МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство
$$\frac{4x - 3}{2x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$
выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

Обозначим $t=x^2+6x$. Получаем:

$$3^{\log_4 t}+t \geq |t|^{\log_4 5}$$

Т.к ОДЗ: $t>0$, то получаем равносильную систему:

$$\begin{cases} 3^{\log_4 t}+t \geq t^{\log_4 5} \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^{\log_4 3}+t \geq t^{\log_4 5} \\ t>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^{\log_4 3-1}+1 \geq t^{\log_4 5-1} \\ t>0 \end{cases}$$

поделили верхнее нер-во на $t>0$

Видно, что ф-ия $t^{\log_4 3-1}+1$ убывающая (т.к $\log_4 3-1<0$), а ф-ия $t^{\log_4 5-1}$ - возрастающая (т.к $\log_4 5-1>0$). Тогда, если t_0 - корень ур-я $t^{\log_4 3-1}+1=t^{\log_4 5-1}$, то $t\in[0;t_0]$ - решение (все) нер-ва $t^{\log_4 3-1}+1 \geq t^{\log_4 5-1}$. Т.к такое t_0 единственно, то его можно подобрать. Подходит $t_0=16$: $16^{\log_4 3-1}+1=16^{\log_4\frac{3}{4}}+1=\left(\frac{3}{4}\right)^2+1=$
$=\frac{25}{16}=\left(\frac{5}{4}\right)^2=16^{\log_4\frac{5}{4}}=16^{\log_4 5-1}$.

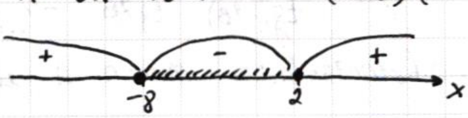
Переходя обратно к x^2+6x, получаем:

$$\begin{cases} x^2+6x \geq 0 & (1) \\ x^2+6x \leq 16 & (2) \end{cases}$$

(1) $x(x+6)\geq 0$

$x\in(-\infty;-6]\cup[0;+\infty)$

(2) $x^2+6x-16\leq 0 \Leftrightarrow (x+8)(x-2)\leq 0$



$x\in[-8;2]$

Получаем систему:

$$\begin{cases} x\in(-\infty;-6]\cup[0;+\infty) \\ x\in[-8;2] \end{cases} \Leftrightarrow \quad x\in[-8;-6]\cup[0;2]$$

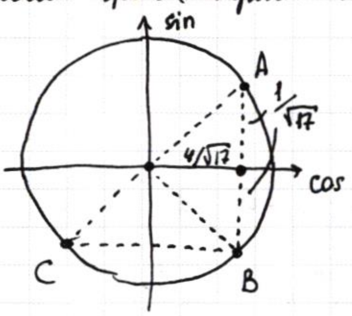
Ответ: $x\in[-8;-6]\cup[0;2]$

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\cdot\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{8}{17} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

Рассмотрим тригонометрическую окружность:



Пусть точки A и B таковы, что для них cos равен $\frac{4}{\sqrt{17}}$. Ясно, что для точки B sin равен $-\sqrt{1-\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$. Тогда sin в точке C, симметричной A относит. центра тр. окр., также равен $-\frac{1}{\sqrt{17}}$.

В нашей системе углу 2β соответствует либо точка A, либо B, а углу $2\alpha+2\beta$ - либо B, либо C.

Если определить ~~(угол)~~ β так, чтобы углу 2β соотв. точка A, то подойдёт такое α, что:

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = 2\beta+\pi+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha+2\beta = -2\beta+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \ \text{- при таком } \alpha \ \operatorname{tg}\alpha\in\varnothing \\ \alpha = -2\beta+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \cancel{(\text{либо})}\ \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-2\beta) = -\frac{1/\sqrt{17}}{4/\sqrt{17}} = -\frac{1}{4}. \end{array}\right.$$

Если определить β так, чтобы углу 2β соотв. точка B, то подойдут такие α, что:

