МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$\boxed{tg\,\alpha - ?}$

т.к. известно, что $tg\,\alpha$ определён, то

$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ – ОДЗ.

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\cdot\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) =$
$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)$, тогда:

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$, тогда

по ОТТ: $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha$

Рассмотрим 2 случая:

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, тогда: $\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, тогда: $\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1 случай:

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$4 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$2\cos\alpha(4\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \text{ - не удв. ОДЗ} \\ 4\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \end{array}\right. \Rightarrow 4\sin\alpha + \cos\alpha = 0,$

тогда $tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$ - 1 значение $tg\,\alpha$

2 случай:

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4 \cdot 2\sin\alpha\cos\alpha - 1 + 2\sin^2\alpha = -1$

$2\sin\alpha(4\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ 4\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = 0 \text{ - 2 значение} \\ tg\,\alpha = -4 \text{ - 3 значение} \end{array}\right.$

все значения найдены.

Ответ: $tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$; $tg\,\alpha = 0$; $tg\,\alpha = -4$;

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2.

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$(3y - 2) - x(x-1) = \sqrt{(x-1)(3y-2)}$$

$$\begin{cases} a = 3y - 2 \\ b = x - 1 \\ a - 2b = \sqrt{ab} \end{cases} \Rightarrow a^2 - 4ab + 4b^2 = ab$$

$$a^2 - 5ab + 4b^2 = 0$$

$$D = 25b^2 - 16b^2 = 9b^2$$

$$a_1 = \frac{5b + 3b}{2} = 4b$$

$$a_2 = \frac{5b - 3b}{2} = b$$

$$(\pm\sqrt{D} = \pm\sqrt{9b^2} = \pm 3b)$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = b \\ 3y - 2 = x - 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 4b \\ 3y - 2 = 4x - 4 \end{cases} \end{array}\right.$$

$\Updownarrow$

$$\left[\begin{array}{l} y = \frac{x+1}{3} \\ y = \frac{4x-2}{3} \end{array}\right.$$

1) $$\begin{cases} y = \frac{4x-2}{3} \\ 3x^2 + 3\left(\frac{4x-2}{3}\right)^2 - 6x - 4\left(\frac{4x-2}{3}\right) - 4 = 0 \end{cases}$$

$$3x^2 + \frac{16x^2 - 16x + 4}{3} - 6x - \frac{16x - 8}{3} - 4 = 0$$

$$9x^2+16x^2-16x+4-18x-16x+8-12=0$$

$$25x^2-50x=0$$

$$25x(x-2)=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=-\frac{2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Проверка:

$(0; -\frac{2}{3})$

$-2 \overset{?}{=} \sqrt{2+2} \Rightarrow -2 \overset{?}{=} 2 \quad - \Rightarrow (0; -\frac{2}{3})$ - не подх.

$(2; 2)$

$2 \overset{?}{=} \sqrt{12-4-6+2} \Rightarrow 2 \overset{?}{=} \sqrt{4} \Rightarrow 2 \overset{?}{=} 2 \ + \Rightarrow$

$\Rightarrow (2; 2)$ - подх.

2) $\begin{cases} y=\frac{x+1}{3} \\ 3x^2+3\cdot\left(\frac{x+1}{3}\right)^2-6x-4\left(\frac{x+1}{3}\right)-4=0 \quad |\cdot 3 \end{cases}$

$$9x^2+x^2+2x+1-18x-4x-4-12=0$$

$$10x^2-20x-15=0 \quad |\cdot\frac{1}{5}$$

$$2x^2-4x-3=0 \Rightarrow D=16+24=40$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x_1 = \frac{4+2\sqrt{10}}{\cancel{2}4} = \frac{2+\sqrt{10}}{2}$

$x_2 = \frac{2-\sqrt{10}}{2}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{10}}{2} \\ y = \frac{4+\sqrt{10}}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{2-\sqrt{10}}{2} \\ y = \frac{4-\sqrt{10}}{6} \end{cases} \end{array}\right.$

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ a = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} b = -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ a = -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$

Проверка:

~~$3 \cdot \frac{4-\sqrt{10}}{6} - 2 \cdot \frac{2-\sqrt{10}}{2} \stackrel{?}{=}$~~

$a - 2b = \sqrt{ab}$

$\begin{cases} b = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ a = \frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}: \frac{\sqrt{10}}{2} - \sqrt{10} \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{10}}{2}$

