МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

(1) $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$; (2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$,

$\operatorname{tg}\alpha=?$

(2): $\cancel{2}\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{=-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cdot\cos 2\beta=-\frac{\cancel{2}}{17}$

$$\begin{cases}\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}\\ (1):\ \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\end{cases}$$

$$\begin{cases}2\beta=\pm\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi k & k\in\mathbb{Z}\\ \left[\begin{array}{ll}2\alpha+2\beta=-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi m & m\in\mathbb{Z}\\ 2\alpha+2\beta=\pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi l & l\in\mathbb{Z}\end{array}\right.\end{cases}$$

1) $2\beta=\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi k$, $2\alpha+2\beta=-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi m$,

$2\alpha=-\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi m-2\pi k$ $\quad m,k\in\mathbb{Z}$

$2\alpha=-\frac{\pi}{2}+2\pi m-2\pi k$

$\alpha=-\frac{\pi}{4}+\pi(m-k)\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=-1$

2) $2\beta=-\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi k$, $2\alpha+2\beta=\pi+\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+$

$+2\pi l$, $2\alpha=\pi+\underbrace{\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}}_{=\frac{\pi}{2}}+2\pi l-2\pi k$,

$\alpha=\frac{3\pi}{4}+\pi(l-k)\Rightarrow\operatorname{tg}\alpha=-1$, $\quad l,k\in\mathbb{Z}$

3) $2\beta=-\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi k$, $2\alpha+2\beta=-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi m$,

$2\alpha = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi m - 2\pi k$, т.е.

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(-\frac{\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}}{2} + \frac{\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}}{2} + \pi(m-k)\right) =$$

$$= \operatorname{tg}\left(-\frac{\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}}{2} + \frac{\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}}{2}\right)$$

Заметим, что в 4 случае получается $2\beta = \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k$, $2\alpha + 2\beta = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi l$, $2\alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + \pi + 2\pi l - 2\pi k$,

т.е. если в 3 случае получается $\operatorname{tg}\gamma$, то в 4-ом $\operatorname{tg}\left(-\gamma + \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{ctg}\gamma = \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}$, поэтому по 3-ему случаю мы распознаем и 4-ый,

$$\operatorname{tg}2\gamma = \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right) =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)}{1 + \operatorname{tg}\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)} = \frac{4 - \frac{1}{4}}{1 + 4\cdot\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{15}{8} = \frac{2\operatorname{tg}\gamma}{1 - \operatorname{tg}^2\gamma}, \quad 15 - 15\operatorname{tg}^2\gamma = 16\operatorname{tg}\gamma,$$

$$15\operatorname{tg}^2\gamma + 16\operatorname{tg}\gamma - 15 = 0$$

$$\frac{D}{4} = 64 + 15\cdot 15 = 64 + 225 = 289 = 17^2$$

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{-8 \pm 17}{15} \quad \frac{9}{15} = \frac{3}{5}, \quad -\frac{25}{15} = -\frac{5}{3}.$$

Но заметим, что $\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} > 0$, $\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} > \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}, \ \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} < \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\gamma > 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\gamma > 0$ и подойдёт только $\frac{3}{5}$, тогда в 4 случае $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\gamma} = \frac{5}{3}$.

Итого $\operatorname{tg}\alpha$ может равняться -1, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{3}$, по условию этих значений $3 \Rightarrow$
$\Rightarrow$ все они подходят

Ответ: -1; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{3}$.

№2.

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9(x^2 - 2x + 1) + y^2 - 12y + 36 = 90 \\ y - 6 - 6(x-1) = \sqrt{(x-1)(y-6)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90 \\ y - 6 - 6(x-1) = \sqrt{(x-1)(y-6)} \end{cases}$$

Замена: $x - 1 = a$, $y - 6 = b$

$$\begin{cases} 9a^2 + b^2 = 90 \\ b - 6a = \sqrt{ab} \quad (2) \end{cases}$$

(2): $b - 6a = \sqrt{ab} \Leftrightarrow \begin{cases} ab \geq 0 \\ (b - 6a)^2 = ab \end{cases}$

$b^2 - 12ab + 36a^2 = ab$

$b^2 - 13ab + 36a^2 = 0$

$\left[\begin{array}{l} b = 9a \\ b = 4a \end{array}\right.$ тогда $\left[\begin{array}{l} ab = 9a^2 \geq 0 \\ ab = 4a^2 \geq 0 \end{array}\right. \Rightarrow ab \geq 0$

