МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №3

$$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)} = x^2 + 5^{\frac{\log_5(10x-x^2)}{\log_5 3}} =$$

$$= x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 5}$$

$$\Updownarrow$$

$$(x^2-10x) \leq |x^2-10x|^{\log_3 4} + (10x-x^2)^{\log_3 5}$$

ОДЗ:

$10x - x^2 \geq 0$

$0 \geq x^2 - 10x = x(x-10)$

$x \in (-\infty; 0] \cup [10; +\infty)$

$+ \quad - \quad +$; 0, 10

+ОДЗ

$$(x^2-10x) \leq (x^2-10x)^{\log_3 4} - (10x-x^2)^{\log_3 5}$$

Возьмем производную с двух сторон

$$(2x-10) \leq (x^2-10x)^{\log_3 4 - 1}(2x-10) + (10x-x^2)^{\log_3 5} \cdot (2x-10)$$

$$1 \leq (x^2-10x)^{\log_3 4 - 1} + (10x-x^2)^{\log_3 5}$$

Сделаем замену

$x^2 - 10x = p$

$$p \leq p^{\log_3 4} + (-p)^{\log_3 5}$$

Заметим, чтобы это выполнилось, нужно, чтобы

~~Ответ: $x \in (\log_3$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №5

1) $f(a\cdot b) = f(a) + f(b)$ 2) $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

Рассмотрим функцию $f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right) = f(x)$ по условию 1)

$$f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$$

Тогда, $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$$\Updownarrow$$

$$f(x) < f(y)$$

Таким образом, нам нужно посчитать кол-во пар N чисел, что $f(x) < f(y)$. Давайте вручную найдем все возможные значение $f(x)$ в отрезке от 2 до 25

Будем пользоваться условием:

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = f(2) + f(4) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = f(3) + f(4) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(16) = f(4) + f(4) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = f(2) + f(9) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = f(4) + f(5) = 1$

$f(21) = f(3) + f(7) = 1$

$f(22) = f(2) + f(11) = 2$

$f(23) = 5$ $f(24) = f(4) + f(6) = 0$ $f(25) = f(5) + f(5) = 2$

Таким образом среди чисел x: $2 \le x \le 25$

значение $f(x)$ - составляют такое множество:

"0" – 10 штук
"1" – 7 штук
"2" – 3 штуки
"3" – 1 штука
"4" – 2 штуки
"5" – 1 штука

Осталось понять сколько же вариантов вобрать два числа из одинаковых наборов, чтобы A и B состоящих из таких элементов, чтобы $a < в$.

Давайте переберем вручную.

1) $a = 0 \Rightarrow в \geq 1$
кол-во вариантов: $10 \cdot 14$

2) $a = 1 \Rightarrow в \geq 2$
кол-во вариантов $7 \cdot 7$

3) $a = 2 \Rightarrow в \geq 3$
кол-во вариантов $3 \cdot 4$

4) $a = 3 \Rightarrow в \geq 4$
кол-во вариантов
$1 \cdot 3$

5) $a = 4 \Rightarrow в \geq 5$
кол-во вариантов
$2 \cdot 1$

6) $a = 5 \Rightarrow в \geq 6$
0 вариантов

Просуммируем и получим ответ:

$$10 \cdot 14 + 7 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 140 + 49 + 12 + 3 + 2 = 196$$

Ответ: 196 способов

Тогда нам нужно вычислить AD.

Из свойств окружности мы знаем, что $BD \cdot DC = ED \cdot DA$

$$AD = \frac{BD \cdot DC}{ED} = \frac{BD \cdot DC}{\sqrt{BD^2 - BE^2}} = \frac{BD \cdot DC}{\sqrt{BD^2 - \frac{2R}{\cos(\alpha)}}}$$

$$\sin(\alpha) = \frac{BD \cdot DC}{\sqrt{BD^2 - \frac{2R}{\cos(\alpha)}} \cdot 2r}$$

$$2r \sin(\alpha) \sqrt{BD^2 - \frac{2R}{\cos(\alpha)}} = BD \cdot DC$$

$$4r^2 \sin^2\alpha \left(BD^2 - \frac{2R}{\cos(\alpha)}\right) = BD^2 \cdot DC^2$$

$$\sin^2\alpha\, BD^2 - \frac{2R \sin^2\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{BD^2 \cdot DC^2}{4r^2}$$

$$BD^2 \sin^2\alpha \sqrt{1-\sin^2\alpha} - 2R\sin^2\alpha = \frac{BD^2 \cdot DC^2}{4r^2} \cdot \sqrt{1-\sin^2\alpha}$$

