МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-6)-6(x-1)=\sqrt{(y-6)(x-1)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

Пусть $a=x-1$; $b=y-6$

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \quad (1) \\ 9a^2+b^2=90 \quad (2) \end{cases}$$

Рассмотрим уравнение (1)

$b^2-13ab+36a^2=0$

$D=25a^2$

$b_1=9a$; $b_2=4a$

Подставим получившиеся корни в ур. (2)

I $b=9a$

$9a^2+81a^2=90$

$a=\pm 1$

$a=1$; $b=9$

$a=-1$; $b=-9$ – не подходит при подст.

II $b=4a$

$9a^2+16a^2=90$

$a=\pm\frac{3\sqrt{2}}{5}$

$a=\frac{3\sqrt{2}}{5}$; $b=\frac{12\sqrt{2}}{5}$ – не подходит при подст.

$a=-\frac{3\sqrt{2}}{5}$; $b=-\frac{12\sqrt{2}}{5}$

$\Downarrow$

$a=1$; $b=9 \Rightarrow x=2$; $y=15$

$x=1-\frac{3\sqrt{2}}{5}$; $y=6-\frac{12\sqrt{2}}{5}$

Ответ: $(2;15)$; $\left(1-\frac{3\sqrt{2}}{5}; 6-\frac{12\sqrt{2}}{5}\right)$.

№1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right) =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

По условию, $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, тогда

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

Из основного тригонометрического тождества:

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

1) $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

Тогда $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\Updownarrow$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$5\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha = 0$ $\left(\begin{matrix} -1 = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha; \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{matrix}\right)$

Разделив на $\cos^2\alpha$, получим

$-3\,tg^2\alpha + 2\,tg\,\alpha + 5 = 0$

$tg\,\alpha = -1$ $\qquad$ $tg\,\alpha = \frac{5}{3}$

2) $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

Аналогично 1) получаем, что уравнение $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ равносильно

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$

$5\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0 \quad : \cos^2\alpha$

$5\,tg^2\alpha + 2\,tg\,\alpha - 3 = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$tg\,\alpha = -1$; $tg\,\alpha = \frac{3}{5}$.

Всего получилось три варианта: $tg\,\alpha = -1$; $tg\,\alpha = \frac{3}{5}$; $tg\,\alpha = \frac{5}{3}$

Т.к. по условию решений больше трёх, то все три случая подходят.

Ответ: -1; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{3}$.

№5

$f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(x) = f(1 \cdot x) = f(1) + f(x) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(\frac{1}{y}) + f(y) = f(\frac{1}{y} \cdot y) = f(1) = 0$

Таким образом,

$f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow f(x) - f(y)$

Определим значение функции f для всех чисел от 4 до 28. $(f(1) = f(2) = f(3) = 0)$

$f(4) = 0$ $f(8) = 0$ $f(12) = 0$ $f(16) = 0$

$f(5) = 1$ $f(9) = 0$ $f(13) = 3$ $f(17) = 4$

$f(6) = 0$ $f(10) = 1$ $f(14) = 1$ $f(18) = 0$

$f(7) = 1$ $f(11) = 2$ $f(15) = 1$ $f(19) = 4$

$f(20)=1$ $\quad f(23)=5$ $\quad f(26)=3$

$f(21)=1$ $\quad f(24)=0$ $\quad f(27)=0$

$f(22)=2$ $\quad f(25)=2$ $\quad f(28)=1$

I Если $f(x)=0$, то у нас есть $16\cdot 9$ таких пар, что условие выполняется

II Если $f(x)=1$, то у нас есть $8\cdot 8$ таких пар, что условие выполняется

III Если $f(x)=2$, то есть $3\cdot 5$ таких пар

IV Если $f(x)=3$, то $2\cdot 3$ таких пар

V Если $f(x)=4$, то 2 пары.

Чтобы получить ответ, сложим полученные в п. I - V значения:

$$16\cdot 9+8\cdot 8+3\cdot 5+2\cdot 3+2=237$$

Ответ: 237.

