



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения  $\operatorname{tg} \alpha$ , если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}.$$

4. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Прямая, проходящая через точку  $E$  перпендикулярно  $BC$ , повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $F$ . Найдите радиусы окружностей, угол  $AFE$  и площадь треугольника  $AEF$ , если известно, что  $CD = \frac{15}{2}$ ,  $BD = \frac{17}{2}$ .

5. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/4]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $2 \leq x \leq 25$ ,  $2 \leq y \leq 25$  и  $f(x/y) < 0$ .

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[\frac{1}{4}; 1]$ .

7. [6 баллов] Дана пирамида  $KLMN$ , вершина  $N$  которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра  $KN$ . Известно, что  $KL = 3$ ,  $KM = 1$ ,  $MN = \sqrt{2}$ . Найдите длину ребра  $LM$ . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$10x + |x^2 - 10x| \log_3 4 \geq x^2 + 5 \log_3(10x - x^2) \quad 0 \leq x \leq 10$$

при  $x \in (0; 10)$

$$x^2 - 10x < 0$$

$$10x + (10x - x^2) \log_3 4 \geq x^2 + 5 \log_3(10x - x^2)$$

$$x^2 - 10x + 1 \log_3(10x - x^2) \leq 0$$

$$x^2 - 10x + (10x - x^2)^0 \leq 0$$

$$x^2 - 10x + 1 \leq 0$$

$$D = 96 \quad x_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6} \quad 5 - 2\sqrt{6} > 0$$

$$5 + 2\sqrt{6} < 10$$

Ответ:  $x \in [5 - 2\sqrt{6}; 5 + 2\sqrt{6}]$

$$f(a) + f(b) = f(ab)$$

$$f(p) = \left[ \frac{p}{4} \right]$$

$$f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = f(1) = 0$$

$$f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) - f(b) \quad \leftarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$$

$$f(2) = 0 \quad f(6) = f(2) + f(3) = 0 \quad f(11) = 2$$

$$f(3) = 0 \quad f(7) = 1 \quad f(12) = f(6) + f(2) = 0$$

$$f(4) = f(2) + f(2) = 0 \quad f(8) = f(4) + f(2) = 0 \quad f(13) = 3$$

$$f(5) = 1 \quad f(9) = f(3) + f(3) = 0 \quad f(14) = f(7) + f(2) = 1$$

$$f(10) = f(2) + f(5) = 1 \quad f(15) = f(5) + f(3) = 1$$

$$\begin{aligned}
 f(16) &= f(8) + f(2) = 0 & f(21) &= f(7) + f(3) = 1 \\
 f(17) &= 4 & f(22) &= f(11) + f(2) = 2 \\
 f(18) &= f(9) + f(2) = 0 & f(23) &= 5 \\
 f(19) &= 4 & f(24) &= f(12) + f(2) = 0 \\
 f(20) &= f(5) + f(4) = 1 & f(25) &= f(5) + f(5) = 2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \neq (5, 7, 10, 14, 18, 20, 21) = 1 & 7 & \\
 & (11, 22, 25) = 2 & 3 & \\
 & (14, 19) = 4 & (13) = 3 & 1 \\
 & (2, 3) = 5 & 2 & \\
 & & 4 & \\
 & \text{итого} = 0 & \text{итого} & \\
 & 10 & &
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \underbrace{5}_{x} \cdot \underbrace{23}_{y} = f\left(\frac{x}{y}\right) = -4 \\
 & 1) \quad \cancel{18} / \cancel{1} \cdot \cancel{29} = \cancel{274} \quad / \quad \cancel{1000} / \cancel{25} \\
 & 2) \quad 2 \cdot \dots
 \end{aligned}$$

① ~~...~~  $f(x) \neq 5 \quad f(y) = 5$

$$23 \cdot 1 = 23$$

② ~~...~~  $f(x) \neq (4, 5) \quad f(y) = (4)$

$$2 \cdot 21 = 42$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} + \textcircled{3} + \textcircled{4} + \textcircled{5} = 216$$

③  $f(x) \neq (3, 4, 5) \quad f(y) = 3$

Ответ: 216 пар.

