МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+4\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\Rightarrow 2\sin(2\alpha+4\beta)\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$ $\quad \boxed{\cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}}$

$\Rightarrow$:

1. $\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}=\sin 2\beta \Leftrightarrow$ 1. $2\alpha+2\beta=2\beta+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

2. $2\alpha+2\beta=\pi-2\beta+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

1) $2\alpha=2\pi k, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \alpha=\pi k, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \boxed{\operatorname{tg}\alpha=0}$

2) $2\alpha=\pi-4\beta+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$\alpha=\frac{\pi}{2}-2\beta+\pi k, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-2\beta\right)=$

$=\operatorname{ctg}2\beta=\frac{\cos 2\beta}{\sin 2\beta}=\frac{\frac{4}{\sqrt{17}}}{-\frac{1}{\sqrt{17}}}=\underline{-4}$

2. $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\sin(2\beta)=\sin(-2\beta) \Leftrightarrow$ 1. $2\alpha+2\beta=-2\beta+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

2. $2\alpha+2\beta=\pi+2\beta+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

1) $2\alpha=-4\beta+2\pi k, k\in\mathbb{Z}$ $\quad \alpha=-2\beta+\pi k, k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(-2\beta)=$

$=-\operatorname{tg}(2\beta)=-\frac{\sin 2\beta}{\cos 2\beta}=-\frac{\frac{1}{\sqrt{17}}}{\frac{4}{\sqrt{17}}}=\frac{1}{4}$

г) $2\alpha = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$ — невозможен, т.к. tg — не опр!

Ответ: $tg\alpha = 0$, $tg\alpha = 4$, $tg\alpha = \frac{1}{4}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3.

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

ОДЗ: $x^2+6x>0$ — модуль не нужен

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x+x^2 \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} \qquad t=x^2+6x>0$$

$$3^{\log_4 t}+t \geq t^{\log_4 5}$$

$$4^{\log_4 3\cdot\log_4 t}+t \geq t^{\log_4 5}$$

$$t^{\log_4 3}+t \geq t^{\log_4 5} \quad (t>0)$$

$$t^{\log_4 \frac{3}{4}}+1 \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}}$$ — нужно решить

$$f(t)=t^x+1-t^y, \quad x=\log_4\frac{3}{4} < 0, \quad y=\log_4\frac{5}{4}>0$$

— изучим f:

$$f'(t)=\underset{<0}{x}\,\underset{>0}{t^{x-1}}-\underset{>0}{y}\,\underset{>0}{t^{y-1}}<0 \Rightarrow f\downarrow(0,+\infty)$$

— если есть корень $f(t)=0$ — он единственен

• но $t=2$:

$$2^{\log_4\frac{3}{4}}+1=2^{\log_4\frac{5}{4}} \;? \quad 2^{\log_2\frac{9}{16}}+1=2^{\log_2\frac{25}{16}}$$

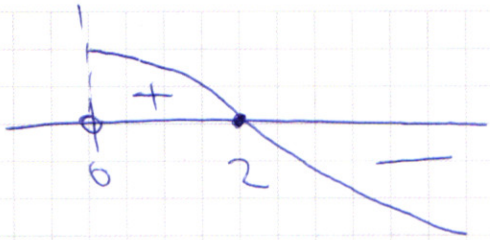
$$\frac{9}{16}+1=\frac{25}{16} \quad \boxed{+}$$

$\Rightarrow t=2$ — корень!!!