№3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

ОДЗ:

$26x-x^2>0$

$x\in(0;26)$

Пусть $\log_5(26x-x^2)=k$

Тогда, $-x^2+26x=5^k$

Неравенство принимает вид

$$(5^k)^{\log_5 12}+5^k\geqslant 13^{\log_5 5^k}$$

$$12^k+5^k\geqslant 13^k$$

Функции $f(k)=12^k+5^k$ и $f^k=13^k$ имеют лишь одну точку пересечения при $k=2$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

При $k \le 2$:

$12^k + 5^k \geq 13^k$ - верно

Значит,

$\log_5(26x - x^2) = k \le 2$

$\log_5(26x - x^2) \le 2$

$x^2 - 26x + 25 \geq 0$

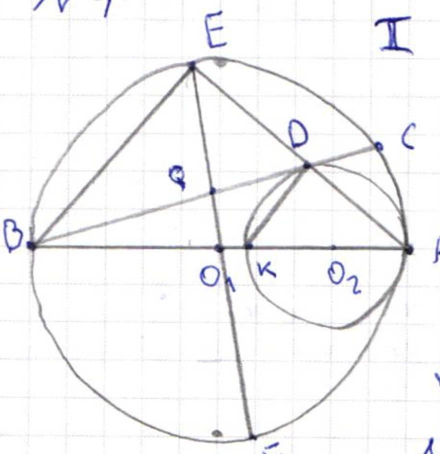
$x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty)$

С учётом ОДЗ:

$x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

Ответ: $(0; 1] \cup [25; 26)$.

№4



I O_1 - центр окружности Ω. O_2 - центр ω.

$\angle BEA = 90°$ (опирается на диаметр AB)

$\angle KDA = 90°$ (опирается на диаметр KA)

Таким образом,

$\triangle BEA \sim \triangle KDA$ (по двум углам, т.к. $\angle BEA = \angle KDA$, $\angle A$ - общий),

Рассмотрим гомотетию, при которой BA переходит в KA. Окружность Ω перейдёт в окружность ω, а $\triangle BEA$ в $\triangle KDA$.

Таким образом, касательная к Ω в т. E будет параллельна касательной к ω в т. D, т.е. BC.

$O_1E \perp$ кас. в точке E

$\Downarrow$

$O_1E \perp BC \Rightarrow O_1E$ совпадает с EF, т.к. $EF \perp BC$ по условию

Значит, т. O_1 лежит на EF.

II Т.к. O_1 лежит на EF, EF - диаметр.
Т.к. $EF \perp BC$, EF делит BC пополам.
Тогда $BQ = \frac{25}{2}$; $QD = \frac{1}{2}$; $DC = 12$.

По теореме о пропорциональных отрезках:

$$\frac{BQ}{BO_1} = \frac{QD}{O_1O_2}$$

$\Downarrow$

$$BO_1 = 25\,O_1O_2$$

Пусть R - радиус большей окр., а r - меньшей.
Тогда $BO_1 = R$; $O_1O_2 = 2r - R$

$$R = 25(2r - R) \Rightarrow R = \frac{25r}{13} \quad (1)$$

По т. Пифагора из $\triangle BDO_2$:

$(2R - r)^2 = r^2 + 169$ ($\triangle BDO_2$ - прямой, т.к. радиус в т. касания $\perp$ касательной) (2)

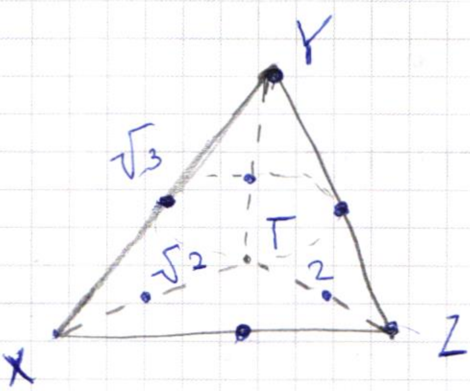
Из (1) и (2) получаем, что

$$r = \frac{169\sqrt{3}}{60};\ R = \frac{65\sqrt{3}}{12}.$$

Ответ: $r = \frac{169\sqrt{3}}{60}$; $R = \frac{65\sqrt{3}}{12}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№7