$$1 \cdot 20 = 20$$

④  $f(x) \neq (2, 3, 4, 5) \quad f(y) = 2$

$$3 \cdot 17 = 51$$

⑤  $f(x) \neq (1, 2, 3, 4, 5) \quad f(y) = 1 \quad 4 \cdot 10 = 40$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

√6

если начертить графики функций, то прямая должна находиться ниже  $f_1(x)$  и выше  $f_2(x)$ .

$$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$$

$$f_1(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$$

$$f_2(x) = -32x^2+36x-3$$

$$f_1(1) = 0 \quad f_1\left(\frac{1}{4}\right) = 3$$

$$f_2(1) = 1 \quad f_2\left(\frac{1}{4}\right) = 4$$

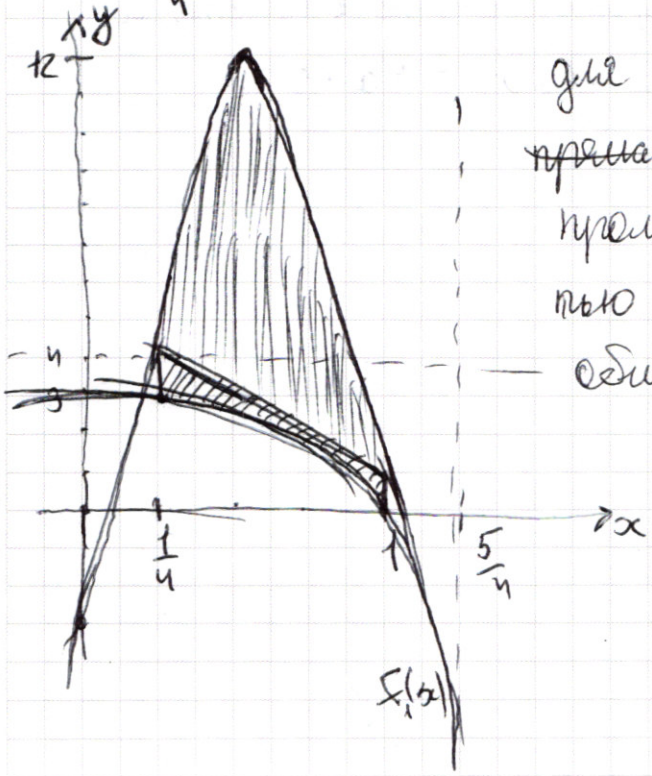
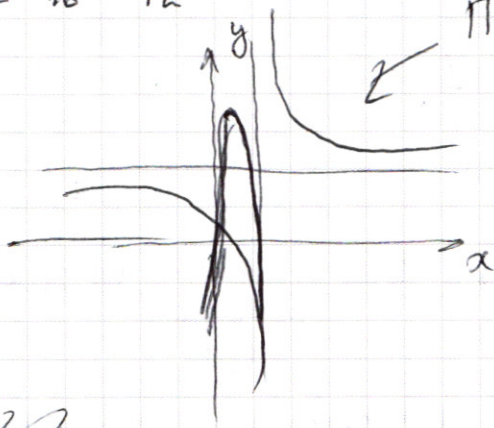
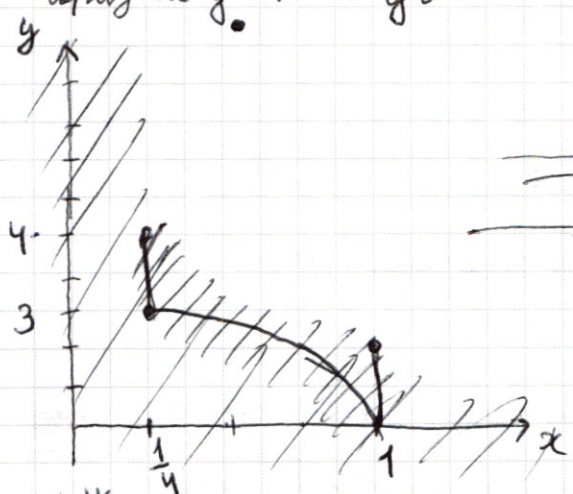
верим ас  $x = \frac{5}{4}$

$$xb = \frac{-36}{64} = \frac{9}{16}$$

горизонт ас  $y = 4$

$$yb = \frac{195}{16} \approx 12$$

ПРИМЕРНЫЕ  
графики  
 $f_1(x)$   $f_2(x)$



для удовлетворения условия прямая  $ax+b$  ~~должна~~ на промежутке  $[\frac{1}{4}; 1]$  должна полностью лежать в заштрихованной области; это возможно ~~только~~ только при



