МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1.

пусть $2\alpha = x$, $2\beta = y$, тогда имеем $\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin x \cos y + \sin y \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin y \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}} - \sin x \cos y$

$\sin(x+2y) + \sin x = -\frac{4}{5} \Rightarrow \sin x \cos 2y + \cos x \sin 2y + \sin x = -\frac{4}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sin x \cos^2 y - \sin x + 2 \cos x \sin y \cos y + \sin x = -\frac{4}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sin x \cos^2 y - \sin x - \frac{2}{\sqrt{5}} \cos y - 2\sin x \cos^2 y = -\frac{4}{5} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{5}} \cos y = \frac{2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos y = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sin y = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$; $\cos 2y = 2\cos^2 y - 1 = 2\cdot\frac{4\cdot 5}{25} - 1 = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2y = \pm\frac{4}{5}$; подставляя в начальные уравнения получаем:

$\sin x \frac{2\sqrt{5}}{5} \pm \frac{\sqrt{5}}{5} \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow 2\sin x \pm 5\cos x = -1$

$\frac{3}{5}\sin x \pm \frac{4}{5}\cos x + \sin x = -\frac{4}{5} \Rightarrow 2\sin x \pm \cos x = -1$; $a = \sin x$, $b = \cos x$

4 случая: 1) $\begin{cases} 2a + 5b = -1 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = 0 \\ a = -\frac{1}{2} \end{matrix} \Rightarrow tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin x = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos x = \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2} \Rightarrow$

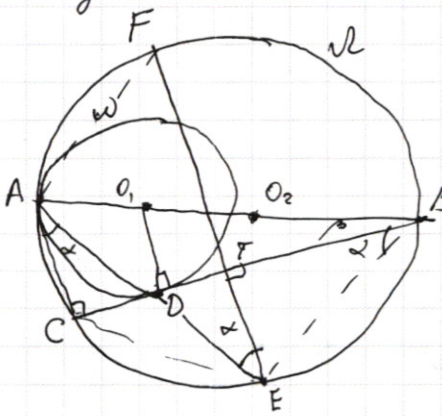
$\Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot(\pm\sqrt{2}) = \mp\frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow tg\alpha =$

$= \left(\mp\frac{\sqrt{2}}{4}\right)\cdot(\pm\sqrt{2}) = -\frac{1}{2}$ либо $\frac{1}{2}$, а так же 0

2) $\begin{cases} 2a + 5b = -1 \\ 2a - b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} b = 0 \\ a = -\frac{1}{2} \end{matrix}$ аналогично и в остальных случаях

Ответ. $-\frac{1}{2}; 0; \frac{1}{2}$

Задание 4.



$BD^2 = 17^2 = BO_1^2 - r^2$; r – рад. ω, R – рад. Ω,

D – диам. Ω. $\angle ACB = 90^\circ$: $\angle O_1DB = 90^\circ$ $\angle B$ – общ.

$\Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle O_1DB \Rightarrow \dfrac{BO_1}{BO_1 + r} = \dfrac{17}{25}$; $BO_1 + r = D$

получим ур-я $\begin{cases} 17^2 = (D-r)^2 + r^2 \\ \dfrac{D-r}{D} = \dfrac{17}{25} \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 25r = 8D \\ 17^2 = D^2 - 2Dr \end{cases} \Rightarrow 64 \cdot 17^2 = 64D^2 - 16 \cdot 8Dr = 25^2 r^2 - 16 \cdot 25 r^2 = 25r^2(25-16) = 9 \cdot 25 r^2 \Rightarrow r^2 = \dfrac{8^2 \cdot 17^2}{3^2 \cdot 5^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \dfrac{8 \cdot 17}{3 \cdot 5} = \dfrac{136}{15} \Rightarrow D = \dfrac{25}{8} \cdot \dfrac{8 \cdot 17}{3 \cdot 5} = \dfrac{85}{3} \Rightarrow R = \dfrac{85}{6}$

$FE \parallel O_1D \parallel AC$ из этого: $\angle DET = \angle CAD = \angle CBE \Rightarrow \angle CAE = \angle AEF \Rightarrow$

$\Rightarrow \cup AF = \cup CE \Rightarrow AF = CE \Rightarrow ECAF$ – р/б трапеция; $\angle ADC = \frac{1}{2} \angle AO_1D =$