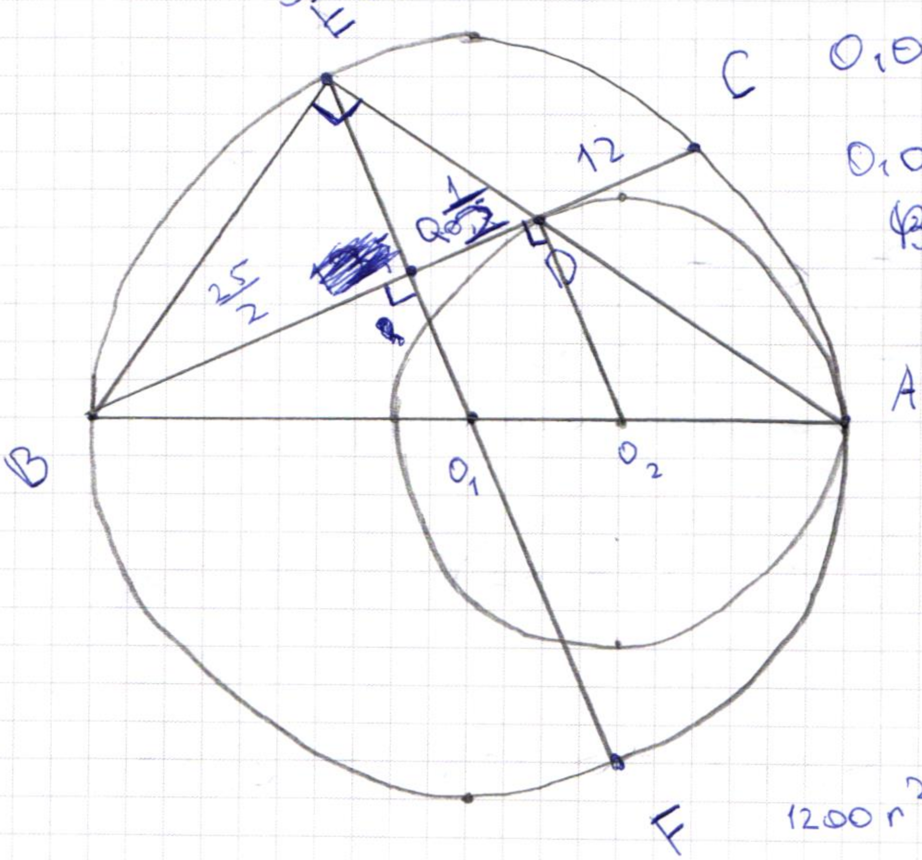


№4

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 13 \\ \hline 75 \\ 25 \\ \hline 325 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 37 \\ \times 37 \\ \hline 259 \\ 111 \\ \hline 1369 \\ -169 \\ \hline 1200 \end{array}$$

$BO_1 = 25x$



$O_1O_2 = x$

$O_1O_2 = 2r - R$

$BO_1 = R$

$R = 25(2r - R)$

$26R = 50r$

$R = \frac{25r}{13}$

$1200 r^2 = 169^2$

$r^2 = \frac{169^2}{1200}$

$(2R - r)^2 = r^2 + 169$

$\left(\frac{50r - 13r}{13}\right)^2 = r^2 + 169$

$\frac{37^2 r^2}{169} = r^2 + 169$

$r = \frac{169}{20\sqrt{3}} = \frac{169\sqrt{3}}{60} =$

$R = \frac{325\sqrt{3}}{60} = \frac{65\sqrt{3}}{12}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$|x^2-26x|^{\log_5 12} \geqslant x^2-26x+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$-x^2+26x=5^k$

$12^k \geqslant -5^k+13^k$ Равенство при $k=2$.

$12^k+5^k \geqslant 13^k$. При $k<2$: $12^k+5^k > 13^k$

$12^{\log_5(26x-x^2)}+5^{\log_5(26x-x^2)} \geqslant 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x-x^2 < 25$

$x^2-26x+25>0$

$x \in (-\infty;1)\cup(25;+\infty)$

С учётом ОДЗ:

$\boxed{x \in (0;1)\cup(25;26)}$

№6

$-2+\frac{4}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-51x+28$

$a\frac{2}{3}+b \geqslant 8-34+28$

$\frac{2a}{3}+b \geqslant 2$

$2a+3b \geqslant 6$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\frac{-2(3x-2)+4}{3x-2} \geq ax+b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