$-\frac{\sqrt{10}}{2} \stackrel{?}{=} \frac{\sqrt{10}}{2}$ —

$\begin{cases} b = -\frac{\sqrt{10}}{2} \\ a = -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}: \Rightarrow -\frac{\sqrt{10}}{2} + \sqrt{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ +

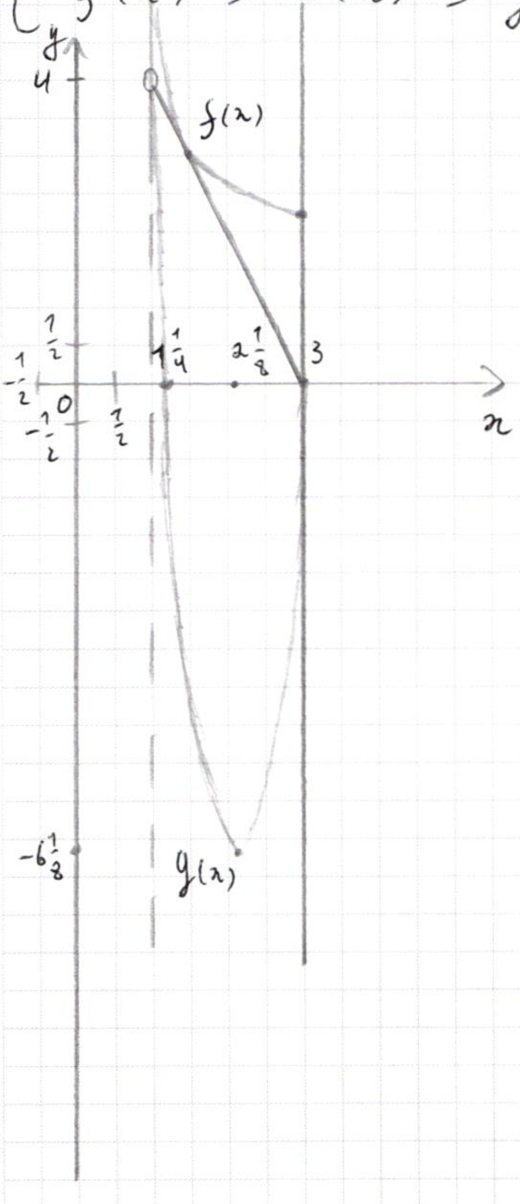
Ответ: $(2;2)$; $\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)$;

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№6.

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{4x-3}{2x-2} = 2+\dfrac{1}{2(x-1)} \\ g(x) = 8x^2-34x+30 = 8(x-1{,}25)(x-3) \\ h(x) = ax+b \\ f(x) \geq h(x) \geq g(x) \end{cases}$$



$g(x) = 8x^2-34x+30$

$x_{верш} = \dfrac{-(-34)}{2\cdot 8} = \dfrac{17}{8} = 2\dfrac{1}{8}$

$y_{верш} = -6\dfrac{1}{8}$

$f(3) = 2 + \dfrac{1}{2\cdot 2} = 2\dfrac{1}{4}$

$f\left(\dfrac{3}{2}\right) = 2+1=3$

$g(1)=4$

~~Допустим $h(x)$ проходит через точку $(1;4)$, тогда $b=4-a$ и $h(x)=ax+4-a$~~

~~Допустим $h(x)$ проходит через точку $(3;0)$~~

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $h(x)$ проходит через точки $(1;4)$ и $(3;0)$, тогда

$$\begin{cases} h(x) = 0 = 3a + b \\ h(x) = 4 = a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 4 - a \\ \cancel{a = -2} \\ 0 = 3a + 4 - a \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 6 \end{cases} \quad h(x) = -2x + 6$$

Это функция $h(x)$, граничущая с параболой $g(x)$

Докажем, что $h(x) = -2x + 6$ - касается гиперболы $f(x)$, тогда решение $\begin{cases} a = -2 \\ b = 6 \end{cases}$ будет единственное, при котором выполняется данное неравенство