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = 2\beta+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha+2\beta = \pi-2\beta+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = \pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0. \\ \alpha = -2\beta+\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\operatorname{tg}(-2\beta)} = \frac{1}{\operatorname{tg}2\beta} = \frac{4/\sqrt{17}}{-1/\sqrt{17}} = -4. \end{array}\right.$$

Т.к β можно подобрать так, чтобы углу 2β соответствовала точка A, либо точка B (и то, и то возможно), то $\operatorname{tg}\alpha$ может принимать значения $0; -\frac{1}{4}$ или -4

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

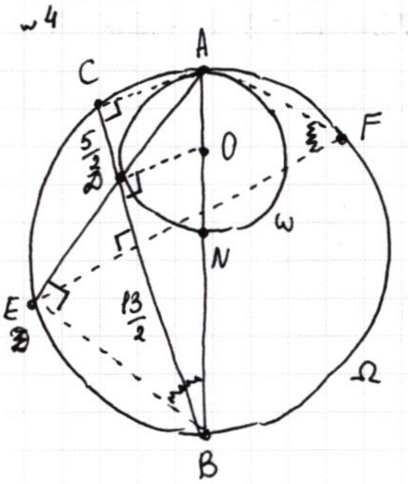
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: 0, $-\frac{1}{4}$ и -4.

№4



Пусть AB пересекает ω в точке N. Тогда AN – диаметр окр-ти ω (~~в силу симметрии окр-ей ω и Ω относительно AB, либо же~~ т.к ω и Ω обладают общей касат. в точке A, а перпенд-р к ней проходит через центры окр-ей). Обозначим O – центр ω. Тогда $OD \perp CB$, т.к CB касается ω.

$AC \perp BC$, т.к $\angle ACB$ опирается на диаметр AB окр-ти Ω, т.е $\angle ACB = 90°$.

Обозначим r и R – радиусы ω и Ω соответственно. Из подобия $\triangle BDO \sim \triangle BCA$ (по 2-м углам) имеем: $\frac{BD}{BO} = \frac{BC}{AB}$, а т.к $BO = AB - AO = 2R - r$, $BD = \frac{13}{2}$, $BC = \frac{18}{2}$, то:

$\frac{13/2}{2R-r} = \frac{18/2}{2R} \Rightarrow 13R = 18R - \frac{r}{2}18 \Rightarrow r = \frac{5}{9}R$. По т. Пифагора для $\triangle BDO$ имеем:

$BD^2 + DO^2 = BO^2 \Rightarrow \left(\frac{13}{2}\right)^2 + r^2 = (2R-r)^2 \Rightarrow \left(\frac{13}{2}\right)^2 + \frac{25}{81}R^2 = \left(\frac{13}{9}\right)^2 \cdot R^2 \Rightarrow \left(\frac{13}{2}\right)^2 = R^2\left(\frac{169-25}{9^2}\right)$

$R^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{12}\right)^2 \Rightarrow R = \frac{13 \cdot 9}{24} = \frac{39}{8}$, $r = \frac{5}{9} \cdot \frac{39}{8} = \frac{195}{72} = \frac{65}{24}$

$\angle AFE = \angle ABE$, т.к оба опираются на дугу ACE окр-ти Ω. $\angle AEB = 90°$, т.к опирается на диаметр AB окр-ти Ω. ($\Rightarrow$ tg ~~cos~~ $\angle ABE =$) По т. Пифагора для $\triangle BCA$:

$CA^2 = AB^2 - BC^2 = R^2 - 9^2 = 4\left(\frac{39}{8}\right)^2 - 81$. Тогда $AD^2 = AC^2 + CD^2 = 4\left(\frac{39}{8}\right)^2 - 81 + \frac{25}{4} =$