2;

$$-2+\frac{4}{3x-2}$$

72

$$\frac{8-12}{6-2} \geqslant 2a+b \geqslant 18\cdot 4 - 102 + 28$$

$$\begin{cases} -1 \geqslant 2a+b \geqslant -2 \\ 2a+3b \geqslant 6 \\ 2 \geqslant a+b \geqslant -15 \end{cases}$$

$$-1 \geqslant 2a+b \geqslant -2$$

$$2 \geqslant a+b \geqslant -15$$

$$-2+\frac{4}{3x-2} \geq ax+b \geqslant 18x^2-51x+28$$

$$-1 \geqslant 2a+b \geqslant -2$$

$$2a+3b \geqslant 6$$

$$2a+3b \geqslant 6$$

$$2a+b \leq -1$$

$$-1 \geqslant 2a+b \geqslant -2$$

$$2a+3b \geqslant 6$$

$$2b \geqslant 7$$

$$b \geqslant \frac{7}{2}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

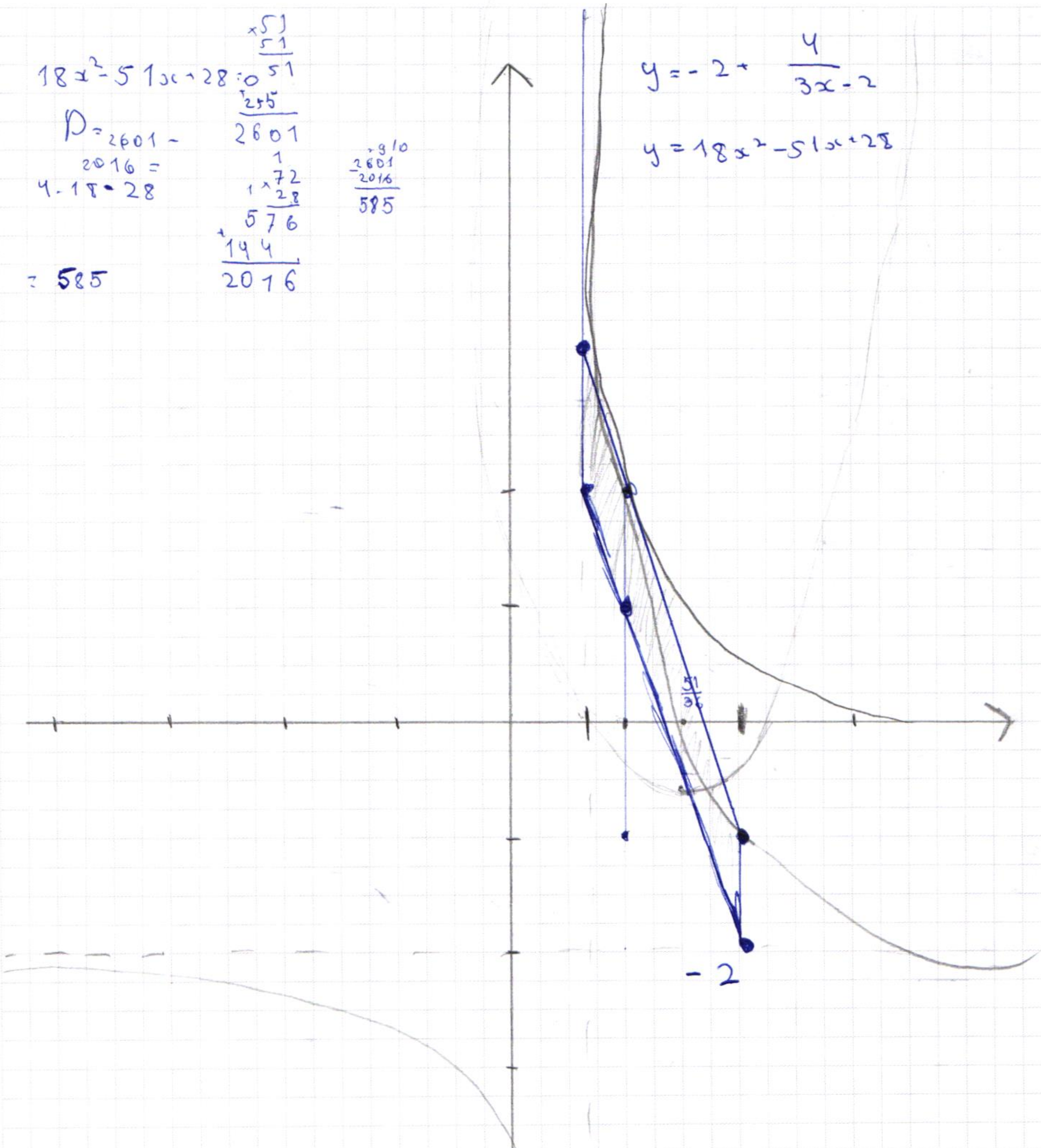
$18x^2 - 51x + 28 = 0$

$D = 2601 - 2016 = 4 \cdot 18 \cdot 28 = 585$

$$\begin{array}{r} \times\, 51 \\ 51 \\ \hline 51 \\ +\,255 \\ \hline 2601 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times\, 72 \\ 28 \\ \hline 576 \\ +\,144 \\ \hline 2016 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\,2601 \\ 2016 \\ \hline 585 \end{array}$$