$b = 9a: \quad 9a^2 + 81a^2 = 90$

$a = \pm 1, \quad b = \pm 9$

$b = 4a: \quad 9a^2 + 16a^2 = 90$

$25a^2 = 90$

$a^2 = \frac{18}{5}$

$a = \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}, \quad b = \pm 12\sqrt{\frac{2}{5}}$

$a = 1, \ b = 9 \quad : \quad x = 2, \ y = 15$

$a = -1, \ b = -9 \quad : \quad x = 0, \ y = -3$

$a = 3\sqrt{\frac{2}{5}}, \ b = 12\sqrt{\frac{2}{5}} \quad : \quad x = 4\sqrt{\frac{2}{5}}, \ y = 18\sqrt{\frac{2}{5}}$

$a = -3\sqrt{\frac{2}{5}}, \ b = -12\sqrt{\frac{2}{5}} : \ x = -2\sqrt{\frac{2}{5}}, \ y = -6\sqrt{\frac{2}{5}}$

Ответ: $(2; 15)$, $(0; -3)$, $\left(4\sqrt{\frac{2}{5}}; 18\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$, $\left(-2\sqrt{\frac{2}{5}}; -6\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ (Все переходы были равносильными, поэтому все корни подходят.

№3.

$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}$

$|26x - x^2|^{\log_5 12} + 26x - x^2 \geq 13^{\log_5(26x - x^2)}$

Замена: $26x - x^2 = t$

$|t|^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$

Ограничения: $t > 0$, тогда $|t| = t$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$

$t^{\log_5 12} + t \geq t^{\log_5 13} \quad \Big| : t^{\log_5 13} > 0$

$t^{\log_5 12 - \log_5 13} + t^{1-\log_5 13} \geq 1$

Пусть $f(t) = t^{\log_5 12 - \log_5 13} + t^{1-\log_5 13}$,

$t^{\log_5 12 - \log_5 13} \searrow$, т.к. $\log_5 12 < \log_5 13$ $(5>1, 12<13)$,

$t^{1-\log_5 13} \searrow$, т.к. $1-\log_5 13 < 0$, значит $f(t)$ – сумма 2 монотонно убыв. ф-ций $\Rightarrow f(t) \searrow$, тогда $f(t) \geq const$ будет иметь решения $t>0$ (огр.), $t \leq$ корень уравнения $f(t)=1$, т.к. $f(t) \searrow$, то таких корней ≤ 1. Заметим, что $t = 5^2$ подходит:

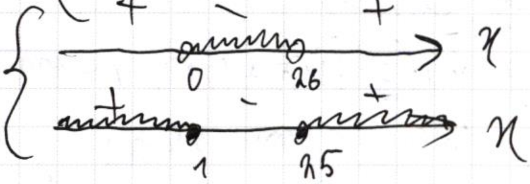
$5^{2\log_5 12 - 2\log_5 13} + 5^{2-2\log_5 13} = 1$

