МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \quad (2) \end{cases}$$

(2) $2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}} \cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}}$; $\sin 2\beta = \pm \frac{4}{\sqrt{17}}$

(1) $\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

~~а)~~ $\cancel{\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}}$

$\cancel{\frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\cancel{tg}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

~~а) sin 2~~ а) $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$; $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} - \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

$\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} - \frac{15}{17} = -1$

$2\alpha = 2\pi k - \frac{\pi}{2}$, $k \in Z$

$\alpha = \pi k - \frac{\pi}{4}$, $k \in Z$

$tg\alpha = -1$

б) $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$; $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} - \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

$\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} + \frac{17}{17} = \frac{15}{17}$

$\cancel{\cos 2\alpha} = \pm\sqrt{}$ $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$-\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{15}{17}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

$-1 = \frac{15}{17} - 4\cos 2\alpha$

$4\cos 2\alpha = \frac{32}{17}$

$\cos 2\alpha = \frac{8}{17}$

$tg\, 2\alpha = \frac{15}{8} = \frac{2\, tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$\frac{15}{8} - \frac{15}{8}tg^2\alpha = 2\, tg\alpha$

пусть $tg\alpha = x$

$\frac{15}{8}x^2 + 2x - \frac{15}{8} = 0$

$D = 4 + 4\cdot\frac{225}{64} = 4 + \frac{225}{16} = \frac{289}{16} = \left(\frac{17}{4}\right)^2$

$x = \frac{-2\pm\frac{17}{4}}{\frac{15}{8}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\frac{25}{4}}{\frac{15}{8}} \\ x = \frac{\frac{9}{4}}{\frac{15}{8}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{10}{3} \\ x = \frac{6}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = -\frac{10}{3} \\ tg\alpha = \frac{6}{5} \end{array}\right.$

в) $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$; $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} - \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\right)$

$\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{15}{17}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}$

$-1 = \frac{15}{17} + 4\cos 2\alpha$

$\cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$tg\, 2\alpha = -\frac{15}{8}$

$\frac{15}{8}tg^2\alpha - \frac{15}{8} = 2\, tg\alpha$

$tg\alpha = \frac{2\pm\frac{17}{4}}{\frac{15}{8}} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = \frac{10}{3} \\ tg\alpha = -\frac{6}{5} \end{array}\right.$

г) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha = -1$ (см. п. а)

$2\alpha = 2\pi k - \frac{\pi}{2}, k\in Z$

$\alpha = \pi k - \frac{\pi}{4}, k\in Z$; $tg\alpha = -1$ Ответ: $-1; \pm\frac{6}{5}; \pm\frac{10}{3}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{(y-6)(x-1)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=0 \quad (2) \end{cases}$$

(2): $f(x) = 9(x-1)^2$; $E(f)=[0;+\infty)$
$g(y)=(y-6)^2$; $E(g)=[0;+\infty)$
$f(x)+g(y)=0$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ g(y)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9(x-1)^2=0 \\ (y-6)^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=6 \end{cases}$$

(1): при $x=1; y=6$:
$6-6\cdot 1 = \sqrt{(6-6)(1-1)}$
$0=0$ ✓

Ответ: $(1;6)$

№3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$\underline{26x-x^2>0}$, (следует из ОДЗ) $\Rightarrow$
$\Rightarrow |x^2-26x| = 26x-x^2$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+\left(5^{\log_5 13}\right)^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12} + 26x-x^2 \geq (26x-x^2)^{\log_5 13}$$

~~$f(t)=(26x-x^2)^t \uparrow$ на $t\in(-\infty;+\infty)$, т.к. $26x-x^2>0$~~

$$\Rightarrow (26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)^{\log_5 5}-(26x-x^2)^{\log_5 13} \geq 0$$

$f(t)=t^{\log_5 12}+t^{\log_5 5}-t^{\log_5 13}=\cancel{t}\,t^{\log_5 12}(1-t^{\log_5\frac{13}{12}}$

$\cancel{=t^{\log_5 12}\left(1-t^{\log_5\frac{13}{12}}\right)+t}$

$\cancel{\left(5^{\log_5(26x-x^2)}\right)^{\log_5 12}}$ Разделим на $26x-x^2>0$

$(26x-x^2)^{\log_5\frac{12}{5}}+1-(26x-x^2)^{\log_5\frac{13}{5}}\geq 0$

$\left(5^{\log_5(26x-x^2)}\right)^{\log_5\frac{12}{5}}+1-\left(5^{\log_5(26x-x^2)}\right)^{\log_5\frac{13}{5}}\geq 0$