$f_3(x)$  — прямая соeq.  $\{4\frac{1}{4}; 4\}$  и  $\{1; 1\}$   $f_3(x) = -4x + 5$

Посмотрим пересекает ли наша гипербола прямую  $f_3(x)$

$$\frac{16x-16}{4x-5} = -4x+5$$

$$16x-16 = (-4x+5)(4x-5)$$

~~$$16x-16 = -(4x-5)^2$$
$$16x^2 - 24x + 9 = 0$$
$$(4x-3)^2 = 0$$
$$x = \frac{3}{4}$$~~

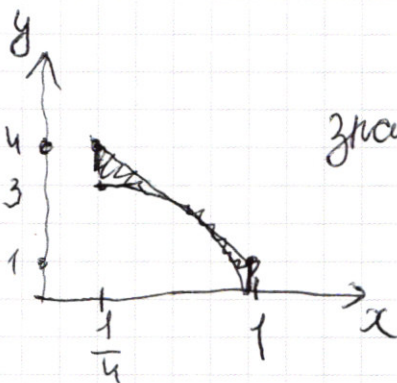
$$16x^2 - 24x + 9 = 0$$

$$(4x-3)^2 = 0$$

$$x = \frac{3}{4}$$

в точке  $x = \frac{3}{4}$  они касаются

$$f_1\left(\frac{3}{4}\right) = 2 \quad f_3\left(\frac{3}{4}\right) = 2$$



значит картинка выглядит так

существует одна прямая проходящая через заштрихованную область и это прямая  $f_3(x) = -4x + 5$

Ответ:  $a = -4; b = 5$   $(-4; 5)$

$$x - 12y = \sqrt{2y(x-6)} - (x-6)$$

~~$$x - 12y = \sqrt{2y(x-6)} - (x-6)$$~~

$$x - 12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)}$$

~~$$x(x-12) + 36y(y-1) = 48$$~~

~~$$x^2 - 12xy + 36y^2 - 36y = 48$$~~

$$10x + |x^2 - 10x| \log_3 4 \geq x^2 + 5 \log_3(10x - x^2)$$

$$I \quad x(x-10) \geq 0 \quad x \in (-\infty; 0] \cup [10; +\infty)$$

$$10x - x^2 \geq 0$$

$$x(10-x) \geq 0$$

решений нет

$$- \quad 0 \quad + \quad 0 \quad -$$

$$x \in (0; 10)$$

~~$$10/x - 4 \log_3 10x - x^2 \geq x^2 + 5 \log_3(10x - x^2)$$~~

~~$$x^2 - 10x + 9 \log_3 10x - x^2 \leq 0$$~~

~~$$x^2 - 10x$$~~

$$\frac{2,5}{2,5} = 6,25$$

~~$$x^2 - 10x < 0$$~~

$$x \in (0; 10) \quad x^2 - 10x < 0$$

$$10x + 4 \log_3 4 \geq x^2 + 5 \log_3 4$$

$$x^2 - 10x + 1 \leq 0$$

$$x^2 - 10x + 1 \leq 0$$

$$x^2 - 10x + 1 \leq 0 \quad D = 100 - 4 = 96$$

$$32 \cdot 3 = 96 = 4\sqrt{6}$$

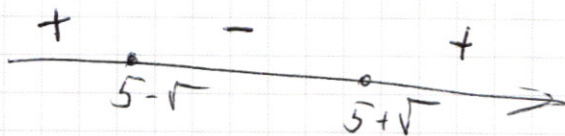
$$6 \cdot 16$$

$$x_{1,2} = \frac{10 \pm 4\sqrt{6}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{6} \approx 3,5 <$$