$\frac{12^2}{13^2} + \frac{5^2}{13^2} = 1 \quad \Big| \cdot 13^2$

$144 + 25 = 169$ – верно $\Rightarrow t = 25$ подходит

Тогда $t \in (0; 25]$

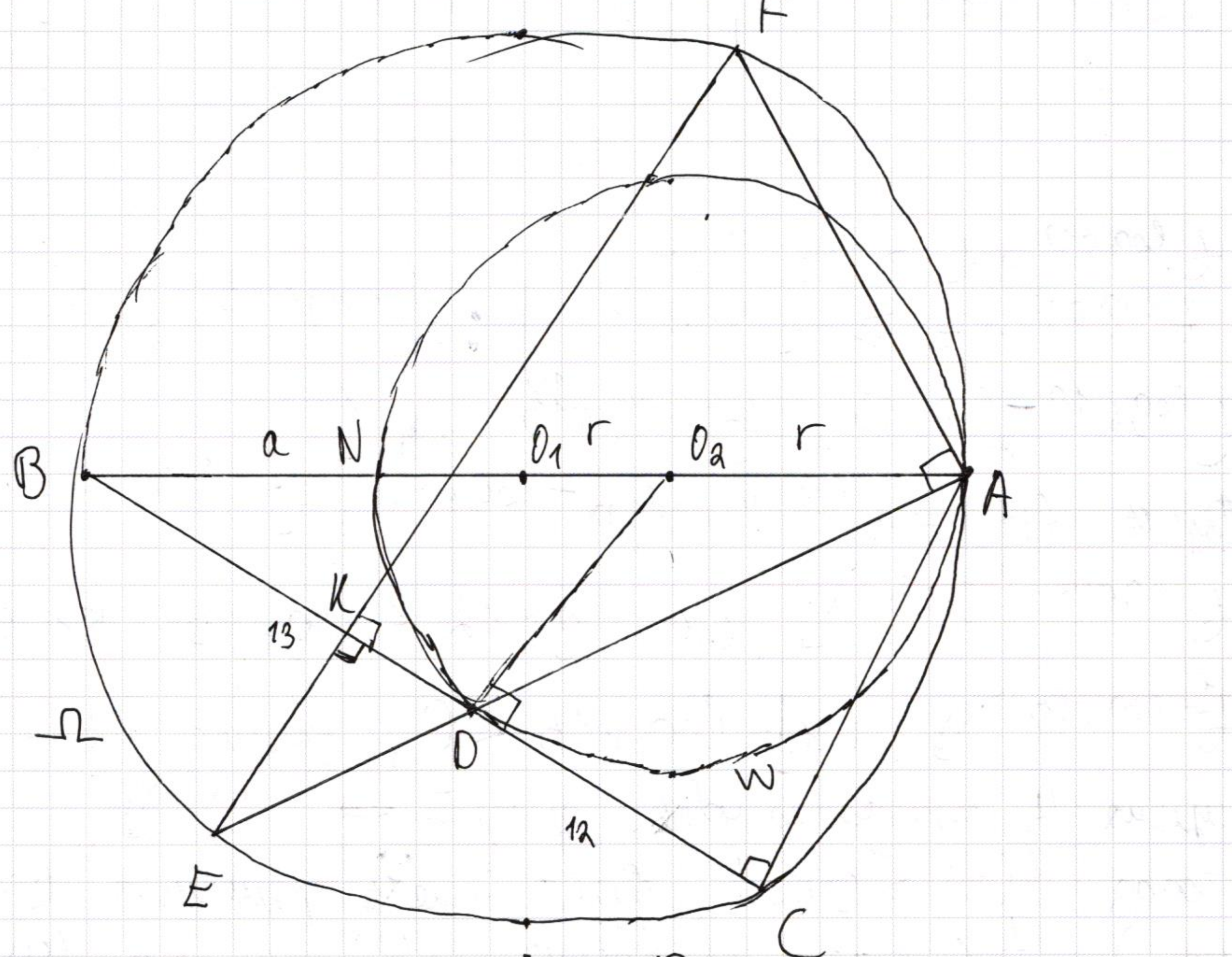
$\begin{cases} 26x - x^2 > 0 \\ 26x - x^2 \leq 25 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-26) < 0 \\ x^2 - 26x + 25 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-26) < 0 \\ (x-25)(x-1) \geq 0 \end{cases}$



Ответ: $x \in (0; 1] \cup [25; 26)$.

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№4.



Дано: $CD = 12$, $BD = 13$, $r, R = ?$ $\angle AFE = ?$ $S_{\triangle AEF} = ?$

Решение.

1) Т.к. Ω и w кас., то $A, O_2, O_1, N, B \in$ прямой (O_1, O_2 – центры Ω и w, $N = AB \cap w$). Пусть $BN = a$, $NO_2 = O_2A = r$, $O_2D \perp BC$ как радиус в т. касания, $AC \perp BC$, т.к. $\angle BCA$ – вписанный, опир. на диаметр BA (равен 90°), тогда $O_2D \parallel AC$ ($\angle O_2DB = \angle ACB$, они соотв. при $O_2D \parallel AC$ и сек. BC), по т. Фалеса

$\frac{BO_2}{O_2A} = \frac{BD}{DC} = \frac{13}{12} = \frac{a+r}{r}$. По св. кас. и сек. $\rightarrow 13r = 12a + 12r$, $r = 12a$

$BD^2 = BN \cdot BA$, $169 = a(a+2r)$, $169 = a(a+24a)$,

$25a^2 = 169$, $a = \frac{13}{5}$, $r = \frac{156}{5}$, $R = \frac{a+2r}{2} = \cancel{\frac{325}{10}}\ \frac{65}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\angle AFE = \frac{1}{2}\smile ECA = \frac{1}{2}\smile EC + \frac{1}{2}\smile CA = \angle EAC + \angle CBA$,

$AB = 65$, $BC = 25$, тогда по т. Пифагора для $\triangle BCA$ $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{65^2 - 25^2} = \sqrt{5^2(13^2 - 5^2)} = 5 \cdot 12 = 60$, $tg\, DAC = \frac{DC}{AC} = \frac{12}{60} = \frac{1}{5} \Rightarrow$

$= \angle DAC = arctg \frac{1}{5}$, $tg\, ABC = \frac{AC}{BC} = \frac{60}{25} = \frac{12}{5}$,

$\angle ABC = arctg \frac{12}{5}$, тогда $\angle AFE = arctg\frac{1}{5} + arctg\frac{12}{5}$,

$tg\angle AFE = \frac{\frac{1}{5} + \frac{12}{5}}{1 - \frac{1}{5}\cdot\frac{12}{5}} = \frac{13}{5} : \left(\frac{25}{25} - \frac{12}{25}\right) = \frac{13}{5}\cdot\frac{25}{13} =$

$= 5 \Rightarrow \angle AFE = arctg\, 5$.