Заметим, что $\triangle PDA \sim \triangle BEA$.

$$\begin{cases} \frac{AD}{AE} = \frac{2r}{R}, \\ ED \cdot DA = BD \cdot DC \end{cases}$$

но с другой стороны, пусть $AD = x$; $AE = y$

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{2r}{R} \\ x \cdot y = BD \cdot DC \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{2r}{R} y \qquad y^2 = \frac{BD \cdot DC}{\frac{2r}{R}} = \frac{R \cdot BD \cdot DC}{2r}$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{2r}{R} \cdot \sqrt{\frac{R \cdot BD \cdot DC}{2r}}$$

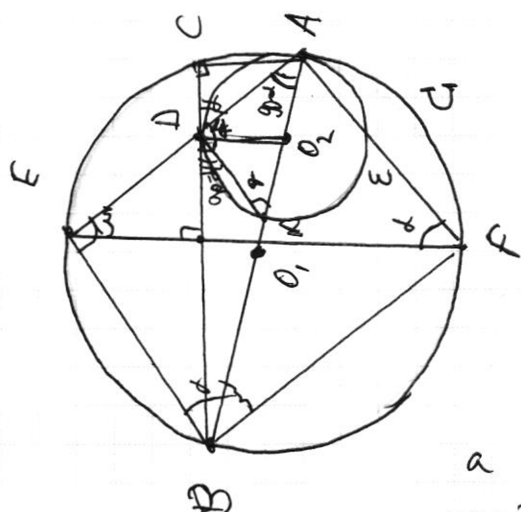
$$\Rightarrow \quad \sin(\alpha) = \frac{x}{2r} = \sqrt{\frac{BD \cdot DC}{2Rr}} = \sqrt{\frac{\frac{15^2 \cdot 17^2}{2^4}}{2 \cdot \frac{17^2 \cdot 15^2 \cdot 17^2 \cdot 15}{128 \cdot 4}}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2^4}{17^2 \cdot 15}} = \frac{4}{17} \cdot \sqrt{\frac{1}{15}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{4}{17} \cdot \sqrt{\frac{1}{15}}\right)$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4



$BD = \frac{17}{2}$ $CD = \frac{15}{2}$

Точки A, O_2, O_1, B лежат на одной прямой, т.к V и ω касаются в A.

$\angle O_2DB = 90^\circ$ - касательная

$\angle ACB = 90^\circ$ - опирается на диаметр $\Rightarrow$ Пусть r - радиус(ω), а R - радиус (V)

$$\begin{cases} BD^2 + r^2 = (R-r)^2 \\ \frac{BD}{BC} = \frac{R-r}{R} \end{cases}$$

Решаем систему:

$$\begin{cases} \left(\frac{17}{2}\right)^2 = R \cdot (R-2r) \\ \frac{17}{32} = \frac{R-r}{R} \end{cases} \Leftrightarrow 17R = 32R - 32r \Rightarrow R = \frac{32}{15} r$$

$$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = \frac{32r}{15} \cdot \left(\frac{2}{15} r\right)$$

$$r = \frac{17^2 \cdot 15^2}{128}$$

$$R = \frac{17^2 \cdot 15^2}{128} \cdot \frac{32}{15} = \frac{17^2 \cdot 15}{4}$$

2) $\angle AFE = \angle EBA$ как опираются, но так же он равен $\angle 90 - EAD$, т.к $\triangle BEA$ - прямоугольный.

По т. косинусов. $\cancel{O_2D^2 = O_2A^2 + AD^2 + 2 \cdot AD \cdot AO_2 \cdot \cos(90-\alpha)}$

$2r \sin(\alpha) = AD$

$$\sin(\alpha) = \frac{AD}{2r}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №6

Решим задачу графическим способом.

$$\frac{16x-16}{4x-5} = \frac{4\cdot(4x-5)+4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$$

$$-32x^2+36x-3 = -(32x^2-36x+3) = -\left(32x^2 - \sqrt{32}\cdot 2\cdot\frac{9}{\sqrt{2}}x + \frac{81}{4} - \frac{81}{4} + 3\right) = -\left(\left(\sqrt{32}x - \frac{9}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{69}{4}\right) =$$