$f'(x) = -\dfrac{1}{2(x-1)^2}$, Пусть прямая касается $f(x)$ в точке x_0, тогда $y_{кас} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

$$y_{кас} = 2 + \frac{1}{2(x_0-1)} - \frac{1}{2(x_0-1)^2}(x - x_0) = ax + b$$

тогда очевидно, что $a = -\frac{1}{2(x_0-1)^2}$,

тогда: $2 + \frac{1}{2(x_0-1)} + \frac{x_0}{2(x_0-1)^2} = b$

если $h(x) = y_{кас} = -2x+6$, тогда

оба равенства дадут один и тот же ответ:

$$\begin{cases} 4(x_0-1)^2 = 1 \\ 2 + \frac{1}{2(x_0-1)} + \frac{x_0}{2(x_0-1)^2} = 6 \end{cases} \Rightarrow x_0 = 1{,}5;\ 0{,}5$$

но $x_0 = 0{,}5$ не подх., т.к. ~~это~~ точка, принадлежащая нижней части гиперболы $x \in (1; 3]$

$\Downarrow$

$x_0 = 1{,}5$

подставим $x_0 = 1{,}5$ во второе равенство

$$2 + \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} + \frac{\frac{3}{2}}{2 \cdot \frac{1}{4}} =$$

$$= 2 + 1 + 3 = 6 \quad +$$

Оба равенства выполняются $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ прямая $h(x) = -2x+6$ проходит через граничные точки параболы и касается гиперболы $\Rightarrow$ остальные a и b не подходят, т.к. хотя бы 1 неравенство

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

будет не выполнено

Ответ: a существует только 1 пара $(-2; 6)$;

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$$

$$\begin{cases} x^2+6x = a > 0 \\ 3^{\log_4 a} + a^{\log_4 4} \geq a^{\log_4 5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^{\log_4 a} + 4^{\log_4 a} \geq 5^{\log_4 a} \\ \log_4 a = b \end{cases}$$

$$3^b + 4^b \geq 5^b$$

$f(b) = 3^b + 4^b$ - возрастающая ф-я

$g(b) = 5^b$ - возрастающая ф-я

по Т. Ферма $f(\cancel{b}) = g(\cancel{b})$ ~~только~~

будет выполнятся только при $b=2$

проверка: $3^2 + 4^2 \stackrel{?}{=} 5^2$

$$25 \stackrel{?}{=} 25 \ +$$

и больше эти ф-ии не пересекутся =>

=> если при какой-то $b \in (2; +\infty)$

$f(b) < g(b)$, то $f(b) < g(b)$ на всём промежутке $(2; +\infty)$

$f(3) = 3^3 + 4^3 = 27 + 64 = 91$

$g(3) = 125$

$$91 < 125 \Rightarrow f(3) < g(3)$$

$f(0) = 3^0 + 4^0 = 2$

$g(0) = 5^0 = 1$

$\Rightarrow 1 < 2 \Rightarrow g(0) < f(0)$

$\Downarrow$

неравенство будет выполнятся при $b \in (-\infty; 2]$

$$\begin{cases} b = \log_4 a \\ a = 6x + x^2 \\ b \in (-\infty; 2] \end{cases} \Rightarrow \log_4(x^2 + 6x) \leq 2$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_4(x^2+6x) \le \log_4 16$