3) $\angle FKC = 90^\circ$ $(K = FE \cap BC) = \frac{\smile FC + \smile BE}{2}$ (угол между хордами) $\Rightarrow \smile FC + \smile BE = 180^\circ$, $\smile BE =$

$= 180^\circ - (\smile EC + \smile AC)$ ($\smile AB = 180^\circ$, т.к. её стягивает диаметр AB), $\smile FC = \smile FA + \smile AC$; $\smile FA + \smile AC +$

$180^\circ - \smile EC - \smile AC = 180^\circ$, $\smile FA + \smile AC = \smile EC + \smile AC$,

$\smile FA = \smile EC$, $\Rightarrow \angle DAC = \angle FEA = arctg\frac{1}{5}$,

~~[illegible]~~, $\angle FAE = 180^\circ - \angle AFE -$

$- \angle FEA = 180^\circ - (arctg\, 5 + arctg\frac{1}{5}) = 180^\circ - (arctg5 +$

$+ arcctg\frac{1}{5}) = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Тогда EF - диаметр $= AB = 65$, $tg\, AFE = \frac{AE}{AF} = 5$, $AE = 5x$,

$AF = x$, по т. Пифагора $25x^2 + x^2 = 65^2$, $x^2 = \frac{65^2}{26}$,

$S_\triangle AFE = \frac{5x^2}{2} = \frac{5}{2}\cdot\frac{65^2}{26} = \frac{65 \cdot 5^2}{4} = \frac{1625}{4}$.

Ответ: $r = \frac{156}{5}$, $R = \frac{65}{2}$, $\angle AFE = \operatorname{arctg} 5$,
$S_{\triangle AFE} = \frac{1625}{4}$.

№6.

$$\frac{8-6x}{3x-2} \ge ax+b \ge 18x^2-51x+28 \quad \forall x \in (\tfrac{2}{3}; 2]$$
$(a;b) = ?$

1) $ax+b \ge 18x^2-51x+28$

$18x^2 - x(a+51) + 28 - b \le 0$

Это парабола с ветвями вниз, значит, чтобы $\forall x \in (\frac{2}{3}; 2]$ это было верно, нужно, чтобы значения в т. $\frac{2}{3}$ и 2 были ≤ 0 (тогда и вся парабола лежит ниже оси абсцисс, а если есть какая-либо т. в которой >0, то нер-во неверно)

$$\begin{cases} 18\cdot(\frac{2}{3})^2 - \frac{2}{3}(a+51) + 28 - b \le 0 \\ 18\cdot(2)^2 - 2\cdot(a+51) + 28 - b \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 - \frac{2}{3}a - 34 + 28 - b \le 0 \\ 72 - 2a - 102 + 28 - b \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\frac{2}{3}a - b - 2 \le 0 \\ -2a - b - 1 \le 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a + 3b \ge -6 \\ 2a + b \ge -1 \end{cases}$$

2) $\frac{8-6x}{3x-2} \ge ax+b \quad \Big| \cdot (3x-2) > 0$, т.к. $x > \frac{2}{3}$

$8 - 6x \ge 3ax^2 + 3bx - 2ax - 2b$

$3ax^2 + x(3b - 2a + 6) - 2b - 8 \le 0$

а) $a > 0$: ветви вверх, аналогично 1-ому случаю

$$\begin{cases} 3a\cdot(\frac{2}{3})^2 + \frac{2}{3}(3b - 2a + 6) - 2b - 8 \le 0 \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3a\cdot 4+2\cdot(3b-2a+6)-2b-8\le 0$

$\begin{cases}\frac{4}{3}a+2b-\frac{4}{3}a+4-2b-8\le 0 \\ 12a+6b-4a+12-2b-8\le 0\end{cases}$