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

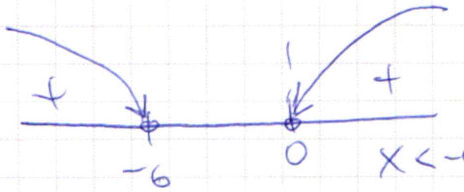
· тогда ~~[illegible]~~ f:



$t^x + 1 \geq t^y \Leftrightarrow f(t) \geq 0 \Leftrightarrow 0 < t \leq 2$

$0 < t = x^2 + 6x \leq 2$

1. $x^2 + 6x > 0$ $\quad x(x+6) > 0$

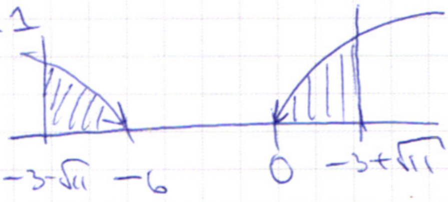


$x < -6 \vee 0 < x$

2. $x^2 + 6x \leq 2$

$x^2 + 6x - 2 \leq 0$ $\quad \frac{D}{4} = 9 + 2 = 11$

$x_1 = -3 + \sqrt{11}$ $\quad x_2 = -3 - \sqrt{11}$



Ответ: $-3-\sqrt{11} \leq x < -6,\ 0 < x \leq -3+\sqrt{11}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

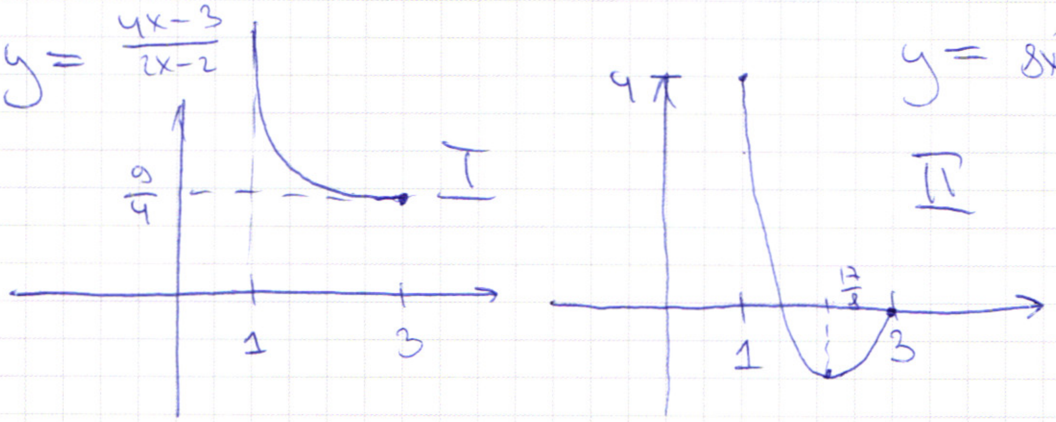
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6.

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

$y=\frac{4x-3}{2x-2}$ $\qquad$ $y=8x^2-34x+30$



— построим прямую проходящую через точки $(1,4)$, $(3,0)$.

$\begin{cases} a+b=4 \\ 3a+b=0 \end{cases}$ $\quad a=-2$, $\quad b=6$

• Эта прямая ~~пересекается~~ на $(1,3)$ лежит не ниже гр. II.

• найдем точки пересечения с I.

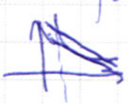
$\frac{4x-3}{2x-2}=-2x+6 \quad 4x-3=(2x-2)(-2x+6)=-4x^2+4x+12x-12$

$4x^2-12x+9=0 \quad (2x-3)^2=0 \quad \underline{x=\frac{3}{2}}$

— единственная точка $\Rightarrow$ $ax+b$ — кас. к I

• но заметим, что если мы возьмем другую прямую, то её значение в (1) ≥ 4 и в (3) ≥ 0

• если мы увеличиваем $\nearrow$, то $\nearrow$ должно уменьшится, иначе прямая будет выше касательной и иметь 2 точки пересечения.

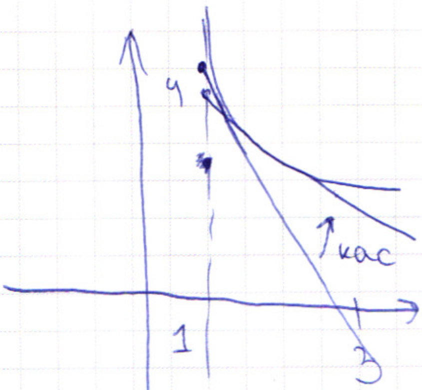


• ~~аналогично в обратную сторону~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)



~~то~~ то есть при ~~...~~

$f(1)=4$ – единственно возможно:

$f(3)=0$

если $f(1)>4$, то $f(3)<0$, что

нельзя, т.к. прямая будет ~~выше~~ не лежать выше II графика.