$x^2+6x-16 \le 0$ ОДЗ: $x^2+6x>0$

$x^2+2\cdot3\cdot x+3^2-25\le0$ $x(x+6)>0$

$(x+3)^2-25\le0$ $x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

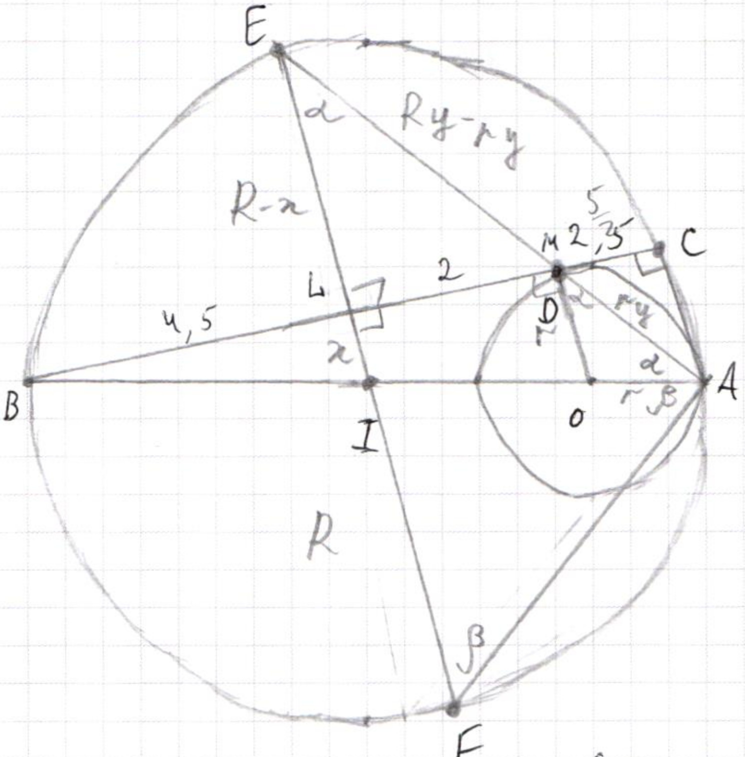
$(x+3-5)(x+3+5)\le0$

$(x-2)(x+8)\le0$

$\begin{cases} x\in[-8;2] \\ \text{ОДЗ} \end{cases} \Rightarrow x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

Ответ: $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$;

№4.



$$\frac{AC}{x} = \frac{2R}{R} = 2$$

$$AC = 2x = \frac{2rR}{2R-r}$$

$$\frac{AC}{x} = \frac{9}{BL}$$

$$\cancel{\frac{AC}{x} = \frac{2R}{2R-r} = \frac{9}{4,5}}$$

$$\cancel{R = 2R - r}$$

$$\cancel{R = r}$$

Ответ: $R_\Omega = \frac{39}{8}$; $r_\omega = \frac{65}{24}$; $\angle AFE = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$;

$$x = \frac{rR}{2R-r}$$

$$\frac{AM}{AE} = \frac{r}{R} = \frac{5}{9}$$

$$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{\frac{9\sqrt{13}}{4}}{\frac{39}{4}}\right) = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{13}}{13}\right)$$

$$\frac{r}{x} = \frac{2R-r}{\cancel{r}R} \cdot \frac{\cancel{r}R}{2R-r} = \frac{6,5}{4,5} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{9}{2}}$$

$$AM = \frac{5}{9}AE$$

$$\frac{5}{9}AE \cdot \frac{4}{9}AE = \frac{5}{2} \cdot \frac{13}{2}$$

$$\cancel{9r = 26R - 13r}$$

$$AE^2 = \frac{81 \cdot 13}{16} \quad r = \frac{65}{24}$$

$$\cancel{22r = 26R}$$

$$R = \frac{39}{8}$$

$$AE = \frac{9}{4}\sqrt{13}$$

$$\cancel{r = \frac{13}{11}R}$$

$$BO = 2R - \frac{9}{5}r = \quad \frac{144}{25}r^2 = \frac{169}{4}$$

$$\frac{2R-r}{R} = \frac{13}{9}$$

$$= \frac{2 \cdot 9}{5}r - r = \frac{13}{5}r \quad r = \frac{5 \cdot 13}{12 \cdot 2}$$

$$18R - 9r = 13R$$

$$BO = \frac{169}{25}r^2 = r^2 + \frac{169}{4}$$

$$5R = 9r \Rightarrow R = \frac{9}{5}r$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [\frac{p}{4}]$, p - простое

если a, b - не простые, то

ф-ю f можно считать функцией

log по какому-то осн. C

$\log_C(ab) = \log_C a + \log_C b$

причем если $p = 2$

$f(2) = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sim 3 \cdot \sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3} = 2\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$

$\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{4}$

~~log~~ $x^2+6x = a \quad (a>0)$

$3^{\log_4 a} + a \geq |a|^{\log_4 5}$

$\frac{1+\sqrt{3}}{2} = 2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}$

$3^{\log_4 a} + a \geq a^{\log_4 5}$

$\sin\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{4}$

$a^{\log_4 3} + a \geq a^{\log_4 5}$

$\frac{3\pi}{12} + \frac{2\pi}{12} =$

$a^{\log_4 3} + a^{\log_4 4} \geq a^{\log_4 5}$ Si

$3^{\log_4 a} + 4^{\log_4 a} \geq 5^{\log_4 a}$

$\log_4 a = b$

$3^b + 4^b \geq 5^b$

по Т. Ферма равенство достигается при $b=2$ и только при нём.

$$\ln(3^b + 4^b) \geq \ln 5^b$$

$$\ln(3^b + 4^b) \geq b \ln 5$$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$$\boxed{tg\,\alpha = ?}$$

$$\begin{cases} \sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2(\alpha+2\beta)) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$$\sin(2(\alpha+\beta)+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)$$

$$\|$$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$$

$$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$$

$$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\cancel{2\cos}\ \ \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