$1\geq\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5(26x-x^2)}-\left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5(26x-x^2)}$ (1)

по св-ву степ. ф-ии, чем больше её основание (>1), тем быстрее она возрастает, поэтому

$f(t)=\left(\frac{13}{5}\right)^{t}-\left(\frac{12}{5}\right)^{t}\uparrow$ на $[0;+\infty)$

Аналогично, $f(t)\downarrow$ на $(-\infty;0]$

Пусть $t=2$

$f(2)=\left(\frac{13}{5}\right)^2-\left(\frac{12}{5}\right)^2=\frac{169-144}{25}=1$

(1) $\Rightarrow$

$\log_5 v\uparrow$ на $(0;+\infty)$

$\Rightarrow\log_5(26x-x^2)\leq 2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}26x-x^2>0\\26x-x^2\leq 25\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x(26-x)>0\\x^2-26x+25\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(0;26)\\(x-25)(x-1)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\in(0;26)\\x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty)\end{cases}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x\in(0;1]\cup[25;26)$

Ответ $(0;1]\cup[25;26)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Дано: $\Omega(O_1; R)$; $\omega(O_2; r)$

$\Omega \cap \omega = A$ – внутр.; ω внутри Ω

~~Ω~~ AB-диам. Ω

~~$BC \cap \Omega$~~ BC-хорда Ω

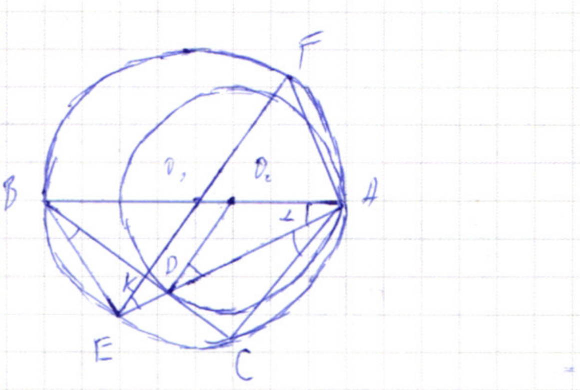
$BC \cap \omega = D$

$[AD) \cap \Omega = \{A; E\}$

$EF \perp BC$; $EF \cap \Omega = \{E; F\}$

$CD = 12$; $BD = 13$

R-?; r-?; $\angle AFE$-?; S_{AEF}-?



1) $DO_2 \perp BC$ по св-ву кас.

$AC \perp BC$, т.к. $\angle ACB$ опир. на диам.

$O_2 \in AB$, т.к. Ω кас ω внутреннe $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ по $2\angle$ ($\angle B$-общий) $\Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{13}{25} = \frac{DO_2}{AC} = \frac{BO_2}{BA}$

$BA = 2R$; $BO_2 = 2R - r$

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{25} \Rightarrow \frac{r}{2R} = \frac{12}{25}$; $r = \frac{24}{25}R$

2) в $\triangle BO_2D$ по т. Пифагора

$(2R-r)^2 = 13^2 + r^2$

$\left(\frac{26}{25}R\right)^2 = 169 + \left(\frac{24}{25}R\right)^2$

$\frac{2}{25}R \cdot 2R = 169$; $R = \frac{13 \cdot 5}{2} = \frac{65}{2}$; $r = \frac{65}{2} \cdot \frac{24}{25} = \frac{156}{5}$

3) пусть $\angle O_2AD = \alpha$, тогда $\angle ADO_2 = \alpha$ ($\angle = \angle$ при осн. р/б $\triangle$)

$O_2D \parallel AC$, т.к. они обе $\perp BC \Rightarrow \angle DAC = \angle ADO_2 = \alpha$ как н/л при $\parallel$

3) $\Rightarrow AD$ – бисс. $\angle BAC$

4) $\angle FEA = \angle EAC = \alpha$ аналогично как н/л при $\parallel$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

4) $\Rightarrow \triangle ETA$ − р/б по 2 $\angle = \angle$ ($EF \cap AB = T$)

5) $\angle ABE = 90^\circ - \angle EAB = 90^\circ - \alpha$ в $\triangle ABE$

$\angle EBC = \angle EAC = \alpha$ (опир. на 1 дугу)

$\angle BEK = 90^\circ - \angle EBK = 90^\circ - \alpha = \angle ABE \Rightarrow \triangle TBE$ − р/б

в $\triangle EBK$; $EF \cap BC = K$ по 2 $\angle=\angle$

4,5) $\Rightarrow TA = TB \Rightarrow T \equiv O,\ T \in EF \Rightarrow EF$ − диам.