Ответ: $a=-2$, $b=6$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5.

$f(a) = \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) + \ldots + \alpha_n f(p_n)$ — по свойству в усл.

$a = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$

• $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow \underline{f(1) = 0}$

• $n \in \mathbb{N}$ $f(n \cdot \frac{1}{n}) = f(1) = f(n) + f(\frac{1}{n}) = 0$

$\Rightarrow f(\frac{1}{n}) = -f(n)$

• $m, n \in \mathbb{N}$ $f(\frac{m}{n}) = f(m \cdot \frac{1}{n}) = f(m) + f(\frac{1}{n}) = f(m) - f(n)$

$\Rightarrow f(\frac{m}{n}) < 0 \Leftrightarrow f(m) < f(n)$

— посчитаем все значение f для: 1 — 27

n:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f:	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2

n:	12	13	14	15	16	17	18	19	20
f:	0	3	1	1	0	4	0	4	1

21	22	23	24	25	26	27
1	2	5	0	2	3	0

• сводка от $n = 3$ до $n = 27$: (значение — кол-во)

0 — 10, 1 — 7, 2 — 3, 3 — 2, 4 — 2, 5 — 1

значение кол-во

• только значения:

10, 7, 3, 2, 2, 1

– тогда для i-й позиции ответом будет сумма всех
(числа x дающие i-е значение)

чисел, что i < j, где j-позиция числа y.

А тогда ответ: $10\cdot(7+3+2+2+1)+$
$+\ 7(3+2+2+1)+3(2+2+1)+2(2+1)+2\cdot 1=$

$$=\frac{(10+7+3+2+2+1)^2-10^2-7^2-3^2-2^2-2^2-1^2}{2}=$$

$$=\frac{25^2-100-49-9-4-4-1}{2}=$$

$$=\frac{1}{2}(\underbrace{625-100}_{525}\underbrace{-49}_{476}\underbrace{-9}_{467}\underbrace{-4}_{463}\underbrace{-4}_{459}\underbrace{-1}_{458})=\frac{1}{2}\cdot 458=$$

$$=\underline{\underline{229}}$$

Ответ: 229

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

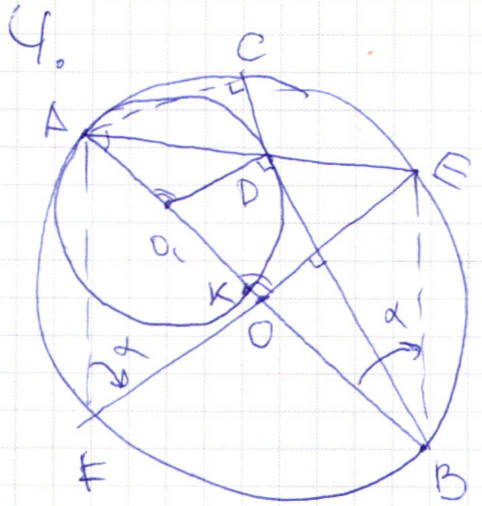
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



• покажем, что EF — диаметр

• O_1 — центр окружности малой

O — пересечение EF и AB

⇒ $O_1D \perp BC$, т.к. BC — кас.

$FE \perp BC$ — по построению

⇒ O_1D и FE — паралл. ⇒ $\triangle AO_1D \sim \triangle AOE$

$AO_1 = O_1D = r$ ⇒ $AO = OE$, но единственная такая точка на диаметре O — центр окружности (т.к. центр окружности должен лежать: 1) на AB, 2) на высоте AEO)

• $\triangle ACB \sim \triangle O_1DB$, т.к. $\angle ACB$ — прямой (опирается на диа.)