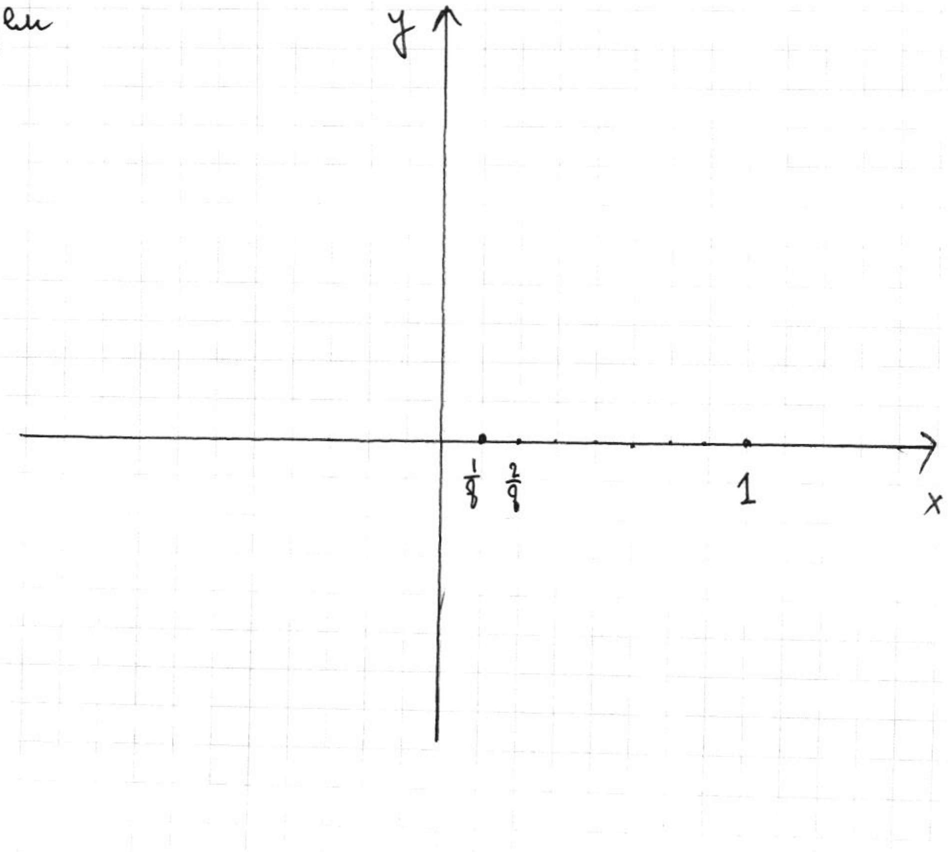
$$-\left(\sqrt{32}x - \frac{9}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{69}{4}$$

$$4 + \frac{4}{4x-5} \le ax+b \le -\left(\sqrt{32}x - \frac{9}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{69}{4} =$$

$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(8x-9)\right)^2 + \frac{69}{4} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot(8x-9)^2 + \frac{69}{4}$$

Рисуем



☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №4

Продолжение.

3) Осталось найти площадь ΔEFA.

$$S_{\Delta EFA} = \frac{EF \cdot FA \cdot \sin(\alpha)}{2}$$

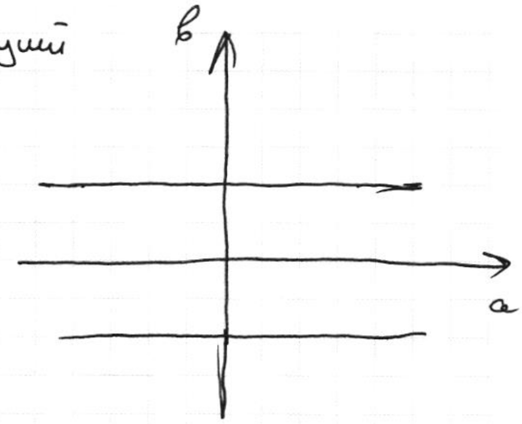
Найдем каждой отрезок по отдельности:

$$AF = \frac{2R}{\sin(\angle AEF)}$$

$$FE = \frac{2R}{\sin(\angle BEF)}$$

Ответом является произведение соответственных частей.

