$

$= 1 + 4\cdot 13y + 4\cdot 13y^2 - 4\cdot 12y^2 - 4\cdot 12y + 24 =$

$= 4y^2 - 4\cdot 25y + 25 = 0$ $\qquad (2y+5)^2 = 4y^2 + 20y + 25$

$\frac{D}{4} = 50^2 - 100 = \sqrt{2400} = 20\sqrt{6}$ $\qquad y =$

$x = \frac{26y - 1 \pm \sqrt{D}}{2}$

$a^{\log_c b} = e^{\frac{\ln b}{\ln c}\cdot \ln a} = b^{\log_c a}$

$\cancel{10}$ $10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$|x^2 - 10x|^{\log_3 4} - (10x - x^2)^{\log_3 5} \geq x^2 - 10x$

$t = x^2 - 10x \geq 0$

$|t|^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq -t$

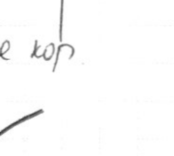
$t^{\frac{1}{\ln 3}} = z$

$x^a = e$

$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$

$x^2 = e^{\cancel{2\ln x}} = e^{\cancel{\ln x^2}}$

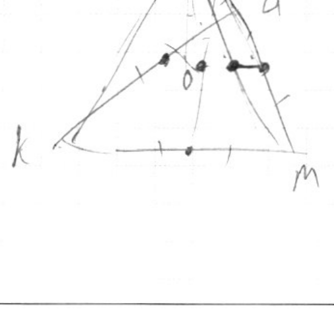
$z^{\ln 3} + z^{\ln 4} - z^{\ln 5} \geq 0$

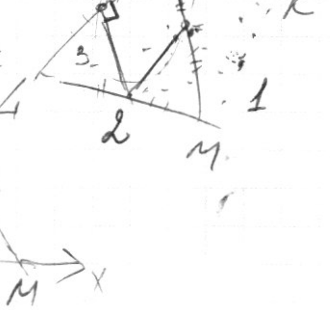


$z = 0$ - не кор

$z^{\ln\frac{3}{5}} + z^{\ln\frac{4}{5}} - 1 \geq 0$

$z^{\ln\frac{3}{5}}(1 + z^{\ln\frac{4}{3}}) = 1$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

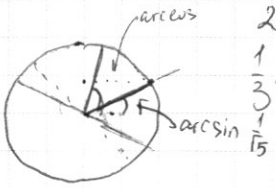
(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \\ -\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta=-\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \end{cases} \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2\beta=\arccos\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k \\ 2\beta=-\arccos\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta=-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k \\ 2\alpha+2\beta=\pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha=-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}-\arccos\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k \\ 2\alpha=-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+\arccos\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k \\ 2\alpha=\pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}-\arccos\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k \\ 2\alpha=\pi+\arccos\frac{1}{\sqrt5}+\arccos\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} 2\alpha=-\frac{\pi}{2}+2\pi k \\ 2\alpha=\dots \\ 2\alpha=\dots \\ 2\alpha=\frac{3\pi}{2}+2\pi k \end{array}\right.$$

$\operatorname{tg}\alpha=$

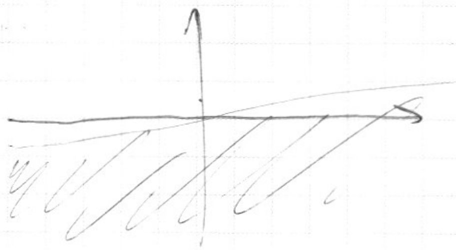


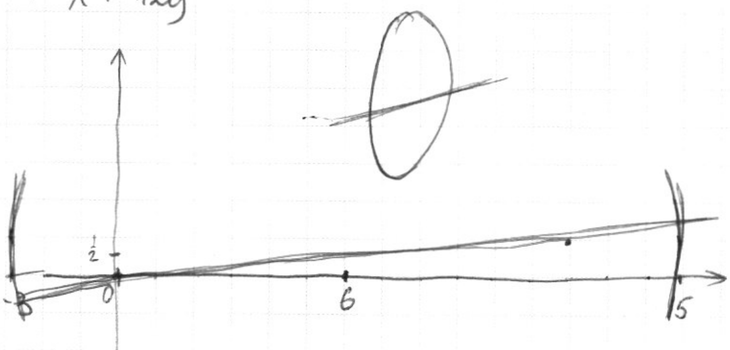
$2<\sqrt5<3$

$\frac{1}{3}<\frac{1}{\sqrt5}<\frac{1}{2}$ $\quad \arccos\frac{1}{\sqrt5}>\arcsin\frac{1}{\sqrt5}$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+24yx+144y^2=2xy-12y-x+6 \\ (x-6)^2-36+(6y-3)^2-9=45 \\ \cancel{2xy-12y-x+6\geq0} \quad x-12y>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-26xy+144y^2+12y+x-6=0 \\ (x-6)^2+\frac{1}{36}\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=90 \\ x>12y \end{cases}$$





$3\sqrt{10}\approx 9$

$y=\frac{1}{2}\pm 18\sqrt{10}\approx 27$

$27,\ -27$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

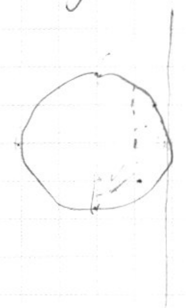
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ и $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ $\quad tg\alpha - ?$



$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

$\alpha+\beta = x \quad \alpha-\beta = y$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}\\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta = \frac{1}{5}\end{cases}$$

$\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\cancel{2\beta = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k}$

$\beta = \pm\frac{1}{2}\arccos + \pi k$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} \pm \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$$\begin{cases}\beta = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt5}+\pi k\\ \left[\begin{array}{l}2\alpha+2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k\\ 2\alpha+2\beta = -\pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi k\end{array}\right.\end{cases} \quad \begin{cases}\beta = \pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt5}+\pi k\\ \left[\begin{array}{l}\alpha = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}-\beta+\pi k\\ \alpha = -\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}-\beta+\pi k\end{array}\right.\end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l}\alpha = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt5}+\pi k\\ \alpha = -\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt5}+\pi k\\ \alpha = -\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}-\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt5}+\pi k\\ \alpha = -\frac{\pi}{2}+\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{\sqrt5}+\pi k\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi k\\ \alpha = -\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt5}-\arccos\frac{1}{\sqrt5}\right)+\pi k\\ \alpha = -\frac{1}{2}\left(\pi-\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+\arccos\frac{1}{\sqrt5}\right)+\pi k\\ \alpha = -\frac{\pi}{4}+\pi k\end{array}\right.$$

$tg\,\alpha = -1$

$tg\,\alpha =$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1-2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

$\cos\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$ и $\sin\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$

$tg\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \cancel{\frac{1-\cos x}{\sin x}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)