1) $$\begin{cases} \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$\cos 2\alpha - 4\sin 2\alpha = 1$

$1 - 2\sin^2\alpha - 8\sin\alpha\cos\alpha = 1$

$2\sin\alpha(\overset{\sin\alpha}{\cancel{1}} + 4\cos\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = \pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ \sin\alpha + 4\cos\alpha = 0 \end{array}\right.$

т.к. $tg\,\alpha$ – определён, то $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n\in\mathbb{Z}$

$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -4 \\ tg\,\alpha = 0 \end{array}\right.$ (при $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$)

2) $\left\{\begin{array}{l} \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$

$4\cdot 2\cdot \sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$2\cos\alpha(4\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\cos\alpha = 0$ (но т.к. $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n\in\mathbb{Z}$) $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ есть только 1 решение $4\sin\alpha + \cos\alpha = 0$

$4\,tg\,\alpha = -1 \Rightarrow tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$

Ответ: $tg\,\alpha = 0$; $tg\,\alpha = -4$; $tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$;

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2.

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2-6x+1+3y^2-4y=5 \end{cases}$$

$$3(x-1)^2+y(3y-4)=5$$

$$3x^2-6xy+3y^2=3(x-y)^2$$

$$3(x-y)^2+6xy-6x-4y=4$$

$$3xy-2x-3y+2=3y(x-1)-2(x-1)=$$

$$=(x-1)(3y-2)$$

$$3y-2x=-2(x-1)-2+3y=(3y-2)-2(x-1)$$

$$\boxed{\begin{cases} 3y-2=a \\ x-1=b \end{cases}}$$

$$a-2b=\sqrt{ab}$$

$$a^2-4ab+4b^2=ab$$

$$a^2-5ab+4b^2=0$$

$$D=25b^2-16b^2=9b^2$$

$$a=\frac{5b\pm3b}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=b \end{array}\right.$$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\left[\begin{array}{l} a = 4b \\ a = b \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} 3y - 2 = a \\ x - 1 = b \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 4b \\ 3y - 2 = 4x - 4 \end{cases} \\ \begin{cases} a = b \\ 3y - 2 = x - 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 4b \\ y = \frac{4x-2}{3} \end{cases} \\ \begin{cases} a = b \\ y = \frac{x+1}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

1) $$\begin{cases} 3x^2 + 3\left(\frac{4x-2}{3}\right)^2 - 6x - 4\cancel{y}\left(\frac{4x-2}{3}\right) = \cancel{6} \\ y = \frac{4x-2}{3} \end{cases}$$

$$3x^2 + \frac{16x^2 - 16x + 4}{3} - 6x - 4 \cdot \frac{4x-2}{3} = 4 \,/\cdot 3$$

$$9x^2 + 16x^2 - 16x + 4 - 18x - 16x + 8 - \overset{12}{\cancel{4}} = 0$$

$$25x^2 - 50x \cancel{+8} = 0$$

$$25x\,(x - 2) = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -\frac{2}{3} \\ x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = 2 \\ x = 2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Проверка:

$(0; -\frac{2}{3})$

$-2 - 0 \overset{?}{=} \sqrt{2 + 2}$

$-2 \overset{?}{=} 2 \Rightarrow -$

$(2; 2)$

$2 \overset{?}{=} \sqrt{12 - 4 - 6 + 2} \Rightarrow 2 = 2 \; +$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_c(ab) = \log_c(a) + \log_c(b)$

при $x = 3$

$\log_c(ab) = 0$

$ab = 1$

$\log_c(l) < 0$

$l = \frac{x}{y}$

$l < 1$

$\log_c(3) = 0$

$f(3) = 0$

$f(2) = 0$

$f(6) = 0$

$$\frac{4(x-1)+1}{2(x-1)} = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$$

$$8x^2-34x+30 = 2(4x^2-17x+15)$$

$$D = 289-240 = 49$$

$$x = \frac{17+7}{8} = 3$$

$$x = \frac{5}{4} \qquad 8x^2-34x+30 = 8\left(x-\frac{5}{4}\right)(x-3)$$

$$x_{верш} = \frac{34}{16} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$$

$$8x^2-34x+30 =$$

$$y_{верш} = 8\cdot\frac{7}{8}\cdot\left(-\frac{7}{8}\right) =$$

$$= -\frac{49}{8} = -6\frac{1}{8}$$

$$2 + \frac{1}{2(x-1)} = 8x^2-34x+30$$

$$8\cdot -\frac{1}{4}\cdot -2 = 8\cdot\frac{1}{2} = 4$$

$$8-34+30 = 4$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin x + \cancel{\cos}\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