$\begin{cases}-4\le 0 \text{ — верно} \\ 8a+4b+4\le 0\end{cases}$

$2a+b\le -1$

+ условия из 1 случая: $\begin{cases}2a+b\le -1 \\ 2a+b\ge -1 \\ 2a+3b\ge -6\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2a+b=-1 \\ 2a+3b\ge -6,\end{cases}$

$\begin{cases}2a+b=-1 \\ -1+2b\ge -6\end{cases}$

$a=\frac{-1-b}{2}$

$b\ge -\frac{5}{2}$

2) $a=0$: $x(3b+6)-2b-8\le 0$

$3bx+6x-2b-8\le 0$

$x(3b+6)\le 2b+8$

$b>-2$

Если $3b+6>0$, то $x\le\frac{2b+8}{3b+6}$, $x_{max}=2\Rightarrow x\le\frac{2b+8}{3b+6}$,

$6b+12\le 2b+8$, $4b\le -4$, ~~$b\ge -1$~~ $b\le -1$ ~~НА~~

$3b+6=0$:, $b=-2$, $0\le -4+8$ — верно. Проверка:

$\begin{cases}0*2\ge -6 \\ 0-2\ge -1\end{cases}$ не верно

□ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

~~$3b+6<0$, $b<$~~

Если $3b+6 \geq 0$, то $b \in [-2; -1]$:

$$3b \geq -6$$
$$b \geq -1$$
$$-1 \geq b \geq -2$$

$$b = -1, \quad a = 0$$

Если $3b+6 < 0$, $b < -2$

$x \geq \frac{3b+8}{3b+6}$, $\frac{2}{3} \geq \frac{3b+8}{3b+6}$, $6b+12 \leq 6b+24$

из — верно

$$\begin{cases} 3b \geq -6 \\ b < -2 \end{cases} \text{— неверно.}$$

(3) $a < 0$ — не подходит

Ответ: $a = \frac{-1-b}{2}$, $b \geq -\frac{5}{2}$; $(0, -1)$

5 $f(ab) = f(a) + f(b)$ $f(p) = [\frac{p}{4}]$ ≥ 0 Q

$f: Q_{>0}$

$4 \leq x \leq 28$

$4 \leq y \leq 28$

$f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

$f(\frac{1}{4}) = f = (4^{-1}) =$

$f(p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n) = \sum [\frac{p}{4}]$

$f(4) = f(2 \cdot 2) = f(2) + f(2) = 0 + 0 = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1$

4^{-1}

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f = (\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b}) = f(\frac{1}{a}) + f(\frac{1}{b})$

$y \cdot \frac{1}{y^2}$

$f(\frac{x}{y})$ $f(\frac{1}{y}) < 0$

$f($

$6b + 12 \leq 2b + 8$

$b = 3$: нелр

$4b \leq -4$

$b \leq -1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{b^2 - 36}$

$$\begin{cases} b^2 - 12ab + 36a^2 = ab \\ 9a^2 + b^2 = 90 \end{cases} \qquad b^2 = 90 - 9a^2$$

$\cancel{90 + 27a^2 - 12a = ab}$

$$36a^2 + b^2 - 13ab = 0$$

$$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq \cancel{x^2} + 13^{\log_5(26x - x^2)}$$

$26 - x^2$ $\quad -x^2$

$$26x - x^2 = t$$

$$|t|^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t} \qquad t > 0$$

$$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$$

$$t^{\log_5 12} + t^{\log_5 5} \geq t^{\log_5 13} \quad \Big| : t^{\log_5 13} > 0$$

$$f(t) \quad t^{\log_5 12 - \log_5 13} + t^{-\log_5 13} \geq 1$$

$\searrow$

$$5^2 \qquad 5^{-2\log_5 13} = 5^{\log_5 13^{-2}} = \frac{1}{13^2}$$

$$12^2 + 5^2 = 13^2$$

$\frac{2}{3} = 2$

$f(\frac{12}{3}) \geq 0$

$f(2) \geq$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$, $\cancel{2}\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{\cancel{2}\,1}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{17} \quad \Big| \cdot -\sqrt{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \\ 2\alpha+2\beta = \pi + \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 2\beta = \arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi m \\ 2\beta = -\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi l \end{array}\right.$

1) $2\alpha = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k - 2\pi m =$

$= -\frac{\pi}{2}$, $\alpha = -\frac{\pi}{4}\ldots$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$

2)

$2\beta = \ldots$, $2\alpha = -2\beta + \pi + \arcsin \quad + 2\pi l$,

$2\alpha = -\arccos\frac{1}{\sqrt{17}} + \arcsin + \ldots$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$, $\quad tg\,\alpha = 4$

$\frac{16}{4} - \frac{1}{4} = \frac{\frac{15}{4}}{2}$

$\arccos \frac{1}{\sqrt{17}} >$

2.