$$5 + 2\sqrt{6} < 10$$

$$5 - 2\sqrt{6} > 0$$

$$\text{Ответ: } (x - 5 - 2\sqrt{6})(x + 5 - 2\sqrt{6}) \leq 0$$



Ответ:

$$x \in [5 - \sqrt{6}; 5 + \sqrt{6}]$$



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\sin(\alpha + \beta) \cos(\alpha + \beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$   
 $\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$2 \sin(\alpha + 2\beta) \cos(\alpha + 2\beta) + 2 \sin \alpha \cos \alpha = -\frac{2}{5}$$

2) 
$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 36y^2 - 12x - 36y - 45 = 0 \\ x^2 - 26xy + 144y^2 + 12y + x - 6 = 0 \end{cases}$$

$x^2 - 12x + 36y^2 - 36y - 45 = 0$   
 $x^2 - 12x + 36y(y - 1) - 45 = 0$   
 $D = 144 - 144y^2 + 144y + 180 = 324 - 144y^2 + 144y = 10$   
 $= -144y^2 + 144y + 324 = -36(4y^2 - 4y - 9)$   
 $D = 16 + 144 \sqrt{160} = 4\sqrt{10}$

$$\begin{cases} x^2 + x - 26xy + 144y^2 + 12y - 6 = 0 \\ x^2 + (1 - 26y)x + 6(26y^2 + 2y - 1) = 0 \\ x^2 - 12x + 9(4y^2 - 4y - 5) = 0 \end{cases}$$

$108y^2 + 13x + 42y + 39 - 26xy = 0$   
 $108y^2 + 2y(24 - 13x) + 13x + 39 = 0$   
 $D = 4(24 - 13x)^2 - 52x - 156 - 432 = 676x^2 - 1300x + 1796$

1 2 3 4 5 6 7

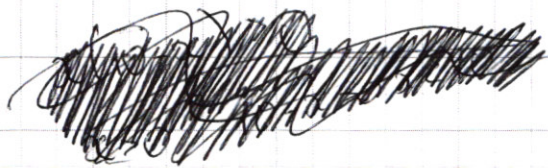
$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y - 45 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + 36y^2 - 12x - 36y - 45 = 0 \\ x^2 - 26xy + 144y^2 + 12y + x - 6 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 12y)^2 - (2y - 1)(x - 6) = 0 \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y - 45 = 0 \end{cases}$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0 \end{cases}$$



$$(x-6)(x+6)$$

$$(x-12y)^2 = 2xy - 12y - x + 6$$

$$x^2 - 24xy + 144y^2 - 2xy + 12y + x - 6 = 0$$

$$x^2 + 144y^2 - 26xy + 12y + x - 6 = 0 \quad x^2 + 36y^2 - 12x - 36y - 45 = 0 \quad | \cdot 4$$