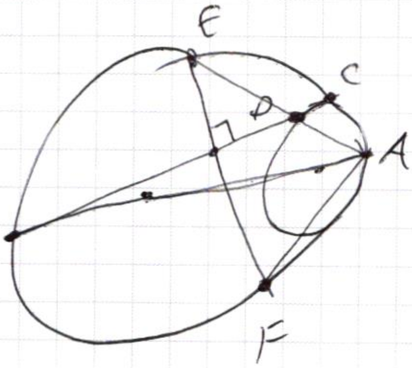
$\sin\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$

$2\cdot\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{12}$

$\cos\frac{\pi}{6} = 2\cos^2\frac{\pi}{12} - 1$

$\cos\frac{\pi}{12} = \sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{4}} = \frac{\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$

$\frac{\sqrt{3}+1}{2} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{\sqrt{3}+2}}{2}$



$3 + 2\sqrt{3} + 1 = 2(\sqrt{3}+2)$

$4 + 2\sqrt{3} = 4 + 2\sqrt{3}$

$3^{\log_3 5} = 5$

☐ черновик ☐ чистовик

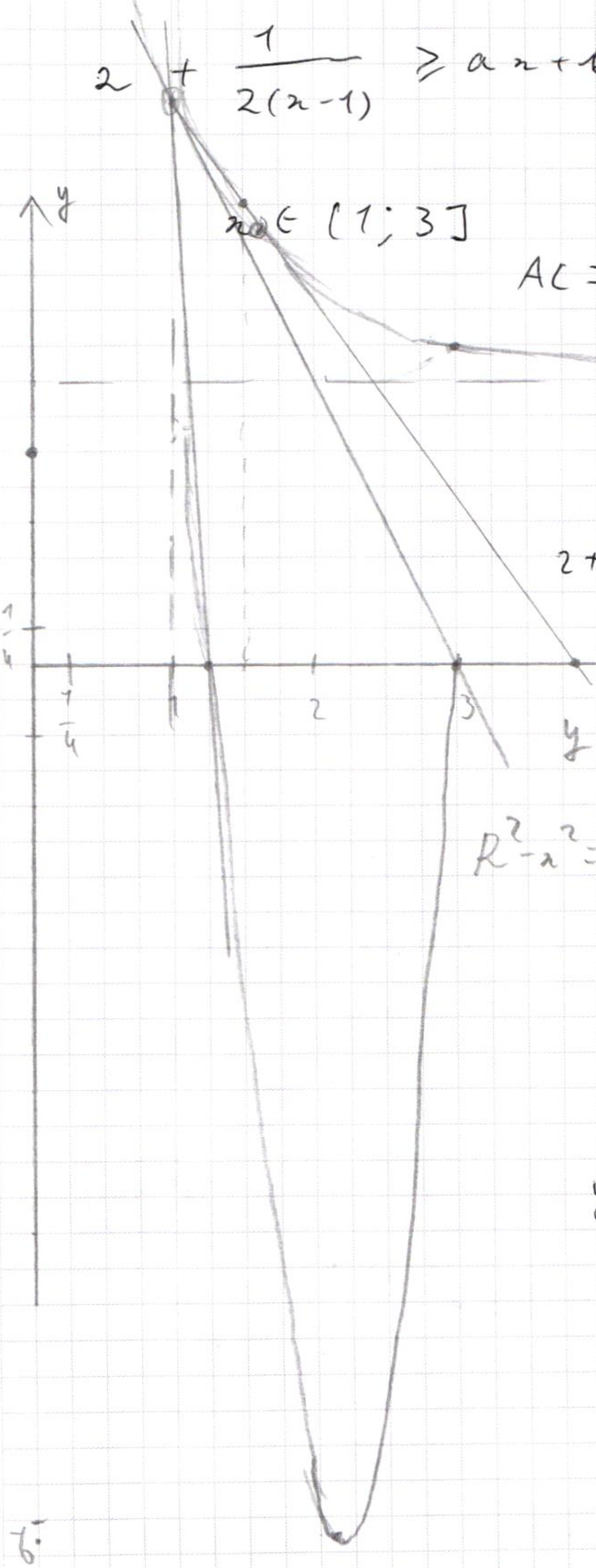
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{2R-r}{R}=\frac{r}{x} \quad x=\frac{rR}{2R-r}$$

$$2+\frac{1}{2(x-1)} \geq ax+b \geq 8\left(x-\frac{5}{4}\right)(x-3)$$



$x_0 \in [1;3]$

$4=a+b$

$AC=\frac{rR}{2R-r}$.