$y = -2 + \dfrac{4}{3x-2}$

$y = 18x^2 - 51x + 28$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x^2-26x|^{\log_5 12} \geqslant x^2-26x+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

ОДЗ:

$t>0$

$26x-x^2>0$

$x\in(0;\ 26)$

$t=26x-x^2$

$t^{\log_5 12} \geqslant -t+13^{\log_5 t}$

$t^{\log_5 12}+t \geqslant 13^{\log_5 t}$

Пусть $\log_5(26x-x^2)=k$

$26x-x^2=5^k$

$13^3=169\cdot 13 = 507+1690 = 2197$

$(5^k)^{\log_5 12}+5^k \geqslant 13^k$

$12^k+5^k \geqslant 13^k$

$5^3=125$

$12^3=144\cdot 12 = 288+1440 = 1728$

Равенство достигается при $k=2$

12^k+5^k

$\left(\frac{12}{5}\right)^k+1 \geqslant \left(\frac{13}{5}\right)^k$

$1 \geqslant \left(\frac{13}{5}\right)^k-\left(\frac{12}{5}\right)^k$

$k\in(-\infty;\ 2)$

$26x-x^2<25$

$x^2-26x+25<0$

$x\in(-\infty;\ 1)\cup(25;+\infty)$

С учётом ОДЗ:

$x\in(0;\ 1)\cup(25;26)$.

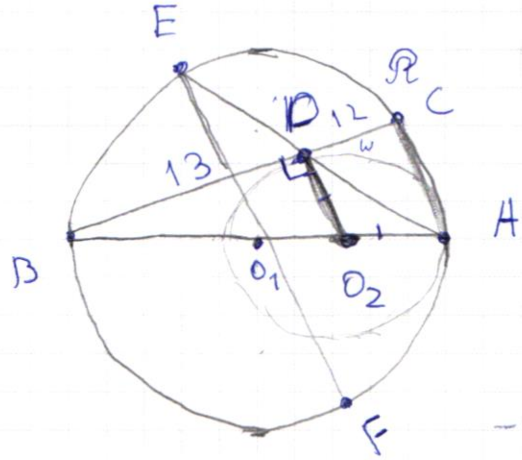
☑ черновик ☐ чистовик

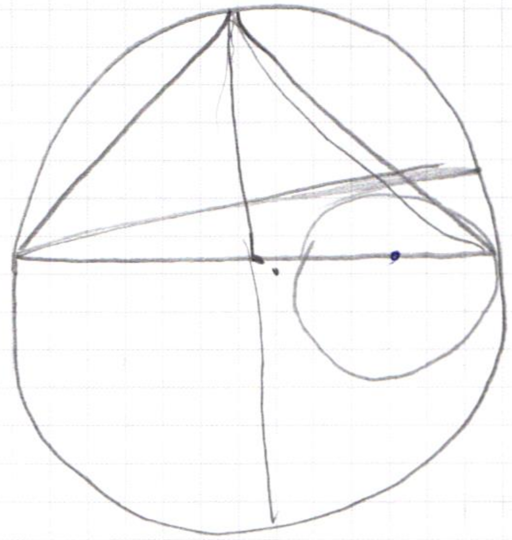
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№4