$$4x^2 - 104xy + 144y^2 - 108y + 4x - 24 = 0$$

$$\begin{cases} (x+12y)^2 - (2y-1)(x-6) = 0 \\ = 0 \end{cases}$$

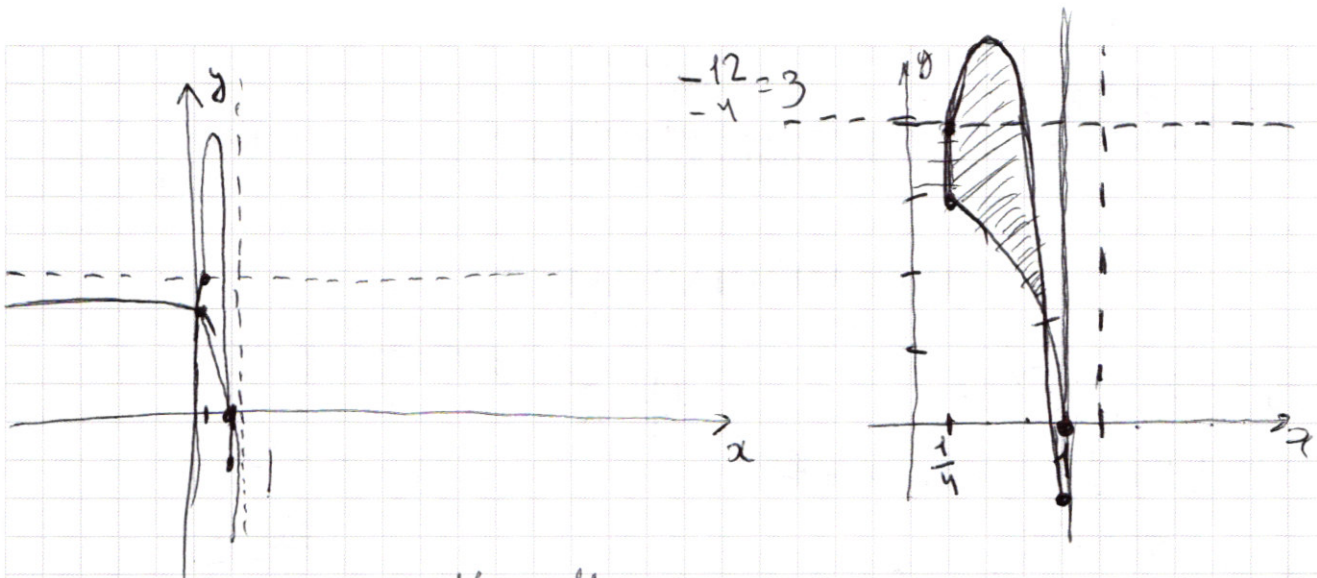
$$\sin(2(\alpha+\beta)) = -\sqrt{\frac{1}{5}}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

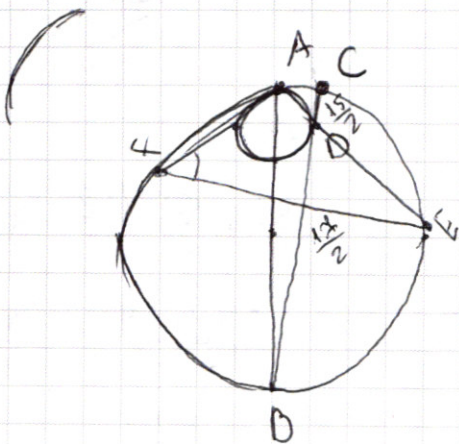
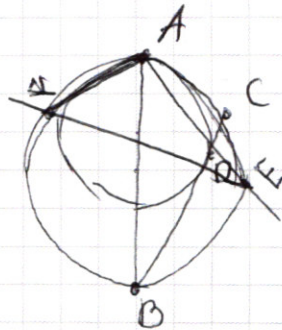
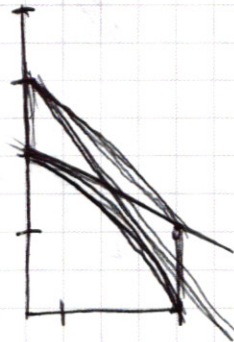
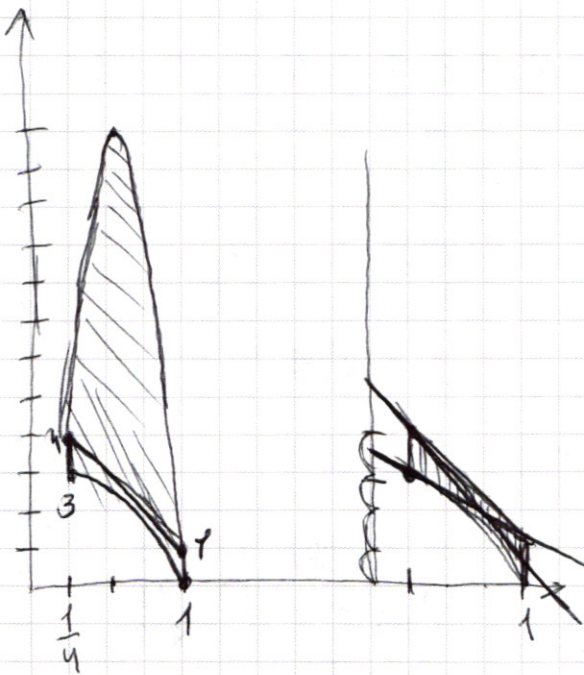
$$\sin(2\alpha+4\beta) = 2 \sin(\alpha+2\beta) \cos(\alpha+2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$2(\sin(\alpha+2\beta) + \sin \alpha \cos \alpha) = -\frac{2}{5}$$