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \geq 0 \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases}$$

$y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6$

$$\begin{cases} y^2 + 36x^2 - \cancel{12xy}\ 13xy + 6x + y = 6 \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases}$$

$9(x^2 - 2x + 1) + \underbrace{y^2 - 12y + 36}_{(y-6)^2} = 90$

$x = 1 \qquad 9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$\overset{x-1}{\cancel{3x-3}} = a, \quad y - 6 = b$

$(x-1)(y-6) = xy - 6x - y + 6$

$y - 6x = \cancel{a-6}\ b - 6a$

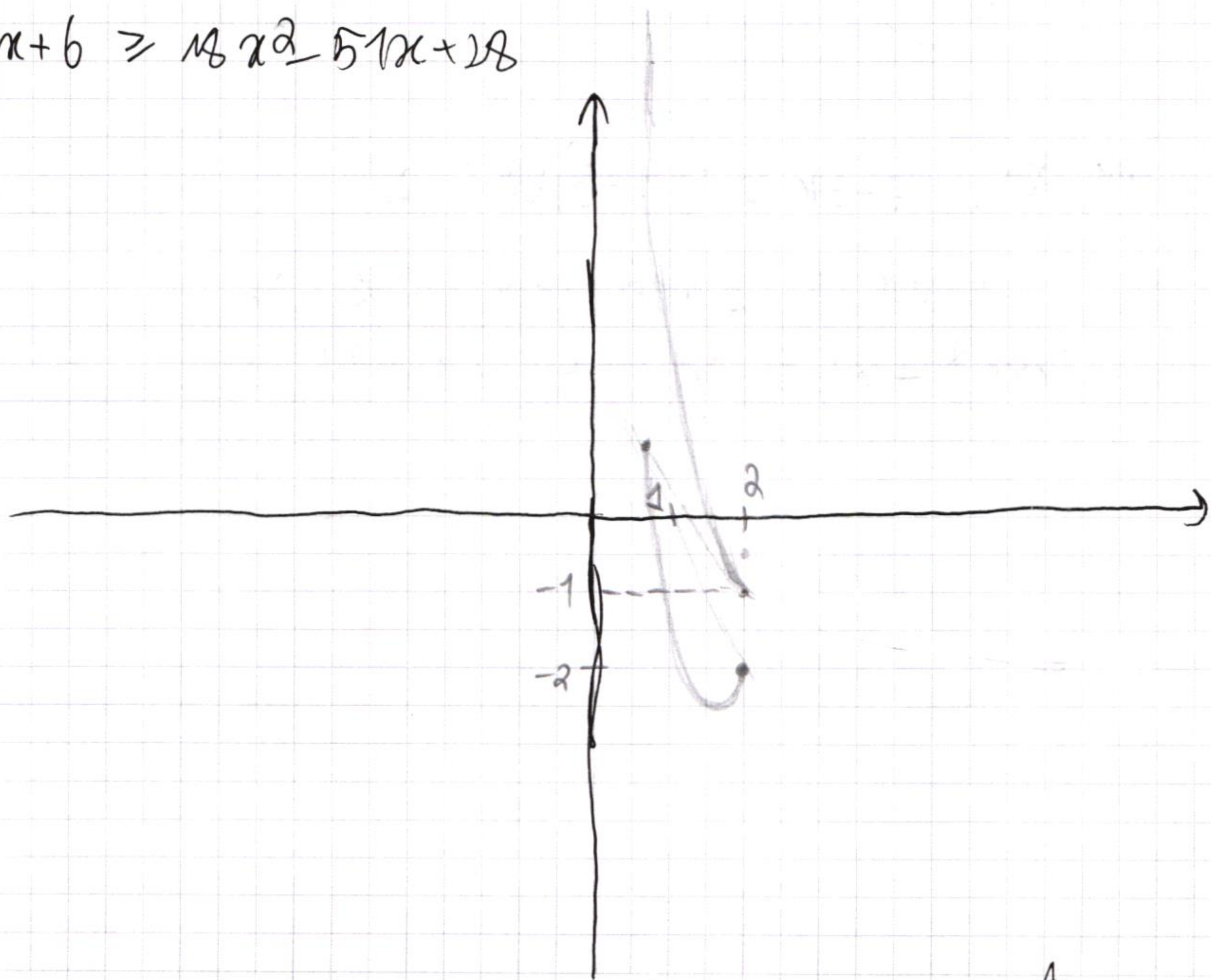
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