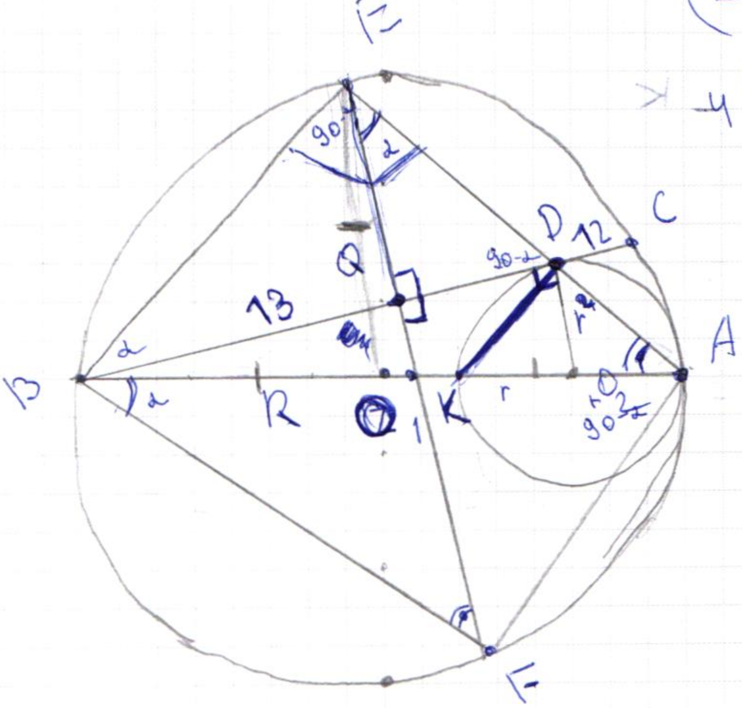




$$(2R-r)^2=r^2+13^2$$

$$4R^2-4Rr+r^2=r^2+13^2$$

$$4R^2-4Rr-169=0$$



$$\begin{cases}(y-6x)^2=(x-1)(y-6)\\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=45\end{cases}$$

$$\cancel{\begin{cases}6(y-6x)^2=6(x-1)(y-6)\\ 9(x-1)^2+(y-6)^2\end{cases}}$$

$$\begin{cases}y^2-12xy+36x^2=xy-y-6x+6\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45\end{cases}$$

$$\begin{cases}y^2-13xy+36x^2+y+6x=6\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45\end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}$

$(3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90$

$(y-6) - 6(x-1) = \sqrt{(x-1)(y-6)}$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$a = x-1;\ b = y-6$

$$\begin{cases} b - 6a = \sqrt{ab} \\ 9a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b^2 \overset{-12ab}{+} 36a^2 = ab \\ 9a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$$

$\times \begin{array}{r} 36 \\ 4 \\ \hline 144 \end{array}$

$b^2 - 13ab + 36a^2 = 0$

$D = 169a^2 - 144a^2 = 25a^2$

$b_1 = \dfrac{13a + 5a}{2} = 9a$

$b_2 = \dfrac{13a - 5a}{2} = 4a$

I $b = 9a$

$9a^2 + 81a^2 = 90$

$90a^2 = 90$

$a^2 = 1 \Rightarrow a_1 = 1;\ b_1 = 9$

$a_2 = -1;\ b_2 = -9$ — не подходит

II $b = 4a$

$9a^2 + 16a^2 = 90$

$25a^2 = 90$

$a_1 = \dfrac{3\sqrt{2}}{5};\ b_1 = \dfrac{12\sqrt{2}}{5}$ — не подходит

$a_2 = -\dfrac{3\sqrt{2}}{5};\ b_2 = -\dfrac{12\sqrt{2}}{5}$

Ответ: $(2; 15);\ \left(1 - \dfrac{3\sqrt{2}}{5};\ 6 - \dfrac{12\sqrt{2}}{5}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-6x=-\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6 \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} y^2+36x^2-13xy-6x-y=6 \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\cancel{(x-1)+(y-6)}$$

$$27\times4=108 \qquad 108\times11: \; 108+108=1188$$

$$24\times13: \; 72+24=312 \qquad 108\times39: \; 972+324=4212$$

$$27x^2-13xy+12x+11y=-39$$

$$27x^2+x(12-13y)+11y+39=0$$

$$D=144-312y+169y^2-108(11y+39)=$$

$$=169y^2-312y+144-1188y-4212$$

Следовательно, нужно найти количество таких точек, что $f(x) < f(y)$

$9 \cdot 16 + 8 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 +$

$x = p_1 p_2 p_3 \ldots p_i$

$f(x) = \sum_{i=1}^{?} \left[\frac{p_i}{4} \right]$

$= 144 + 64 + 15 + 6 + 8 =$

$f(y) = \sum_{i} \left[\frac{p_i}{4} \right]$

$= 208 + 15 + 14 =$

$16 \cdot 9 = 144$

$= \boxed{237}$

Таким образом, функция - сумма целых частей простых делителей числа, деленных на 4