• $BC = BD + DC = \frac{5}{2} + \frac{13}{2} = \frac{18}{2} = 9$

• $AC = O_1D \cdot \frac{BC}{BD} = r \cdot \frac{9}{\frac{13}{2}} = \frac{18}{13} r$

• $AB^2 = 4R^2 = AC^2 + BC^2 = \frac{18^2}{13^2} r^2 + 9^2$

• $\underset{\frac{169}{4}}{\underset{\parallel}{BD^2}} = AK \cdot KA = 2(R-r) \cdot 2r = 4r(R-r)$ (т. о Касательной)

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

· итого: $\begin{cases} 4R^2 = \frac{18^2}{13^2}r^2 + 81 \\ \frac{169}{4} = 4Rr - r^2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2^2 \cdot 13^2 R^2 = 18^2 r^2 + 13^2 \cdot 9^2 \\ 13^2 = 16Rr - 4r^2 \end{cases}$

$$R = \frac{\sqrt{\frac{18^2}{13^2}r^2 + 81}}{2}$$

$$\frac{169}{4} = 2\sqrt{\frac{18^2}{13^2}r^2 + 81}\,r - r^2 \qquad x = r^2$$

$$169 = 8\sqrt{\frac{18^2}{13^2}r^2 + 81}\cdot r - 4r^2$$

$$169 + 4r^2 = 8\sqrt{\frac{18^2}{13^2}r^2 + 81}\,r$$

$$13^4 + 16x^2 + 8\cdot 169x = 64\left(\frac{18^2}{13^2}x + 81\right)x$$

$$13^4 + 16x^2 + 8\cdot 169x = \frac{18^2\cdot 64}{13^2}\cdot x^2 + 64\cdot 81x$$

$$\left(16 - \frac{18^2\cdot 64}{13^2}\right)x^2 + (8\cdot 169 - 64\cdot 81)x + 13^4 = 0$$

$$\left(\frac{4^2\cdot 13^2 - 18^2\cdot 8^2}{13^2}\right)x^2 + 8(169 - 648)x + 13^4 = 0$$

— через реш-е квадратного ур-я находится $r = \sqrt{x} \xRightarrow{\text{далее}} R$

· после чего:

$$S_{AEF} = \underset{\text{(прямоугольный)}}{\frac{1}{2}AE\cdot AF} = \frac{1}{2}AE\sqrt{4R^2 - AE^2}$$

$$AE = 2R\sin\alpha$$

$\alpha =$ · $\angle AFE = \angle ABE = \frac{1}{2}\angle AOE = 90° + \angle ABC$

$$\angle ABC = \operatorname{arctg}\frac{AC}{BC} = \operatorname{arctg}\left(\frac{18r}{3R}\right)$$

· $\angle AFE = 90° + \operatorname{arctg}\left(\frac{18r}{3R}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

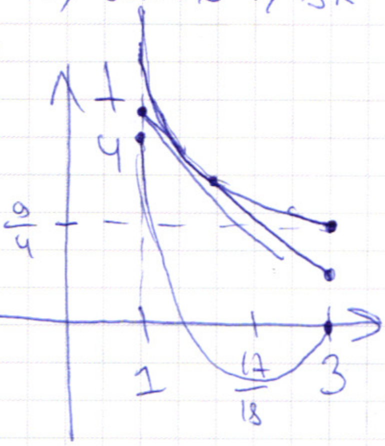
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30 \quad [1,3]$