$= \frac{325}{16}$. $\angle ADN = 90°$, т.к опирается на диаметр AN окр-ти $\omega \Rightarrow \angle AND = \angle ABE$ (из $\triangle AND$ и $\triangle ABE$). $\sin\angle AND = \frac{AD}{AN} = \frac{AD}{2r} = \frac{\sqrt{\frac{325}{16}}}{2 \cdot \frac{65}{24}} = \frac{\frac{5}{4}\sqrt{13}}{\frac{65}{12}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AFE = \angle AND = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$. Площадь $\triangle AFE$ можно найти, найдя ~~его~~ радиус его впис. окр. (описанной – R

~~Из подобия $\triangle ACD \sim \triangle BED$~~ $\Rightarrow$

Ответ: $R = \frac{39}{8}$, $r = \frac{65}{24}$, $\angle AFE = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№ 2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2) \end{cases}$$

$$(1)\ \begin{cases}(3y-2x)^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3y-2x\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9y^2+y(3-15x)+4x^2+2x-2=0 \quad (*) \\ y\geq \frac{2}{3}x\end{cases}$$

$$(*)\ D_y=(3-15x)^2-4\cdot 9(4x^2+2x-2)=9-90x+225x^2-144x^2-72x+72=81x^2-162x+81=$$
$$=(9x-9)^2$$

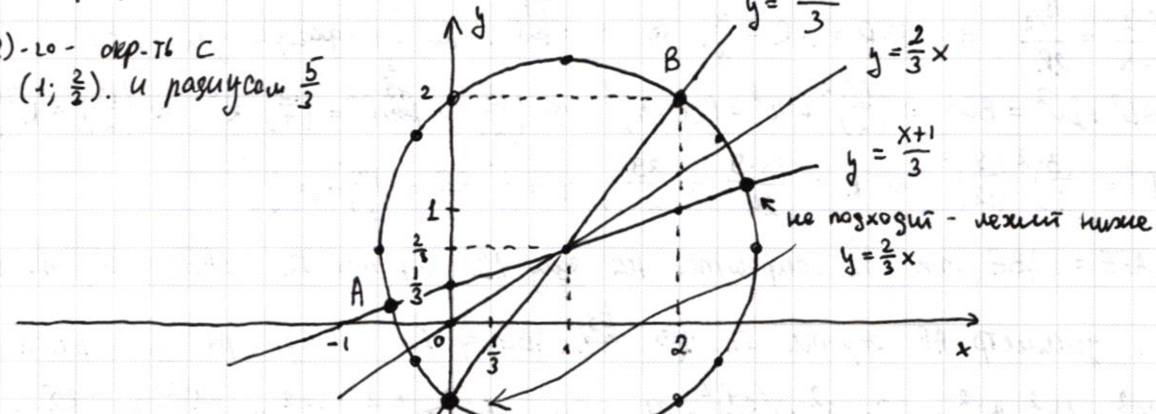
$$y=\frac{(15x-3)\pm\sqrt{D_y}}{18}=\frac{(15x-3)\pm(9x-9)}{18}$$

$$y=\left[\begin{array}{l}\frac{24x-12}{18}\\ \frac{6x+6}{18}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y=\frac{4x-2}{3}\\ y=\frac{x+1}{3}\end{array}\right.$$

$$(2)\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \quad |:3$$
$$x^2+y^2-2x-\frac{4}{3}y=\frac{4}{3}$$
$$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{3}+1+\frac{4}{9}$$
$$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$$

Изобразим графики (1) и (2):

График (2) - это окр-ть с центром $(1;\frac{2}{3})$. и радиусом $\frac{5}{3}$



Видно, что подходят только точки A и B, где $B=(2;2)$. - легко проверить

координаты точки A таковы, что удовлетворяют: $\begin{cases}(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9}\\ y=\frac{x+1}{3}\\ y\geq\frac{2}{3}x\end{cases} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-1)^2+\left(\frac{x-1}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2 \Rightarrow (x-1)^2=\frac{5}{2}\\ y=\frac{x+1}{3}\\ y\geq\frac{2}{3}x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{\frac{5}{2}}+1\\ x=-\sqrt{\frac{5}{2}}+1\end{array}\right.\\ y=\frac{x+1}{3}\\ y\geq\frac{2}{3}x\end{cases} \Rightarrow x=-\sqrt{\frac{5}{2}}+1,\ y=\frac{2-\sqrt{\frac{5}{2}}}{3},$$

т.е. $A=\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}};\ \frac{2}{3}-\sqrt{\frac{5}{18}}\right)$.