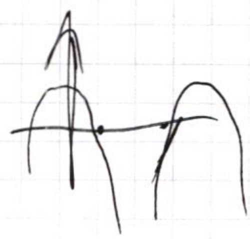
ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$ax+b \le \frac{8-6x}{3x-2} = -2+\frac{12}{3x-2}$

$ax+b \ge 18x^2-51x+28$





$f(x) = -2+12(3x-2)^{-1}, \quad f'(x) =$

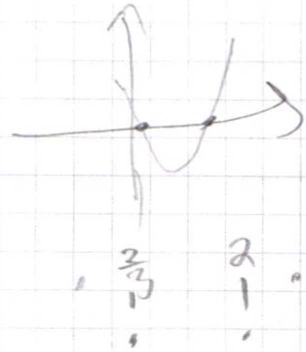
$x_в = \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$

$f(\frac{17}{12}) = 18\cdot\frac{17^2}{12^2} - 51\cdot\frac{17}{12}+28 = \frac{18\cdot17^2-51\cdot17\cdot12+28\cdot12^2}{12^2}$

$f(2) = \cancel{36-51\ 72}$

$f(\frac{2}{3}) = 18\cdot\frac{4}{9} - 51\cdot\frac{2}{3}+28 = 8-34+28 = 2$

$18x^2 - 51x - ax + 28 - b \le 0$

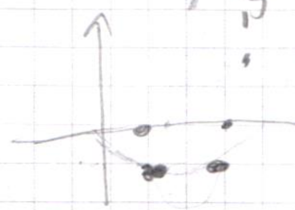


$18x^2 - x(51+a) + 28 - b \le 0$

$\forall x \in [\frac{2}{3}; 2]$

$f(\frac{2}{3}) \le 0$

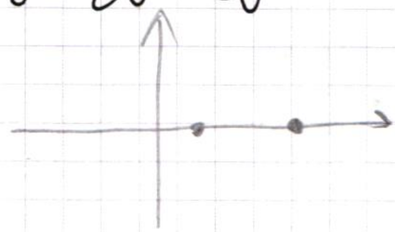
$f(2) \le 0$



~~ax+b~~ $8 - 6x \ge (ax+b)(3x-2)$

$8 - 6x \ge 3ax^2 - 2ax + 3bx - 2b$

$3ax^2 + x(6 - 2a + 3b) + 8 - 2b \le 0$



МФТИ

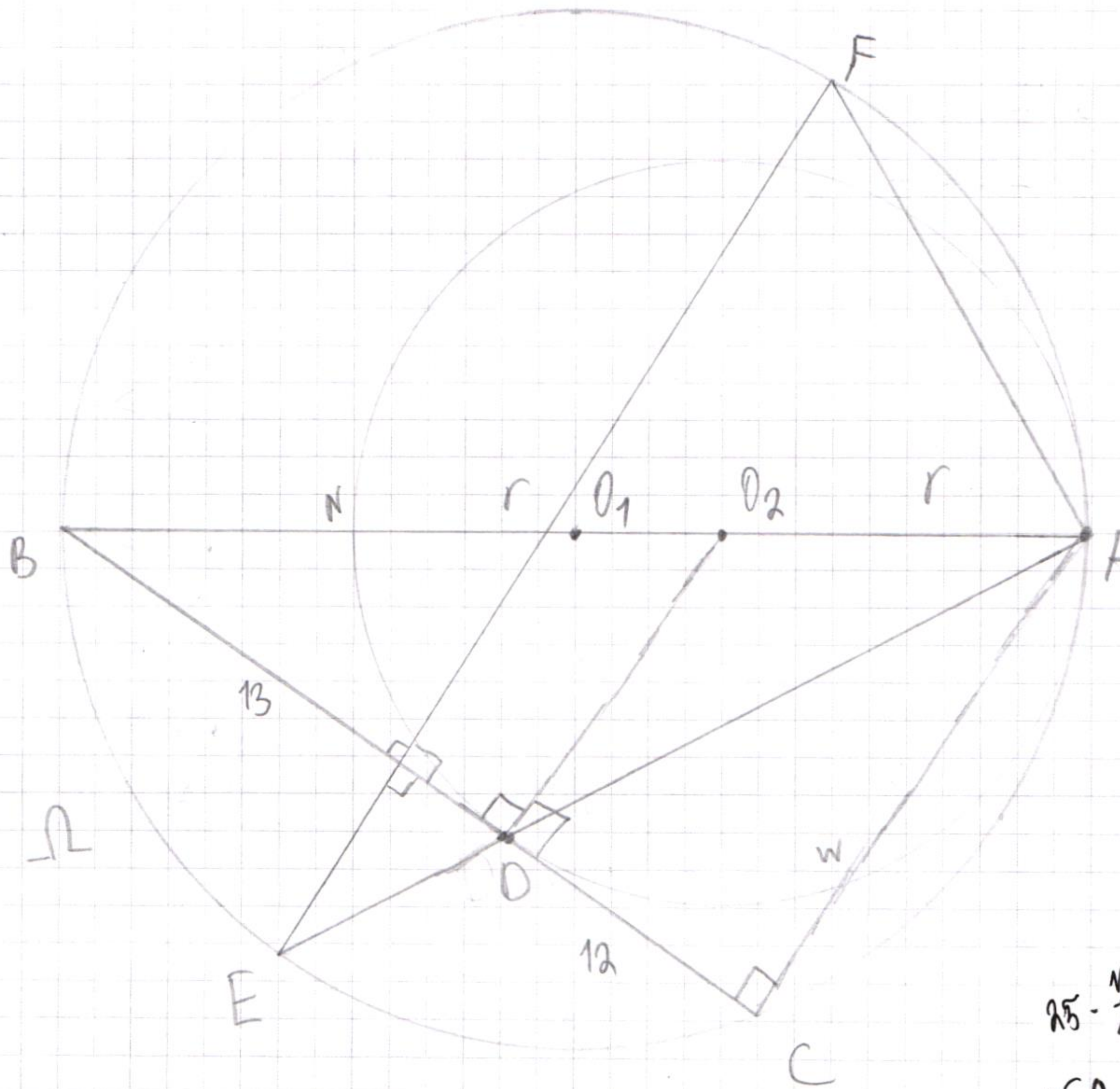
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$25 \cdot \frac{13}{10} = \frac{5 \cdot 13}{2}$