$x_0 = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

$8\cdot 9 - 34\cdot 3 + 30 =$

$= 2(36-51+15) \; 0$

$2(4x^2-17x+15)$

$4\cdot 9 - 51 + 15$

$a+b \geq 4 \qquad a \geq 4-b$

$3a+b \geq 0 \qquad a \geq -\frac{1}{3}b$

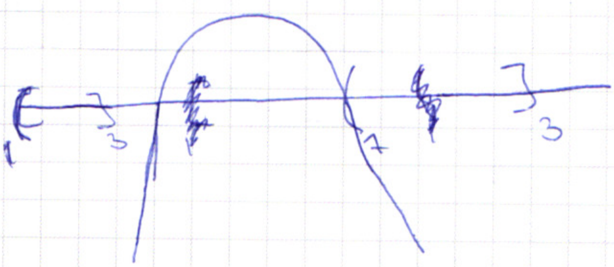
$4x-3 \geq 2(x-1)(ax+b)$

$4x-3 \geq 2ax^2 + x(2b-2a) - 2b \quad [1,3]$

$2ax^2 + 2(b-a-2)x + 3 - 2b \leq 0$

$\underline{a<0}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} f(1) \leq 0 \\ f(3) \leq 0 \\ f'(1)\, f(3) \geq 0 \end{cases}$



$(1,4)$ $(3,0)$

$a+b=4$

$3a+b=0$ $2a=-4$ $a=-2$ $b=6$

$\frac{4x-3}{2(x-1)} \geq -2x+6$

$4x-3 = (2x-2)(-2x+6) = -4x^2+4x+12x-12$

$4x^2-12x+9=0$

$(2x-3)^2=0$ $x=$

$A\left(\frac{15}{13}r\right)^2+81 = 4R^2$

$\frac{324}{169}r^2+81=4R^2$

$\times \frac{18}{18}$ / 144 / 18 / 324

5. $f(ab)=f(a)+f(b)$ $3 \leq m < 27$

$f(p)=\lfloor \frac{p}{4} \rfloor$ $3 \leq n \leq 27$

$f(a)=\alpha_1 f(p_1)+\ldots+\alpha_n f(p_n)$

$f(\frac{m}{n}\cdot n) = f(\frac{m}{n})+f(n)$

$f(1)=0$ $f(\frac{1}{k}\cdot k) = f(\frac{1}{k})+f(k) = 0$ $\boxed{f(\frac{1}{k})=-f(k)}$

$m>n$

$f(m)=f(n\cdot\frac{m}{n}) = f(n)+f(\frac{m}{n})$

$f(\frac{m}{n}) = f(m)-f(n)$

$f(\frac{x}{y})<0 \iff f(x)<f(y)$

25×25 / 275 / 50

25×25 / 125 / 625

$2^{29} \mid 10\cdot 15 + 7\cdot 8 + 3\cdot 5 + 2\cdot 3 + 2 = \overbrace{150+56}^{206}+15+6+2=$ 221 229

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

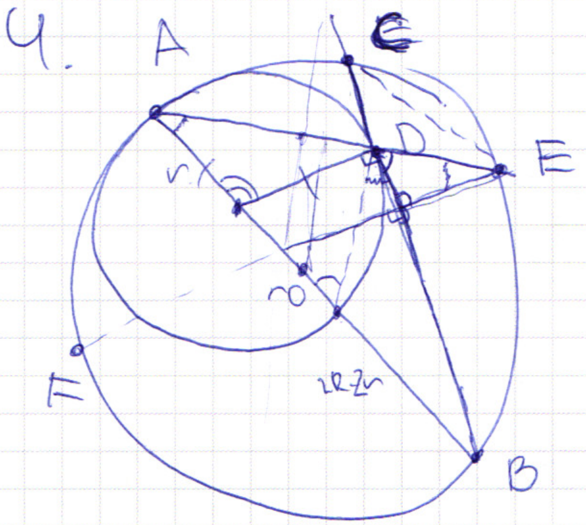
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

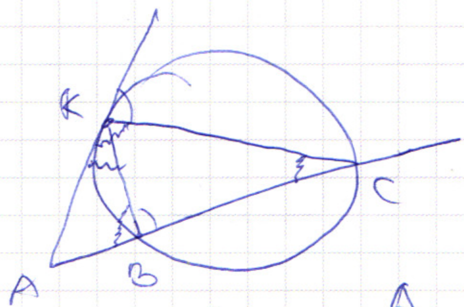
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.