Значит, ответ: $(2,2)$ и $\left(1-\sqrt{\frac{5}{2}};\ \frac{2}{3}-\sqrt{\frac{5}{18}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} & (2) \end{cases}$$

Преобразуем (2)-ое к виду:

$$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{8}{17}$$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$$

Подставляя (1)-ое получим:

$$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \Leftrightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

Значит, система равносильна следующей:

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (3) \\ \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

Заметим, что $\cos 2\alpha$ не может равняться 0, т.к иначе в (3)-ем:

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{1}{4}$, но $\sin 2\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\alpha} = \pm 1$.

Тогда система равносильна (если поделить (3) на $\cos 2\alpha \neq 0$):

$$\begin{cases} \operatorname{tg} 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cancel{\cos}\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} & (4) \\ \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \\ \cos 2\alpha \neq 0 \end{cases}$$

Т.к $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$, то $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$ (β можно подобрать так, чтобы $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ и $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$).

Если $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, то в (4)-ом получим: $\operatorname{tg} 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{2}{\sqrt{17}}$ $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{1}{2}$

Если $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, то в (4)-ом получим: $\operatorname{tg} 2\alpha = 0$

В зависимости от значения β (которое удовлетворяет $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$) получаем две системы:

$$\begin{cases} \frac{tg2\alpha}{\cancel{tg\alpha}} = -\frac{1}{2} \\ \cos 2\alpha \neq 0 \end{cases}, \text{ если } \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \begin{cases} \frac{tg2\alpha}{\cancel{tg\alpha}} = 0 \\ \cos 2\alpha \neq 0 \end{cases}, \text{ если } \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

Т.к $tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$, то получим:

$$\begin{cases} \cos 2\alpha \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = -\frac{1}{2} \\ \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2\alpha \neq 0 \\ 1-tg^2\alpha \neq 0 \\ \left[\begin{array}{l} 4tg\alpha = tg^2\alpha - 1 \quad (5) \\ tg\alpha = 0 \end{array}\right. \end{cases}$$

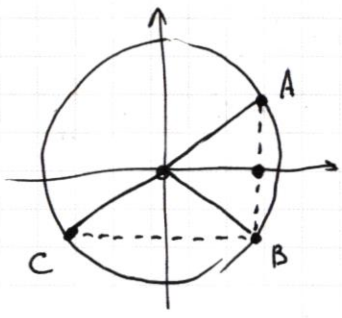
(5) $tg^2\alpha - 4tg\alpha - 1 = 0$

$$tg\alpha = \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2} = 2 \pm \sqrt{5}$$

Получаем:

$$\begin{cases} \cos 2\alpha \neq 0 \\ tg\alpha \neq \pm 1 \\ tg\alpha \in \{0; 2+\sqrt{5}; 2-\sqrt{5}\} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha \neq \pi k, k \in \mathbb{Z} \\ tg\alpha \in \{0; 2+\sqrt{5}; 2-\sqrt{5}\} \end{cases}$$

При $\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot k, k \in \mathbb{Z}$ $tg\alpha$ может принимать только значение 0 (при $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$, $tg\alpha$ не определён). Значит



2β

$2 \sin \alpha+\beta \cos \alpha+\beta$

$2\beta = 2\alpha + 2\beta + 2\pi k \qquad \alpha = \pi k$

$2\beta + \pi = 2\alpha + 2\beta + 2\pi k$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

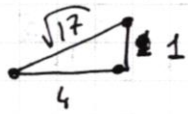
$\sin a+b = \sin a\cos b - \sin b\cos a$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta - \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cos\frac{4\beta}{2} = -\frac{8}{17}$

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = \frac{8}{17}$ $\quad\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$