6) $AC = r \cdot \frac{25}{13} = \frac{\cancel{25}^{5} \cdot \cancel{156}^{12}}{\cancel{13} \cdot \cancel{5}} = 60$ (п. 1)

в пр/уг $\triangle BAC$

$\angle BAC = 2\alpha$

$\cos 2\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{60}{65} = \frac{12}{13}$

$1 - 2\sin^2\alpha = \frac{12}{13}$

$\sin^2\alpha = \frac{1}{26}$; $\sin\alpha > 0$, т. к. $\alpha \in (0; 90)$

$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$

$\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$; $\cos\alpha > 0$, т. к. $\alpha \in (0; 90)$

$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha) = \sin\angle AFE = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$

7) $S_{AEF} = 0,5 \cdot AF \cdot EF \cdot \sin\angle AFE$

$S_{AEF} = 0,5 \cdot 65 \cdot 65 \cdot \cos(90^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ - \alpha)$

$S_{AEF} = 0,5 \cdot 65^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 0,5 \cdot 65^2 \cdot \frac{5}{26} =$

$= 0,5 \cdot 65 \cdot 5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25 \cdot 65}{4} = \frac{1625}{4} = 406,25$

Ответ: $R = 32,5$; $r = 31,2$; $\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$; $S_{AEF} = 406,25$

№5

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0 = f(2) + f(1)$

$f(1) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = 2f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = f(2) + f(4) = 0$

$f(9) = 2f(3) = 0$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = f(3) + f(4) = 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(13)=3$

$f(14)=f(2)+f(7)=1$

$f(15)=f(3)+f(5)=1$

$f(16)=2f(4)=0$

$f(17)=4$

$f(18)=f(3)+f(6)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=f(2)+f(10)=1$

$f(21)=f(3)+f(7)=1$

$f(22)=f(2)+f(11)=2$

$f(23)=5$

$f(24)=f(2)+f(12)=0$

$f(25)=2f(5)=2$

$f(26)=f(2)+f(13)=3$

$f(27)=f(3)+f(9)=0$

$f(28)=f(2)+f(14)=1$

~~$f(x/y)+f(y)=f(x)$~~

$f(x/y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y)=f(x)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

Пусть $\bar{t}$ — размер мн-ва t, подходящих под их. условие $t\in[1;28]$

$f(t)=0;\ \bar{t}=9;\ f(k)>0;\ \bar{k}=8+3+2+2+1=16$

$f(t)=1;\ \bar{t}=8;\ f(k)>1;\ \bar{k}=8$

$f(t)=2;\ \bar{t}=3;\ f(k)>2;\ \bar{k}=5$

$f(t)=3;\ \bar{t}=2;\ f(k)>3;\ \bar{k}=3$

$f(t)=4;\ \bar{t}=2;\ f(k)>4;\ \bar{k}=1$

$f(t)=5;\ \bar{t}=1;\ f(k)>5;\ \bar{k}=0$

Итого способов: $9\cdot16+8\cdot8+3\cdot5+2\cdot3+2\cdot1+1\cdot0=$

$=144+64+15+6+2+0=160+79+2=160+81=231$

Ответ: 231

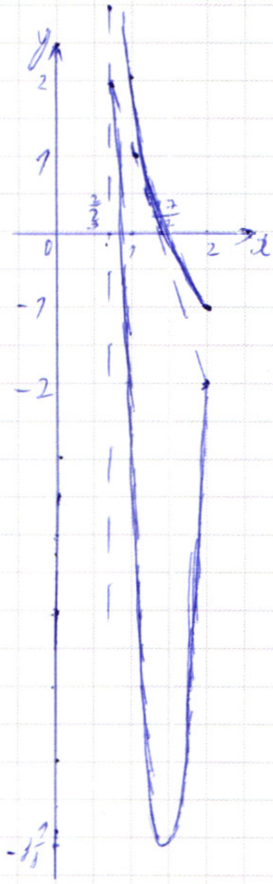
✓1

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1 (Нумеровать только чистовики)