Давайте рассмотрим графики функций



$$\begin{cases} (a-6b)^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

~~Возводим в квадрат,~~

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} a^2 + 36b^2 = 13ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}.$$

решим (1) $a^2 + 13ab + 36b^2 = 0$

$D = 169b^2 - 144b^2 = 25b^2$

$\Rightarrow a_1 a_2 = \dfrac{13b \pm 5b}{2}$

$a_1 = 9b$

$a_2 = 4b$

$(a-4b)(a-9b) = 0 \Rightarrow$

1) $a = 4b$ – не подходит, т.к по ОДЗ a должен быть больше или равен $6b$.

2) $a = 9b$

$90b^2 = 90 \Rightarrow \begin{cases} b = \pm 1 \\ a = \pm 9 \end{cases}$ Делаем проверку всех значений с ОДЗ.

1) $b = 1$ $a = 9$ – подходит

2) $b = -1$ $a = 9$ – $a \cdot b \le 0$ противоречие

3) $b = 1$ $a = -9$ – $a \cdot b \le 0$ противоречие

4) $b = -1$ $a = -9$ – $a \le 6b$ противоречи

$\Rightarrow$ подходит только (1)

$\begin{cases} 9 = x - 6 \\ 1 = 2y - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 15 \\ y = 1 \end{cases}$ Ответ: $(15; 1)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №2

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x+36y=45 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \left.\begin{cases} (x-6)(2y-1)\geq 0 \\ x\geq 12y \end{cases}\right\} \text{ОДЗ} \\ (x-12y)^2=(x-6)(2y-1) \\ (x^2+12x+36-36)+36\left(y^2-y+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right)=45 \end{cases}$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \left.\begin{matrix} (x-6)(2y-1)\geq 0 \\ x\geq 12y \end{matrix}\right\} - \text{одз} \\ (x-12y)^2=(x-6)(2y-1) \\ (x-6)^2+36\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=45+36+9=90 \end{cases}$$

Пусть $a=x-6$

$b=2y-1$, тогда система равносильна:

$$\begin{cases} (a-6b)^2=a\cdot b \\ a^2+36\left(\frac{b}{2}\right)^2=90=a^2+9b^2=(a+3b)^2-6(a-6b)^2 \\ \left.\begin{matrix} a\geq 6b \\ a\cdot b\geq 0 \end{matrix}\right\} \text{одз} \end{cases}$$

$$\parallel$$

$$a^2+6ab+9b^2-6a^2+72ab-216b^2$$

$$a^2+78ab-207b^2-90=0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{2}{5}. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = 2\cdot\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right) = -\frac{2}{5}$$

$$= -\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$\Downarrow$$

$$\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \iff \sin(2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta) + \cos(2\alpha)\cdot\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\sin(2\alpha) + \left(\pm\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha) + (\pm)\, 2\cos(2\alpha) = -1$$

$$2\sin(\alpha)\cos(\alpha) + 2\cos^2(\alpha) - 2\sin^2(\alpha) = -1$$

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3 (10x - x^2)}$

$4 \cdot 9$

$\frac{\sqrt{2} \cdot 9}{\sqrt{2}}$ $81 - 12 = 69$

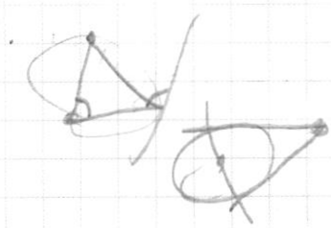
$5^{\log_3 (10x - x^2)} \geqslant x^2 - 10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4}$

$5^{\frac{\log_5 (10x - x^2)}{\log_5 3}}$

$(10x - x^2)^{\log_3 5}$

$p^{\log_3 5} + |p|$

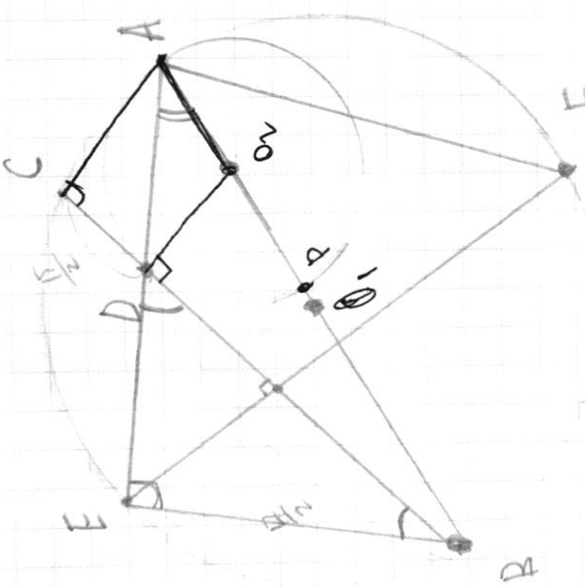
$ED \cdot D = BD \cdot DC$



$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = OP \cdot OA$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 + r^2 = (R - r)^2$