$= \frac{1}{2}(\pi - \angle DO_1B) = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \angle ABD) \Rightarrow \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + \beta) \Rightarrow \pi - 2\alpha = \frac{\pi}{2} + \beta \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha + \beta = \frac{3\pi}{2}$; $\cancel{\left(AC = \sqrt{\frac{85^2}{9} - 25^2} = 5\sqrt{\frac{85^2}{9 \cdot 25^2} - 1} = 5\sqrt{\frac{17^2}{9} - 1} = 5\sqrt{\frac{280}{9}} = \frac{10\sqrt{70}}{3} \Rightarrow\right.}$

$\cancel{\sin\beta = \frac{10\sqrt{70}}{3} \cdot \frac{3}{85} = \frac{2\sqrt{70}}{17}; \sin 2\alpha = \sin(\frac{3\pi}{2} - \beta) = -\cos\beta =}$

$\cancel{= -\sqrt{1 - \frac{280}{289}} = -\frac{3}{17} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}\arcsin(-\frac{3}{17})} \Rightarrow \angle AFE = \alpha + \beta =$

$\cancel{= \frac{1}{2}\arcsin(-\frac{3}{17}) + \arcsin\frac{2\sqrt{70}}{17}}\Big)$; $\angle FAE = \pi - \alpha - \alpha - \beta = \pi - (2\alpha + \beta) =$

$= \pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow FE = D = \frac{85}{3}$; $\cancel{\sin 2\alpha = -\frac{3}{17} \Rightarrow \cos 2\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{289}} =}$

$\cancel{= \frac{2\sqrt{70}}{17}}\Big) \Rightarrow CT = TB = \frac{25}{2}$; $S_{\triangle AFE} = \frac{1}{2} CT \cdot FE = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} \cdot \frac{85}{3} =$

$= \frac{2125}{12}$; $\cancel{\alpha = \frac{1}{2}\arcsin(-\frac{3}{17})}$; $AC = \sqrt{\frac{85^2}{9} - 25^2} = 5\sqrt{\frac{85^2}{9 \cdot 25} - 25} =$

$= 5\sqrt{\frac{289}{9} - 25} = 5\sqrt{\frac{289 - 225}{9}} = 5 \cdot \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{5 \cdot 8}{3} = \frac{40}{3} \Rightarrow tg\,\alpha = 8 \cdot \frac{3}{5 \cdot 8} = \frac{3}{5} \Rightarrow$

$(tg\,\alpha = \frac{CD}{AC}) \Rightarrow 1 + \frac{9}{25} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{34}{25} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{25}{34} \Rightarrow \sin^2\alpha = 1 - \frac{25}{34} =$

$= \frac{34 - 25}{34} = \frac{9}{34} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow \alpha = \arcsin\frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow \angle AFE = \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{\sqrt{34}} =$

$= \arccos\frac{3}{\sqrt{34}}$

Ответ. $r = \frac{136}{15}$; $R = \frac{85}{6}$; $\angle AFE = \arccos\frac{3}{\sqrt{34}}$; $S_{AEF} = \frac{2125}{12}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 2.

$x^2+9y^2-4x-18y=12 \Rightarrow x^2-4xy+4y^2+4xy+5y^2-4x-18y=12 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy-x-2y+2+4xy+5y^2-4x-18y=12 \Rightarrow 5xy-5x-20y+5y^2=10 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy-x-4y+y^2=2 \Rightarrow x=\frac{-y^2+4y+2}{y-1}$ (1) ; $x^2=12+4x+18y-9y^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \Rightarrow x^2+4y^2=5xy-x-2y+2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 12+4x+18y-9y^2+4y^2=5xy-x-2y+2 \Rightarrow 10+5x+20y-5y^2=5xy \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{2+5x+20y-5y^2=5xy}$ | поставим (1) в 1е ур-е:

$\frac{(y^2+4y+2)^2}{(y-1)^2}-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \Rightarrow \frac{(-y^2+4y+2)^2}{(y-1)^2}+4y^2=5xy-x-2y-2$

$\Rightarrow (y^2+4y+2)^2+\cancel{(4y-y)^2}+4y^2(y-1)^2=5y(y^2+4y+2)(y-1)-$

$-(y^2+4y+2)(y-1)-2y(y-1)^2-2(y-1)^2 \Rightarrow \cancel{(y^4+8y^3+20y^2+16y+4+}$

$\cancel{+4y^4-8y^3+4y^2=5y^4+15y^3-15y^2-10y-y^3-3y^2+3y+2-}$

$\cancel{-2y^3+4y^2-2y \Rightarrow 20y^2+16y+4=12y^3-14y^2-9y+2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{12y^3-34y^2-25y-2=0 \Rightarrow 6y^3=17y)}$ $y^4-8y^3+12y^2+16y+4+$

$+4y^4-8y^3+4y^2=-5y^4+25y^3-10y^2-10y+y^3-5y^2+2y+2-$

$-2y^3+4y^2-2y-2y^2+4y-2 \Rightarrow 5y^4-16y^3+16y^2+16y+4=$

$=-5y^4+24y^3-13y^2-6y \Rightarrow 10y^4-40y^3+29y^2+22y+4=0$

Задание 5.