$4^2 + x^2 = 17$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$ (2)

$x^2+y^2-2x-\frac{4}{3}y=\frac{4}{3}$

$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2-1-\frac{4}{9}=\frac{4}{3}$ $\quad -\frac{12}{9}+\frac{4}{9}+\frac{9}{9}=\frac{25}{9}$

$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2$

(1) $3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$3y(x-1)-2(x-1) = (3y-2)(x-1)$

$(3y-2x)^2 = 3xy+2-(3y-2x)$

$\cancel{3y^2\ 2x}$ $\quad 9y^2-12xy+4x^2 = 3xy-2x-3y+2$

$9y^2-15xy+2x+3y+4x^2=2$

$-(3y-2x)-4x+3xy+2$

$(3y-2x)(3y-2x+1)=$

$a^{\log_4 b}$

$3 = 4^{\log_4 3}$ $\quad = 3xy+2$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$x^2+6x+3^{\log_4(x^2+6x)} \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$

ОДЗ: $x^2+6x>0$. $\quad t+3^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 5}$

$t+t^{\log_4 3} \geq t^{\log_4 5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ $\quad 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

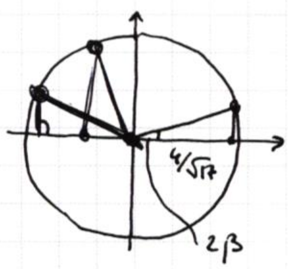
$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta - \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\mathrm{tg}\,2\alpha\cdot\cos 2\beta - \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\mathrm{tg}\,2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} \pm \frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$



$\frac{-\frac{2}{\sqrt{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}} = -\frac{1}{2}$ $\quad \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

Если минус, то $\mathrm{tg}\,2\alpha = 0$

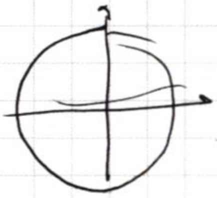
Если плюс, то $\mathrm{tg}\,2\alpha = -\frac{1}{2}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos$ $\quad -\frac{1}{4} = \sin 2\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$2\alpha =$



$(3y-2x)^2=$

$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$a = c^x \Rightarrow (c^x)^{\log_c b} = b^x$

$3^{\log_4 t} + t \geq |t|^{\log_4 5}$

$a^{\log_c b} = b^x = b^{\log_c a}$

$t>0:$

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$

$t=4$

$\frac{3}{4}+1 \geq \frac{5}{4}$

$t^{\log_4 3 - 1} + 1 \geq t^{\log_4 5 - 1}$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1 \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}}$

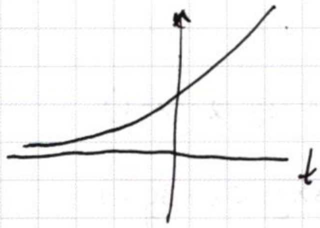
$\log_4 \frac{5}{4} > 1$

$\log_4 \frac{3}{4} < 1$

$\log_4 \frac{3}{4} < 0$

$\cancel{ab}$

$t = 4^y$



$\left(\frac{3}{4}\right)^y + 1 \geq \left(\frac{5}{4}\right)^y$

$3^y + 4^y = 5^y$

16

$9+16=21$

$16^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1 = 16^{\log_4 \frac{5}{4}}$

16

4^2

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^2$

$\frac{9}{16}+1 = \frac{25}{16}$

$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

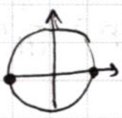
$x(x+6) \geq 0$

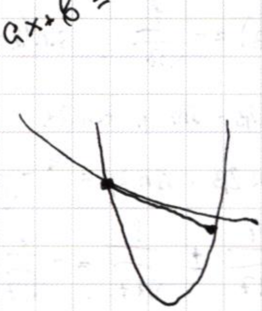
$\frac{\pi}{2}k$

$\begin{array}{r|l} 4x-3 & 2x-2 \\ -\ 4x-4 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$