$f(1) = 0$, $f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$

$f(9) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = 1$

$f(15) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

9 - 0

16 - 1 = 0

$9 \cdot 16$

8 - 1 ; 8 -> 1

$8 \cdot 8$

3 - 2 ; 5 - 2

$3 \cdot 5$

2 - 3 ; 3 -> 3

$2 \cdot 3$

2 - 4 ; 1 -> 4

$2 \cdot 1$

$f(18) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = 1$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2$

$f(26) = 3$

$f(27) = 0$

$f(28) = 1$

ненулевые

$f(26) = 3$

$f(5) = 1$; $f(10) = 1$; $f(11) = 2$; $f(28) = 1$

$f(13) = 3$; $f(14) = 1$; $f(15) = 1$;

$f(19) = 4$; $f(17) = 4$; $f(21) = 1$; $f(22) = 2$

$f(23) = 5$; $f(25) = 2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-2 \cdot \frac{4}{3x-2} = 18x^2 - 51x + 28$

$18x^2 - 51x + 30 = \frac{4}{3x-2}$

$x-1$

$(y-6) - 6(x-1) =$

$= y - 6x$

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$x \in [4; 28]$ $p = 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23$

$y \in [4; 28]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Rightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(2) = 0$ $f\left(\frac{2}{y}\right) = f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{3}{y}\right) = f\left(\frac{1}{y}\right)$ $f(y) = f(y) + f(1)$

$f\left(\frac{1}{y}\right) + f(y) = f(1) = 0$

$f(y) = -f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(x) < f(y)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№3

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12} \geqslant x^2-26x+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

~~Логарифмируем неравенство по основанию 5.~~

$$\log_5 \left|x^2-26x\right|^{\log_5 12} \geqslant \log_5$$

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12} \geqslant \left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5(26x-x^2)}$$

Логарифмируем по основанию 5.

$$\log_5(26x-x^2)\cdot\log_5 12 \geqslant \log_5(26x-x^2)\cdot\log_5\frac{13}{5}$$

$$\log_5(26x-x^2)\cdot\left(\log_5 12-\log_5\frac{13}{5}\right)\geqslant 0$$

$$\log_5(26x-x^2)\cdot\log_5\frac{60}{13}\geqslant 0 \quad (1)$$

$$\log_5\frac{60}{13}>0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \log_5(26x-x^2)\geqslant 0$$

$$26x-x^2\geqslant 1$$

$$x^2-26x+1\geqslant 0$$

$$D=$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$(y-6x)^2=xy-6x-y+6$

$(y-6x)^2=x(y-6)-(y-6)$

$(y-6x)^2=(y-6)(x-1)$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$9(x-3)^2+(y-6)^2=90$

$\Downarrow$

$(3x-3)^2=0$; $(y-6)^2=0$

$x=1$ $\qquad$ $y=6$

Проверим подстановкой в первое уравнение:

$6-6=\sqrt{6-6-6+6}$

$0=0$ - верно.

Ответ: $(1;6)$.

$(9x^2-18x+9)+(y^2-12y+36)=0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(2\alpha + 2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\text{I} \quad \cos(2\alpha + 2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha + 2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

$$-\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{17}} + \frac{4\sin 2\beta}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

$$\text{II} \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \quad =$$

$$= 2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

1) $\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

2) $\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$

1) $2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

2) $2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha$

1) $5\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha = 0 \quad : \cos^2\alpha$

2) $-3\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + 5\sin^2\alpha = 0 \quad : \cos^2\alpha$

1) $5 + 2tg\alpha - 3tg^2\alpha = 0$

2) $-3 + 2tg\alpha + 5tg^2\alpha = 0$

1) $-3t^2 + 2t + 5 = 0$

$D = 4 + 60 = 64$

$t_1 = \frac{-2+8}{-6} = -1$

$t_2 = \frac{-2-8}{-6} = \frac{5}{3}$

2) $5t^2 + 2t - 3 = 0$

$t_1 = -1$

$t_2 = \frac{3}{5}$

Ответ: -1; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{3}$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)