(1) $f(ab)=f(a)+f(b)$ (2) $f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

заметим, что $f(a^n)=nf(a)$; $f(a\cdot\frac{1}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a})=f(1)$

$f(1)=n f(1)$; значит $f(1)=0$; Найдем $f(p)$ для $1\le p\le 24$:

$f(2)=f(3)=0$, $f(5)=f(7)=1$, $f(11)=2$, $f(13)=3$, $f(17)=4$, $f(19)=4$,

$f(23)=5$

~~по св-ву (1): f(4) = 2f(2) = 0; f(6) = f(2) + f(3) = 0, f(8) = 3f(2) = 0~~

по св-ву (1): $f(4) = 2f(2) = 0$; $f(6) = f(2) + f(3) = 0$, $f(8) = 3f(2) = 0$

$f(9) = 2f(3) = 0$, $f(10) = f(2) + f(5) = 1$, $f(12) = 2f(2) + f(3) = 0$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$, $f(15) = f(3) + f(5) = 1$, $f(16) = 4f(2) = 0$, $f(18) =$

$= f(2) + 2f(3) = 0$; $f(20) = 2f(2) + f(5) = 1$, $f(21) = f(3) + f(7) = 1$,

$f(22) = f(2) + f(11) = 2$; $f(24) = 3f(2) + f(3) = 0$. Получили таблицу.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
f(n)	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0

Из полученных соотношений $f(a) + f(\frac{1}{a}) = f(1) = 0 \Rightarrow f(a) = -f(\frac{1}{a})$,

тогда $f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$, т.е. $f(x/y) < 0$, когда $f(y) > f(x)$

Из таблицы следует, что таких пар (x, y): $7 \cdot 11 + 2 \cdot 18 + 20 +$

$+ 2 \cdot 21 + 23 = 77 + 36 + 42 + 43 = 120 + 78 = 198$

Ответ. 198.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha$

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(x+2y)+\sin x = -\frac{4}{5}$; $tg x = ?$

$\sin x \cos y + \sin y \cos x = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin x \cos 2y + \cos x \sin 2y + \sin x = -\frac{4}{5}$

$\cos x \sin 2y = 2 \underline{\cos x \sin y} \cos y = -2\left(\frac{1}{\sqrt5}+\sin x\cos y\right)\cos y$

$2\sin x \cos^2 y - \cancel{\sin x} - \frac{2}{\sqrt5}\cos y - 2\sin x \cancel{\cos^2 y} \overset{+\sin x}{=} -\frac{4}{5} \Rightarrow \sqrt5 \cos y$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt5}\cos y = \frac{2}{5} \Rightarrow \cos y = \frac{2\sqrt5}{5} \Rightarrow \sin y = \pm\sqrt{1-\frac{4\cdot5}{25}} = \pm\frac{\sqrt{25-20}}{5} =$

$= \pm\frac{\sqrt5}{5}$; $\sin x \cdot \frac{2\sqrt5}{5} \pm \frac{\sqrt5}{5}\cos x = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \underline{\frac{2}{5}\sin x \pm \cos x = -1}$;

$\cos 2y = 2\cos^2 y - 1 = \cancel{2\cdot\frac{4\cdot 20}{25} - 1 = \frac{32}{5} - 1}$ $= 2\cdot\frac{4\cdot 5}{25} - 1 = \frac{8}{5} - 1 = \frac{3}{5}$

$\sin 2y = \pm\frac{4}{\sqrt5} \Rightarrow \frac{3}{5}\sin x \pm \frac{4}{5}\cos x + \sin x = -\frac{4}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 8\sin x \pm 4\cos x = -4 \Rightarrow 2\sin x \pm \cos x = -1$

$xy - x - 2y + 2 = x(y-1) - 2(y-1) = (y-1)(x-2)$

$x^2+9y^2-4x-18y = x^2-4x+4-4+9y(y-2) \Rightarrow (x-2)^2-4+9y(y-2)$

$\begin{cases} x-2y = \sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x-2)^2+9y(y-2) = 11 \end{cases}$; $9y^2-36y+36+18y = (3y-6)^2+18y =$