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28; \quad x \in \left[\frac{2}{3}; 2\right]$$

$$f(x)=\frac{8-6x}{3x-2}; \quad g(x)=18x^2-51x+28$$



$$g\left(\frac{2}{3}\right)=18\cdot\frac{4}{9}-51\cdot\frac{2}{3}+28=$$

$$=8-34+28=2$$

$$g(2)=18\cdot 4-51\cdot 2+28=$$

$$=72-102+28=-2$$

$$g(x)=0{,}5\left(6x-\frac{17}{2}\right)^2-8\frac{1}{8}$$

$g\left(\frac{17}{12}\right)=-8\frac{1}{8}$ – т. минимума

$$f(2)=\frac{8-12}{6-2}=\frac{-4}{4}=-1$$

$$f(1)=\frac{8-6}{3-2}=2$$

Найдём макс. ~~мин~~ границу прямых $ax+b$ из ~~к~~ нижней т. $(2; -2)$

$$f^*(x)=-2+\frac{4}{3x-2}$$

$$f'(x)=4\cdot\frac{1}{(3x-2)^2}\cdot(-1)\cdot 3=-\frac{12}{(3x-2)^2}$$

$y_к(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$, где x_0 – т. касания (ф-ла кас. к $f(x)$)

$$-2=-\frac{12}{(3x_0-2)^2}(2-x_0)+\frac{4}{3x_0-2}$$

$$\frac{(3x_0-2)(6x_0-8)-12(x_0-2)-2(3x_0-2)^2}{(3x_0-2)^2}=0 \quad |\cdot(3x_0-2)^2>0$$

$$(3x_0-2)(6x_0-8)-12x_0+24-2(3x_0-2)^2=0$$

$$\cancel{18x_0^2}-36x_0+16-12x_0+24-\cancel{18x_0^2}+24x_0-8=0$$

$$-24x_0+32=0; \quad x_0=\frac{4}{3}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Найдём её т. пересечения этой кас. с $x = \frac{2}{3}$

$y_к = f'\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right)$

$y_к = -\frac{72}{\left(\frac{4}{3}\cdot 3 - 2\right)^2}\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{8 - 6\cdot\frac{4}{3}}{3\cdot\frac{4}{3} - 2}$

$y_к = -\frac{72}{(4-2)^2}\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{8 - \cancel{8}8}{4-2}$

$y_к = -\frac{72}{4}\left(-\frac{2}{3}\right) = 3\cdot\frac{2}{3} = 2 = g\left(\frac{2}{3}\right)$

Таким образом, $y_к\left(\frac{2}{3}\right) = 2 = g\left(\frac{2}{3}\right)$; $y_к(2) = -2 = g(2)$

(1) Заметим, что если мы опустим левую или правую точки, то образуется промежуток, где $ax + b < g(x)$

(2) Если же мы ~~од~~ любую из точек поднимем, то $ax + b > f(x)$ на некотором промежутке, т.к. $y_к$ – кас. к $f(x)$

Из (1) и (2) следует, что существует единственная пр. $ax + b = y_к$, ~~удовлет~~ удовлет. усл. задачи.

$y_к = f'\left(\frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{4}{3}\right) + f\left(\frac{4}{3}\right)$

$y_к = -\frac{72}{4}\left(x - \frac{4}{3}\right) + 0 = -3x + \frac{72\cdot 4}{4\cdot 3} = -3x + 4$; $a = -3$; $b = 4$

Ответ: $(-3; 4)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(30°+60°) = \sin 30° \cos 60° + \cos 30° \sin 60° = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1$

$tg\, 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2 \sin\alpha \cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} \quad \frac{tg\alpha + tg\alpha}{1 - tg\alpha\, tg\alpha}$

$tg 60° = \sqrt{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}\sqrt{3}}{\frac{2}{3}} = \sqrt{3}$