$$\sin^2(\alpha+2\beta) = \sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) + \sin \alpha \cos \alpha$$



$$-32x^2 + 36x - 3 = \frac{16x - 16}{4x - 5}$$



### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$f(p) = \left[ \frac{p}{4} \right] \quad p - \text{простое}$$

$$\frac{11}{4} = 2$$

$$\frac{12}{4} = 3$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

$$\frac{9}{4} = 2$$

~~$f(4) + f(8) = f(32)$~~ 

$$f(4) + f(8) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f(29) + f(3)$$

~~$f(2) + f(2) + f(2) + f(2)$~~

$$2 \quad 3 \quad 5 \quad 7 \quad 11 \quad 13 \quad 17 \quad 19 \quad 23$$

$$f\left(\frac{4}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{5}{4}\right) + f\left(\frac{7}{10}\right)$$

$$\frac{2 \cdot 3}{19}$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\frac{3}{16}$$

$$\frac{9}{16}$$

$$\frac{16}{16}$$

$$25$$

~~$f(4) + f(8)$~~

$$1 +$$

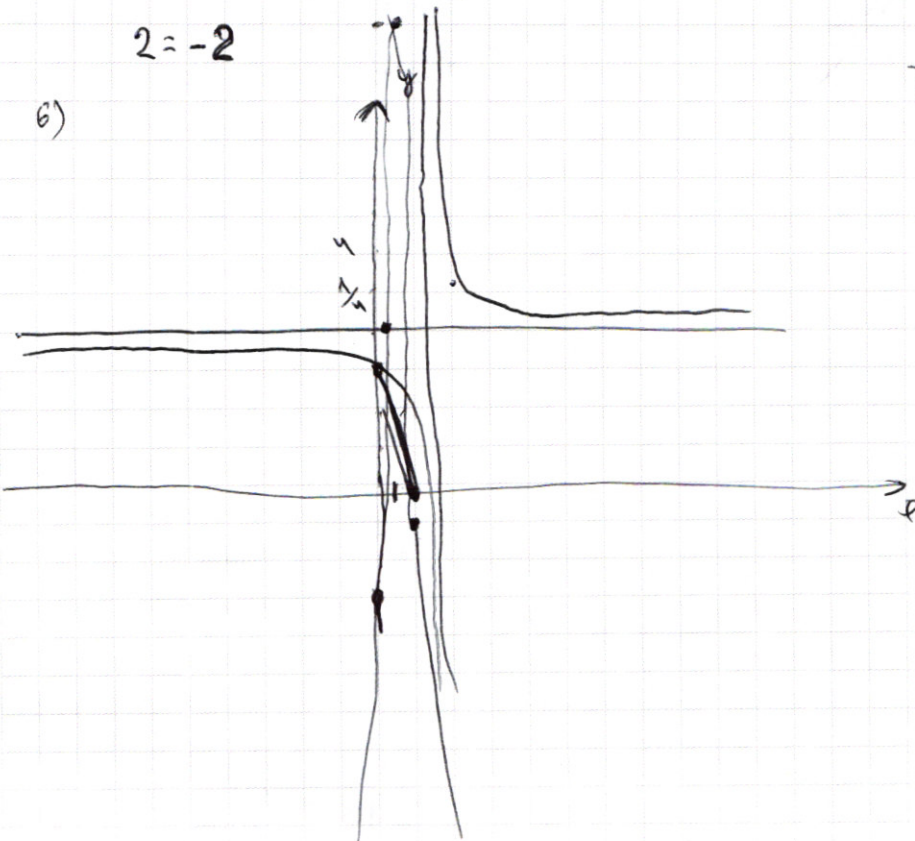
$$f(5) + f(5) = f(-5) + f(-5)$$

$$\begin{matrix} \text{"} & \text{"} & \text{"} & \text{"} \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{matrix}$$