$= 9(y-2)^2+18y = 9(y^2-4y+4+2y)$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}3} - 18x \Rightarrow 5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$; $f(t) = t^{\log_{12}13}$; $f'(t) = \log_{12}13\, t^{\log_{12}13-1} = t^{0,1}$

$f'(t) = 0 \Rightarrow t = 0$. $= \log_{12}13\, t^{\log_{12}\frac{13}{12}}$

$-y^3+4y^2+2y^2+y^2-4y-2$

$g(t) = 5^{\log_{12}t}+t$; $g'(t) = \cancel{5^{\log_{12}t-1}}$

$-y^3+5y^2-4y-y^3$

$(y^2+4y+2)(y^2+4y+2) = y^4 + 4y^3 + 2y^2 + 4y^3+16y^2+8y + 2y^2+8y+4 =$

$= y^4+8y^3+20y^2+16y+4$ $\quad y^3+4y^2+y-y^2-4y-2 =$

$= y^3+3y^2-3y-2$ $\quad 12\cdot 8 - 34\cdot 4 - 25\cdot 2 - 2 = 96 -$

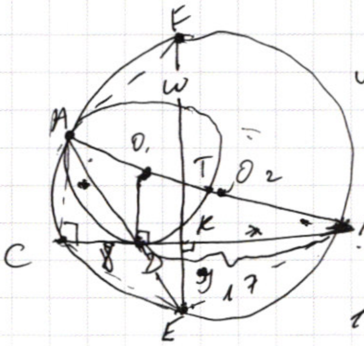
$y^4-8y^3+12y^2+16y+4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$17^2 = BO_1^2 - r^2$; $\frac{BO_1}{BO_1 + r} = \frac{17}{25}$

$BO_1 + r = D$; $BO_1 = D - r$

$17^2 = (D-r)^2 - r^2$; $\frac{D-r}{D-r+r} = \frac{17}{25}$

$17^2 = D^2 - 2Dr + r^2 - r^2$; $\frac{D-r}{D} = \frac{17}{25}$

$17^2 = D^2 - 2Dr$; $25D - 25r = 17D \Rightarrow 25r = 8D$

$64 \cdot 17^2 = 64D^2 - 16 \cdot 8Dr = \cancel{64D^2} - = 25^2 r^2 - 16 \cdot 25 r^2 =$

$= 25r^2(25 - 16) = 8 \cdot 25 r^2 \Rightarrow r^2 = \frac{64 \cdot 17^2}{8 \cdot 25}$

$= 8 \cdot \left(\frac{17}{5}\right)^2 \Rightarrow r = \frac{17}{5} \cdot 2\sqrt{2} = \frac{34\sqrt{2}}{5} \Rightarrow D = \frac{34\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{25}{8} = \frac{85\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow R = \frac{85\sqrt{2}}{8}$; $\angle AFE = \angle ABE = \angle ABC + \angle ACE$

$AC = \sqrt{\frac{17^2 \cdot 5^2 \cdot 2}{16} - 25^2} = 5\sqrt{\frac{17^2}{8} - 1} = 5\sqrt{\frac{17^2 - 8}{8}}$

$x - 2y = \sqrt{(y-1)(x-2)} \Rightarrow x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$x^2 - 4y^2 + 4y^2 + 9y^2 - 9y - 9y - 4x = 12$; $(x-2y)(x+2y) + 9y(y-1)$

$(x-2y)^2 = x^2 - 4xy + 4y^2$

$x^2 - 4xy + 4y^2 + 4xy + 5y^2 - 4x - 18y = 12$; $xy - x - 2y + 2 + 4xy +$

$+ 5y^2 - 4x - 18y = 12 \Rightarrow 5xy - 5x + 5y^2 - 20y = 10 \Rightarrow$

$\Rightarrow xy - x + y^2 - 4 = 2 \Rightarrow x(y-1) + (y-2)(y+2) = 2$

$x(y-1) + (y-1)(y+1) = 4 \Rightarrow (y-1)(x+y+1) = 4$

$\cancel{x = \frac{6-y^2}{y-1} \Rightarrow \frac{6-y^2}{y-1} - 2y = \frac{6-y^2}{y-1}y - \frac{6-y^2}{y-1} - 2y + 2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{6 - y^2 - 2y^2 + 2y = 6y - y^3 - 6} + y^2$ $\quad x = \frac{6-y^2}{y-1}$

$x^2 - 4xy + y^2 = 12 + 4x + 18y - 9y^2 - 4xy + y^2 = 12 + 4x + 18y - 4xy - 8y^2$