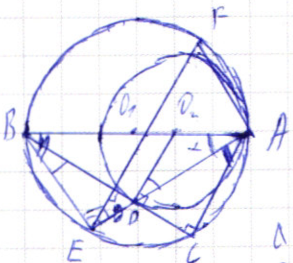
$289 - 225 = 64$

$(26x - x^2)^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1 \geq \cancel{\log} (26x - x^2)^{\log_5 \frac{13}{5}}$

$5 \geq \left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5(26x - x^2)} - \left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5(26x - x^2)}$

по св-ву степенной ф-ии, чем больше её ~~основание~~ основание (>1), тем быстрее она возрастает $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(t) = \frac{13}{5}$



$\frac{2R - r}{2R} = \frac{BD}{BC} = \frac{13}{25}$

$\frac{r}{2R} = \frac{12}{25}$; $\frac{r}{R} = \frac{24}{25}$; $r = \frac{24}{25}R$

$\triangle BOD$: $(2R - r)^2 = 13^2 + r^2$

$\left(2R - \frac{24}{25}R\right)^2 = 169 + \frac{576}{625}R^2$

$\left(\frac{26}{25}R\right)^2 = 169 + \frac{576}{625}R^2$

$\frac{100}{625}R^2 = 169$; $R = \frac{13\cdot 25}{10} = \frac{65}{2} = 32{,}5$

$r = \frac{13\cdot 24}{10} = \frac{13\cdot 12}{5} = \frac{144+12}{5} = \frac{156}{5} = 31{,}2$

$\angle ABC = 90° - 2\alpha$

$\angle ABE = 90° - \alpha$

$\angle CBE = \alpha$ $\quad$ EF - диам.

~~$\angle AFE = 90° - \alpha = 0{,}5 \cdot 180°$~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$AC = r \cdot \frac{25}{13} = \frac{25 \cdot 12}{5} = 60$

$\cos 2\angle = \frac{60}{65} = \frac{12}{13}$

~~$\sin\angle > 0;\ \cos\angle > 0$~~

$1 - 2\sin^2\angle = \frac{12}{13}$

$2\sin^2\angle = \frac{1}{13}$

$\sin^2\angle = \frac{1}{26}$

~~$\sin\angle = \frac{1}{\sqrt{26}}$~~ $\sin^2(90^\circ - \angle) = \cos^2\angle = \frac{25}{26}$

$\sin(90^\circ - \angle) = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\angle AFE = \arcsin\frac{5}{\sqrt{26}}$

$S_{AEF} = 0{,}5\, EF \cdot AF \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} = 0{,}5 \cdot 65 \cdot 65 \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{65^2 \cdot 5}{26 \cdot 2} = \frac{65^2 \cdot 25}{52 \cdot 4} = \frac{27125}{52}$

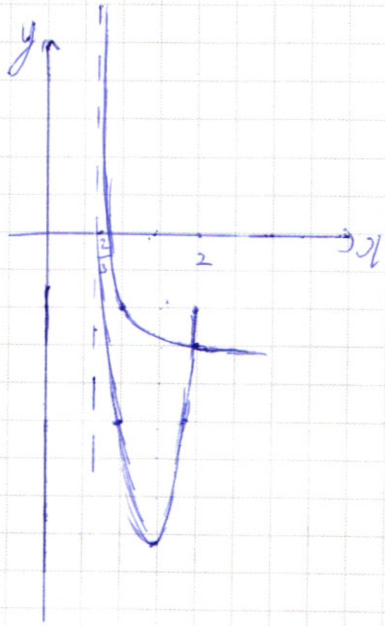
$65 \cdot 65$: $325 + 390 = 4225$; $4225 \cdot 5 = 21125$

$65 \cdot 25$: $325 + 130 = 1625$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2 - 57x + 28$

$57 = 3 \cdot 19$

$-2 + \frac{4}{3x-2} \geq ax + b \geq$ $0{,}5(6x - \frac{19}{2})^2 - 8\frac{1}{8}$ $\left(\frac{17}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \frac{289}{8} = 36\frac{1}{8}$