$\frac{269}{2} = \frac{13}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{25}^{5}}{2} = \frac{65}{2}$

$13^2 = BN(BN+2r)$, $169 = BN^2 + 2rBN$

$\frac{13}{12} = (BN+r)r$ $\quad 13 = 12rBN + r^2$

$= \frac{13}{12r} - \frac{r}{12}$ $\quad BN = \frac{13-r^2}{12r}$

$169 = \left(\frac{13-r^2}{12r}\right)^2 + \cancel{2r}\frac{13-r^2}{\cancel{12r}} = \frac{13}{12r} - \frac{r}{12}$

308
321

$169 = \frac{169}{144r^2} - \frac{26}{144} + \frac{13}{6} - \frac{r^2}{6}$ $\quad \frac{13}{6}+$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

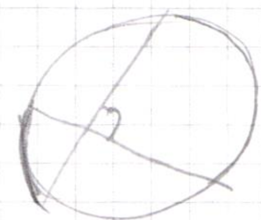
$a+2r$ // $a+24a = 25a = 25 \cdot \frac{13}{5} = 65$

$= \frac{13}{5} + \frac{308}{5} = \frac{321}{5}$

$13 \cdot 12 = 169 - 13 = 156$

~~$12 \cdot 13 + 13 = 13 \cdot 12$~~

$\frac{\frac{1}{5} + \frac{12}{5}}{1 - \frac{1}{5} \cdot \frac{12}{5}} = \frac{13}{5}$:

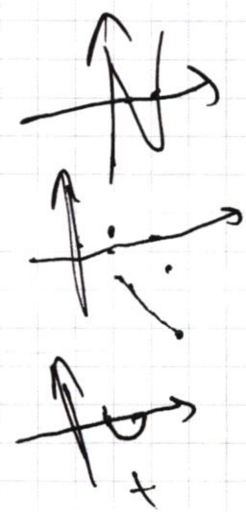


$\angle \overset{\frown}{AF} + \overset{\frown}{BE} = 180^0$

$\overset{\frown}{CF} = \frac{1}{2} \angle B + \frac{1}{2} 2$

$\overset{\frown}{BE} =$

66×66: 396, 396, 4356



66×25: 330, 132, 1650

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2 - 51x + 28 \quad \forall x \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq 18x^2 - 51x + 28$

$\frac{51}{36}$

$\frac{-2(3x-2)+12}{3x-2} = -2 + \frac{12}{3x-2}$

$\frac{51}{36}$

$\frac{12}{3x-2}$

$\frac{24}{36}$ $\frac{51}{36}$ $\frac{72}{36}$

$\frac{8-12}{4} = -1$

$18 \cdot 4 - 102 + 28 = -2$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)