$12 + 4x + 18y - 4xy - 8y^2 = xy - x - 2y + 2 \Rightarrow 10 + 5x + 20y = 5xy + 8y^2$

$10 + 5\frac{6-y^2}{y-1} + 20y = 5y\frac{6-y^2}{y-1} + 8y^2 \Rightarrow 10y - 10 + 30 - 5y^2 +$

$+ 20y^2 - 20y = 30y - 5y^3 + 48y^2 - 8y^3 \Rightarrow 20 + 15y^2 - 10y =$

$= 30y - 13y^3 + 48y^2 \Rightarrow 13y^3 - 33y^2 - 40y + 20 = 0$

$13 \cdot 8 - 33 \cdot 4 - 40 \cdot 2 + 20 = 104 -$

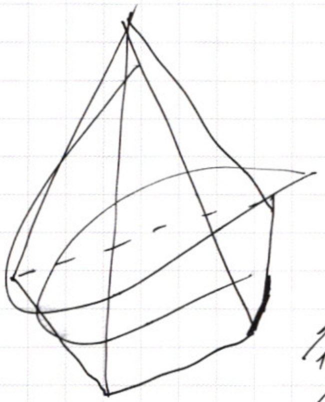
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

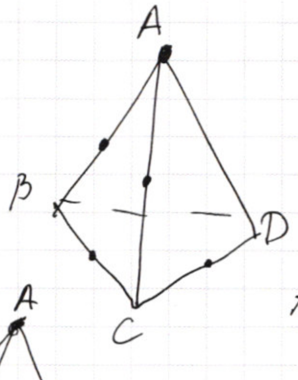
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

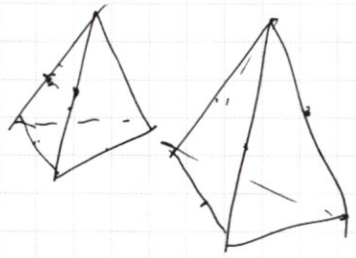
ШИФР

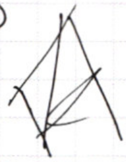
(заполняется секретарём)

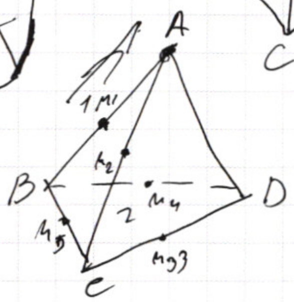
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА











$-y^3+y^2+4y^2-4y+2y-2$

$-y^3+5y^2-2y-2$

$f(a\cdot a)=f(a)+f(a)=2f(a)\ ;\ f(a^n)=nf(a)$

$f(\frac{a}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(1)=f(a)+f(\frac{1}{a})\ ;\ f(\frac{1}{a})=f(1)+f(\frac{1}{a}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(1)=0\ ;\ \cancel{f(a)} \Rightarrow f(a)=-f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(x/y)=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$

~~2 3 4 5 6 7 8~~

$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23\ ;\ f(2), (3,5)$

$23: 8,\ 19: 6\ \ 13: 5\ \ 11: 4\ \ 5: 2\ ;\ 8+6+5+4+2=25$

$4=2^2 \Rightarrow f(4)=2f(2)\ ;\ f(6)=f(2)+f(3)\ ;\ f(8)=3f(2)\ ;\ f(9)=2f(3)$

$f(10)=f(2)+f(5)\ ;\ f(12)=2f(2)+f(3)\ ;\ f(14)=f(2)+f(7)$

$5^{\log_{12} t}+t \geq |t|^{\log_{12} 13}$

$17 > 13$

$f(t)=5^{\log_{12} t}+t=e^{\ln(\log_{12} t)}+t\ ;\ \cancel{te^{\ln(\log_{12} t)}}\ \frac{1}{t}$ $\quad \sqrt{5}+\sqrt{12} > \sqrt{13}$

$f'(t)=\log_{12} t\cdot 5^{\log_{12} t-1}\cdot 12^t \log_{12} t \qquad \frac{1}{5}+\frac{1}{12} > \frac{1}{13}$

$\lim\limits_{t\to 0+}(5^{\log_{12} t}+t)=0,\ \log_{x^2+18x}(5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x) \geq 0$

$\frac{12x+11}{4x+3}=\frac{12x+9+2}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3}$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 85 \\ \times\ 25 \\ \hline 425 \\ 170 \\ \hline 2125 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12} t} + t \geq |t|^{\log_{12} 3}$