$$AK^2 = AB \cdot AC$$

$$\frac{AK}{AC} = \frac{AB}{AK}$$

$$AK^2 = AB \cdot AC$$

$$BD^2 = 2(R-r)\,2r$$

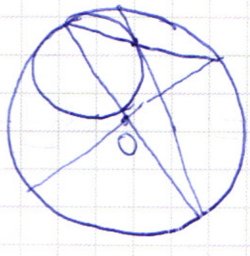
$$\underline{BD^2 = 4(R-r)r}$$

$$CD \cdot DB = AD \cdot DE$$

$$BO^2 = r^2 - (r + 2R - 2r)^2 = r^2 + (2R - r)^2 =$$

$$= 4R^2 - 4Rr + 2r^2$$

$$= 4Rr - r^2$$

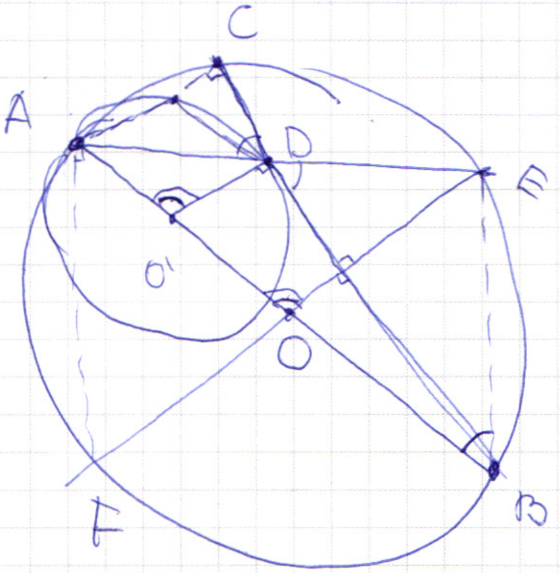


$$4R^2 - 8Rr + r^2 = 0$$

$$8 \cdot 13^2 - 8 \cdot 8 \cdot 81$$

$$\times\, 81 \cdot 8 = 648$$

$$\Delta (189 - 648)$$



$\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R}$ $\frac{AD}{DE} = \frac{r}{R-r}$

$CD \cdot DB =$

$CD\,DB = AD\,DE$

$\frac{CD \cdot DB}{DE^2} = \frac{AD}{DE} = \frac{r}{R-r}$

$BD^2 = 4r(R-r)$

$DE^2 = \frac{(R-r)}{r} CD \cdot DB$ $AE = 2R\sin\alpha$

$AD = 2r\sin\alpha$ $AD^2 = \frac{r^2}{(R-r)^2} DE^2 = \frac{r}{R-r} CD \cdot DB$

$DE^2 = \frac{(R-r)}{r} CD \cdot AB$

$CD = \sqrt{4R^2 - AC^2} - BD = \sqrt{4R^2 - r^2 \cdot 4R^2} -$

$AC = r \cdot \left(\frac{2R}{2R-r}\right) = \frac{2Rr}{2R-r}$

$AC = \cancel{r}\frac{BC}{BD}$

$= \sqrt{4R^2 - \frac{4R^2r^2}{(2R-r)^2}} - BD =$

$(CD+BD)^2 = 4R^2 - AC^2 = 4R^2 - \frac{4R^2r^2}{(2R-r)^2} = 4R^2\left(1 - \frac{r^2}{(2R-r)^2}\right)$

$9^2 = 4R^2 - \frac{4R^2r^2}{(2R-r)^2}$ $9 = 4R^2 \frac{4R^2 - 4Rr}{(2R-r)^2}$

$4R(R-r)$

$\frac{169}{4} = 4rR - 4r^2$

$4r(R-r) = \frac{169}{4}$ $9 = 4R^2\left(\frac{4R^2 - 4Rr}{(2R-r)^2}\right)$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3y-2x=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$4y^2-y^2-4y+1=(2y-1)^2$

$3(x^2-2x+1)$

$3(x-1)^2+(2y-1)^2-y^2=0$

3. $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$x<-6 \vee 0<x$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+(x^2+6x) \geqslant (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 t}+t \geqslant t^{\log_4 5}$