$b=4-a$

$y=ax+4-a$

$0=3a+4-a$

$2+\frac{1}{2\cdot\frac{1}{2}}=3$

$a=-2$

$y(R-r)\cdot ry=\frac{65}{2}$

$R^2-x^2=$

$$2+\frac{1}{2(x-1)}=f(x)$$

$$f'(x)=-\frac{2\cdot 1}{4(x-1)^2}=-\frac{1}{2(x-1)^2}$$

$$y_{кас}=2+\frac{1}{2(x_0-1)}-\frac{1}{2(x_0-1)^2}(x-x_0)$$

$$4-a=2+\frac{1}{2(x_0-1)}+\frac{x_0}{2(x_0-1)^2}$$

$$a=-\frac{1}{2(x_0-1)^2} \qquad a=-\frac{1}{2\cdot\frac{1}{4}}=$$

$$=-\frac{1}{\frac{1}{2}}=-2$$

$b=6$

$$4+\frac{1}{2(x_0-1)^2}=2+\frac{1}{2(x_0-1)}+\frac{x_0}{2(x_0-1)^2}$$

$$2-\frac{1}{2(x_0-1)^2}=\frac{1}{2(x_0-1)}$$

$2(x_0-1)=1$

$\boxed{x_0=1{,}5}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) $\begin{cases} y = \frac{x+1}{3} \\ 3x^2 + 3\left(\frac{x+1}{3}\right)^2 - 6x - 4\left(\frac{x+1}{3}\right) = 4 \end{cases}$

$3x^2 + \frac{x^2+2x+1}{3} - 6x - 4\cdot\frac{x+1}{3} = 4 \;/\cdot 3$

$9x^2 + x^2 + 2x + 1 - 18x - 4x - 4 - 12 = 0$

$10x^2 - 20x - 15 = 0 \quad /\cdot\frac{1}{5}$

$2x^2 - 4x - 3 = 0$

$D = 16 + 4\cdot2\cdot3 = 16 + 24 = 40$

$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{4} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{2}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{10}}{2} \\ y = \frac{4+\sqrt{10}}{6} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{2-\sqrt{10}}{2} \\ y = \frac{4-\sqrt{10}}{6} \end{cases} \end{array}\right.$

Проверка:

$\left(\frac{2+\sqrt{10}}{2}; \frac{4+\sqrt{10}}{6}\right)$

$\cancel{\frac{6+3\sqrt{10}}{2}}$

$\begin{cases} x = \frac{2+\sqrt{10}}{2} \\ b = \frac{\sqrt{10}}{2} = a \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{2-\sqrt{10}}{2} \\ b = -\frac{\sqrt{10}}{2} = a \end{cases}$

$\cancel{y = }\frac{4+\sqrt{10}}{6}$ Проверка: $a = b = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$\frac{\sqrt{10}}{2} - 2\frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{10}}{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{2}}$

$-\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ —

$a = b = -\frac{\sqrt{10}}{2}$

$-\frac{\sqrt{10}}{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{10}}{2} = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)}$

$\frac{\sqrt{10}}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$ $+ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{2-\sqrt{10}}{2} \\ y = \frac{4-\sqrt{10}}{6} \end{cases}$

Ответ: $(2; 2)$; $\left(\frac{2-\sqrt{10}}{2}; \frac{4-\sqrt{10}}{6}\right)$;

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$\cancel{f}$ $\underbrace{\left[\frac{ab}{4}\right]}_{x} = \underbrace{\left[\frac{a}{4}\right]}_{y} + \underbrace{\left[\frac{b}{4}\right]}_{z}$

$\cancel{b}$ $b = 4 \cdot \cancel{y}_z + r_1$

$a = 4 \cdot y + r_2$

$ab = 4 \cdot x + r_3$

□ черновик □ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)