$2 + \frac{1}{2x-2} \geq ax+b \geq \ldots$

$\geq$





$6x+6$

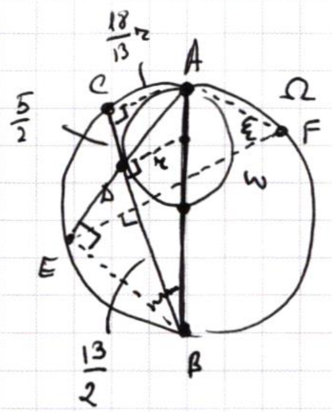
$\frac{24x-12}{18}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$$\left(\frac{13}{2}\right)^2 + r^2 = (R-r)^2$$

$$\left(\frac{18}{2}\right)^2 + \left(\frac{18}{13}r\right)^2 = R^2$$

$$\cancel{169 + R^2} = \quad 169 + 4r^2 = 4(R-r)^2$$

$$\cancel{81 +}$$

$$r^2 = \frac{R^2 - 81}{18^2} \cdot 13^2$$

$5R = \frac{2}{2} 9r$

$9y^2 + 4x^2 - 12xy =$

$= 3xy - 2x - 3y + 2$

$9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x + 3y - 2 = 0$

$9y^2 + y(3 - 15x) + 4x^2 + 2x - 2 = 0$ 144 169

$D_y = 9 + 225x^2 - 60x -$

$\cancel{2R -}$

$2R - \frac{5}{9}R = 1\frac{4}{9}R$

$\frac{18}{9} - \frac{5}{9} = \frac{13}{9}$

325 | 5
65 | 65 5
13 | 13

$\cancel{\frac{5 \cdot 13}{8}}$

$\frac{5 \cdot 13}{3 \cdot 8} =$

39×39: 351, 117, 1521

$81 \times 8 = 648$

25×16: 150, 25, 400

81×64: 324, 486, 5184

$$\frac{1521}{16} - \frac{1296}{16} + \frac{100}{16} = \frac{225}{16}$$

$$\cancel{\frac{1521 - 648 + 100}{8}}$$

81×16: 486, 81, 1296

$$\frac{1521 - 5184 + 400}{864}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

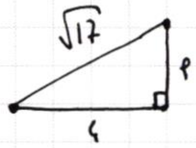
$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$(x-1)(3y-2)=(3y-2x)^2$

$3xy-2x-3y+2=9y^2+4x^2-12xy$

$9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0$

$\cancel{(3y-2x)^2}$ $\cancel{3y}$

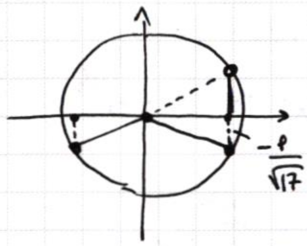


$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

$\frac{5}{16}$

$\frac{2-\frac{15}{9}}{3}=$ $\frac{3}{27}=\frac{1}{9}$

$=\frac{6}{9}$



$9-$ $(x-1)^2$

$\frac{10}{9}$

$2\alpha+2\beta=2\beta+2\pi k$

$\alpha=\pi k$

$\cancel{\cos 2\beta}=$

$\cancel{2\alpha+2\beta}$ $2\beta+\pi+2\pi k=2\alpha+2\beta$

$\times\frac{36}{4}$ $144=$

$1+\frac{1}{9}=\frac{25}{9}$ 25

$\frac{10}{9}=\frac{25}{9}$

$(x-1)^2\frac{10}{9}=\frac{25}{9}\Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)^2=\frac{25}{10}=\frac{5}{2}$

$9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$9y^2+y(3-15x)+(4x^2+2x-2)=0$

$9+225x^2-\cancel{90}x-144x^2-\cancel{36}x+\cancel{36}=$ (9, 72, 72)

$=81x^2-\cancel{126}x+\cancel{45}=$ (9, 81)

$=(9x-\cancel{5})^{\cancel{2}}$ 7

$126 \mid 9$
14

$(9x-9)^2$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)