$$-2 + 9 - 3 = 4$$

$$2 = -2$$

6)



$$\frac{36}{64} = \frac{9}{16}$$

$$\frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$

$$\frac{9}{16}$$

$$- \frac{81}{256} + \frac{26 \cdot 9}{16} = -3$$

$$\frac{81}{16} + \frac{162}{16} = 3$$

$$\frac{81}{16} + \frac{162}{16} = 3$$

$$\frac{243 - 48}{16} = \frac{195}{16} = 12,1$$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(a) + f(b) = f(ab)$$

$$f(p) = \left[ \frac{p}{4} \right]$$

$$f\left(\frac{5}{3}\right) = \cancel{f(5)} + \cancel{f(3)} = f(5) + f\left(\frac{1}{3}\right)$$

~~x~~ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 23 25

$$f\left(\frac{1}{7}\right) = f(7) + f\left(\frac{1}{7}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{5}\right) + f\left(\frac{5}{7}\right)$$

$$f\left(\frac{1}{14}\right) + f(2)$$

$$f\left(\frac{1}{21}\right) + f(3)$$

$$f\left(\frac{1}{35}\right) + f(5)$$

15 Ombem: ○

$$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$$

$$+ 2\sin 2\alpha \cos^2 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha (\cos 4\beta + \cos^2 2\alpha + 1) = -\frac{2}{5}$$

$$\sin 2\alpha (1 - 2\cos^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + 1)$$

$$\sin 2\alpha (2 - \cos^2 2\alpha) = -\frac{2}{5}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\text{about } (-3) + \dots$$

$$2\sin \alpha \cos \beta \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2\sin \alpha \cos \beta \cos 4\beta + 4\sin \alpha \cos \beta \cos 2\beta \cos 4\beta + \dots$$

$$+ 2\sin \alpha \cos \beta = -\frac{2}{5}$$

$$2\cos \beta (\sin \alpha \cos 2\beta + \cos \beta \cos 2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2\sin \alpha \cos \beta \cos 4\beta (1 + 2\cos 2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$f\left(\frac{6}{25}\right) f\left(\frac{6}{25}\right) = -f\left(\frac{25}{6}\right)$$

$$f(8) = 0 + f(4) = 0 + 0$$

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0 \end{cases}$$

$$f(8)+f\left(\frac{1}{8}\right)=0 \quad f(n)+f\left(\frac{1}{n}\right)=0$$

$$f(8)=-f\left(\frac{1}{8}\right) \quad -f(n)=-f\left(\frac{1}{n}\right)$$

~~$$\frac{14}{11}$$~~

$$f(14)+f\left(\frac{1}{14}\right)=4-3=1$$

$$\frac{11}{14} = 3-4 = \textcircled{-1}$$

~~$$\frac{23}{25} = 5-1$$~~

$$\frac{25}{23} = 1+1-5$$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	0	0	1	0	1	0	0	1	<del>1</del> 2	0	<del>2</del> 3

$$\begin{array}{r} 1 \\ \times 0 \\ 51 \\ + 80 \\ + 42 \\ + 23 \\ \hline 216 \end{array}$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 4$$

$$f(1) = 1$$

$$-4x+5$$

$$-16x^2 + 40x + 25$$

$$2-x$$

~~$$-\frac{1}{2}x$$~~

$$\frac{16x-16}{4x-5} = -4x+5$$

$$\frac{2}{4} = 3$$

$$x+5$$

~~$$16x-16 = (5-4x)(5-4x)$$~~

$$\frac{3}{4} = 2$$

$$\frac{5}{4}x + 5 = 0$$

~~$$16x-16 = (4x-5)^2$$~~

$$0 = 5$$

$$\frac{5}{4}x = -5$$

$$16x-16 = -16x^2 + 40x - 25$$

$$x = -4$$

$$16x^2 - 24x + 9 = 0$$

$$\frac{12-16}{3-5} = \frac{-4}{-2} = 2$$

$$(4x+3)^2 = 0$$

$$x = \textcircled{-\frac{3}{4}}$$