$4^{\log_4 3\cdot\log_4 t}+t \geqslant t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3}+t \geqslant t^{\log_4 5}$

$t^x+t \geqslant t^y$, $\boxed{t>0}$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}}+1 \geqslant t^{\log_4 \frac{5}{4}}$

$f(t)=t^{\log_4 \frac{3}{4}}-t^{\log_4 \frac{5}{4}}+1$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(t) = t^x - t^y + 1 \quad x < 0 < y$

$f'(t) = (x-1)t^{x-1} - (y-1)t^{y-1}$

$(t^x)' = (x-1)t^{x-1}$

$(x-1)t^{x-1} = (y-1)t^{y-1}$

$\frac{x-1}{y-1} = \underline{t^{y-x}}$ $\quad f(t) \uparrow$ t_0 $f(t) \downarrow$

$\frac{\log_4 \frac{3}{4} - 1}{\log_4 \frac{5}{4} - 1} = t^{\log_4 \frac{5}{4} - \log_4 \frac{3}{4}} = \underline{= t^{\log_4 \frac{5}{3}}}$

$t^x + t = t^y$ $\quad x t^{x-1} = y t^{y-1}$

$\frac{x}{y} = t^{y-x}$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1 = t^{\log_4 \frac{5}{4}}$ $\quad t = \left(\frac{x}{y}\right)$

$t^{\frac{1}{2}\log_2 \frac{3}{4}} + 1 = t^{\frac{1}{2}\log_2 \frac{5}{4}}$

$t = 2 \quad t^{\log_2 \frac{9}{16}} + 1 = t^{\log_2 \frac{25}{16}}$ $\quad \underline{\underline{t = 2}}$

$\frac{9}{16} + \frac{16}{16} = \frac{25}{16}$ $+$

$$\begin{array}{r} 648 \\ -169 \\ \hline 479 \end{array}$$

$4^2\left(\frac{13^2 - 18^2 \cdot 4}{13^2}\right)x^2 - 8 \cdot 479x + 13^4 = 0$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

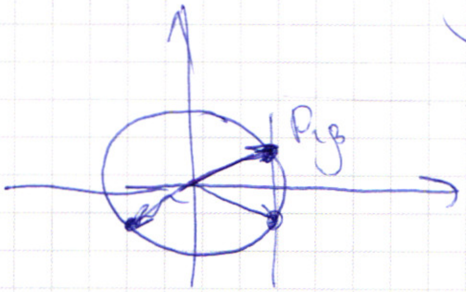
1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)+2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin x+\sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$2\cos 2\beta = \frac{8}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$



$2\beta = \pm\arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

~~$\beta_1 = \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + \pi k, k\in\mathbb{Z}$~~

~~$\beta_2 = -\arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + \pi k, k\in\mathbb{Z}$~~

$\boxed{\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\alpha+2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$

$2\alpha = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) \pm \arccos\frac{4}{\sqrt{17}} + 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow$ 1. $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$; 2. $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\beta$

1) $2\alpha = 2\pi$

$\alpha = \pi \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0$

1. $2\alpha = 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$

$\sin x = \sin y \Leftrightarrow x = y + 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$x = \pi - y + 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$\alpha = \pi k, k\in\mathbb{Z}$

$2\alpha + 2\beta = \pi - 2\beta + 2\pi k, k\in\mathbb{Z}$

$2\alpha = \pi - 4\beta + 2\pi k$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\beta + \pi k, k\in\mathbb{Z}$

2.

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$3y - 2x = \sqrt{3y(x-1) - 2(x-1)} = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$3y - 2 \geqslant 0$

$x \geqslant 1$

$3y \geqslant 2$

$x \geqslant 1$

$\cancel{(2x-3)^2 + (2y-1)^2}$

$3y - 2x \geqslant 0$

$3y \geqslant 2x$

$3x^2 - 6x + 3y(y-4) - 4 = 0$

$(3y - 2x)^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$\cancel{(3y-2)(-1+x)}$

$9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x + 3y - 2 = 0$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y - 4 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)