$-2 + \frac{4}{3x-2} \geq ax+b \quad | \cdot (3x-2) > 0$

$-6x + 4 + 4 \geq 3ax^2 + x(a+3b) - 2b$

$3ax^2 + x(a+3b+6) - 2b - 8 \leq 0$

$D = a^2 + 9b^2 + 36 + 6ab + 36b + 120a > 0$

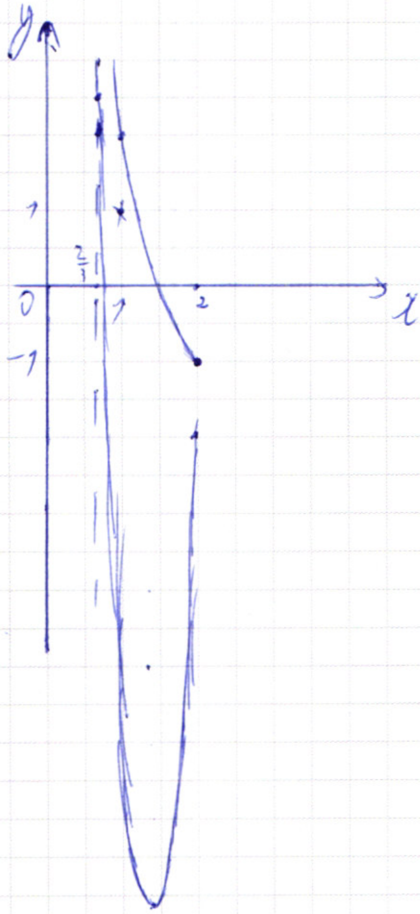
$\frac{8-12}{6-2} = \frac{-4}{4} = -1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$$\frac{8-6}{3-2} = \frac{2}{1} = 2$$

$$-2 + \frac{4}{3x-2}$$

$$-2 + \frac{4}{1-2} = -1$$

$$18 \cdot \frac{4}{9} - 51 \cdot \frac{2}{3} + 28 = 8 - 34 + 28 = 2$$

$$18 \cdot 4 - 102 + 28 = 72 - 102 + 28$$

$$f(x) = -2 + \frac{4}{3x-2}$$

$$f'(x) = 4 \cdot \frac{1}{(3x-2)^2} \cdot (-1) \cdot 3 =$$

$$= -\frac{12}{(3x-2)^2}$$

$$\cancel{-2} = y_к = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$$

$$\cancel{y_к} -2 = -\frac{12}{(3x_0-2)^2}(2-x_0) + \frac{8-6x_0}{3x_0-2}$$

$$\frac{(3x_0-2)(6x_0-8) - 12(x_0-2) - 2(3x_0-2)^2}{(3x_0-2)^2} = 0$$

$$(3x_0-2)(6x_0-8) - 12x_0 + 24 - 2(3x_0-2)^2 = 0$$

$$18x_0^2 - 36x_0 + 16 - 12x_0 + 24 - 2(9x_0^2 - 12x_0 + 4) = 0$$

$$-36x_0 - 12x_0 + 24x_0 + 16 + 24 - 8 = 0$$

$$-24x_0 + 32 = 0$$

$$x_0 = \frac{32}{24} = \frac{4}{3}$$

$$y = -\frac{12}{(4-2)^2}\left(\frac{2}{3} - \frac{4}{3}\right) + \frac{8 - 6 \cdot \frac{4}{3}}{3 \cdot \frac{4}{3} - 2} =$$

$$= -\frac{12}{4}\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{8-8}{4-2} = 3 \cdot \frac{2}{3} = 2$$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(2)=0$

$f(2)=f(2)+f(1)$; $f(1)=0$

$f(3)=0$

$f(4)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=0$

$f(7)=1$

$\cancel{f(8)=0}$ $f(8)=0$

$\cancel{f(9)=0}$ $f(9)=0$

$\cancel{f(10)=0}$ $f(10)=0$

$\cancel{f(11)=2}$

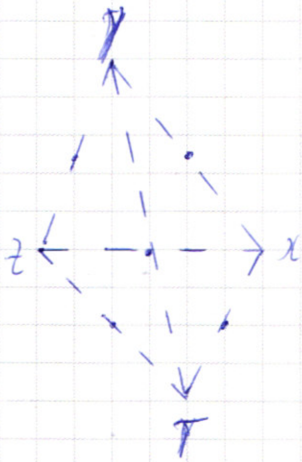
$\cancel{f(12)=0}$

$\cancel{f(13)=3}$

$\cancel{f(14)=0}$

$f(x/y)+f(y)=f(x)$

$f(x/y)=f(x)-f(y)$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)