$\frac{DP}{BC} = \frac{R - r}{}$



$a = \sqrt{-90 + 9b^2}$

$= 2b\sqrt{90 - 9b^2}$

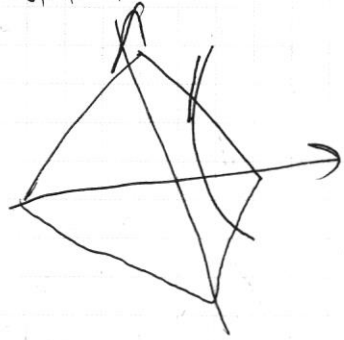
$9b^2 - 207b^2 - 90$

$90 - 18 = 72$

$a^2 + 36b^2 = 13ab$ $\quad a^2 \geq 72$

$|a + 3b| = |90|$

$2a - 13b = 0$ $\quad (\sqrt{72} - 6\sqrt{2})^2 = 72 + 6\sqrt{2}$



$a =$

$169b^2 + 36b^2$ $\quad a^2 + 12ab + 36b^2$

$144 + 12\sqrt{144}$ $\quad b^2 \leq 2$

$\sqrt{2} - 12\sqrt{144}$ $\quad a^2 \geq 72$

b^2 $\quad a^2 + 9b^2 \geq 9ab$ $\quad b = 2$

$9ab \geq 10$

$72 + 12\sqrt{72}\,b + 36b^2$ $\quad (a-9)$

$$\begin{cases} (a - 6\sqrt{2})^2 = \sqrt{2}a \\ a^2 = 72 \end{cases}$$

$BE = \frac{2R}{\sin(90 - \alpha)} = \frac{2R}{\cos(\alpha)}$

36

$(\sqrt{72} - 6\sqrt{2})^2 = 12$ $\quad (-9 + 12)^3$

$90 + 27b^2 = 130$ $\quad \sqrt{2}(\sqrt{36} - 6)^2$

$b^2 \leq \frac{40}{27}$ $\quad -9 \geq -6$

$b = 1$

$(a - b)^2 = a \cdot 1$ $\quad a = 9,\ b = 1$ $\quad a = 9,\ b = -1$

$a = 9$

$\frac{1}{3}$

$b = 3$

$a = 3$ $\quad (3 - 18)^2$

$\log_3 x - 1$ $\quad \log_3 (x^2 - 10x)$ $\quad 2x - 5 \leq 1$

$2^5 \cdot 2^2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

$$|x^2 - 10x|^{\log_3 4} - 5^{\log_3(10x-x^2)} \geqslant x^2 - 10x$$

lo

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin((2\alpha + 4\beta) + \sin(2\alpha)) = \sin(2\alpha)\cdot\cos(4\beta) + \sin(4\beta)\cdot\cos(2\alpha) + \sin(2\alpha)$$

$$(a+3b)^2 = 6ab$$

$$\cos(2\beta + 2\beta) = \cos^2(2\beta) - \sin^2(2\beta)$$

$$\sin(2\beta + 2\beta) = 2\cos(2\beta)\sin(2\beta)$$

$$\sin(2\alpha)\cdot\cos^2(2\beta) - \sin(2\alpha)\cdot\sin^2(2\beta) + 2\sin(2\beta)\cdot\cos(2\beta)\cdot\cos(2\alpha)$$

$$+ \sin(2\alpha)$$

$$\sin(a) + \sin(\beta)$$

$$2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos(2\beta) = \frac{2}{\frac{5}{\sqrt{5}}}$$

$$\cos(2\beta) = -\sqrt{5}$$

$$90 = \qquad tg\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}$$

$$\sin(2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$(a + 3b + \sqrt{6}a + 6\sqrt{6}b)\ (a + 3b - \sqrt{6}a + 6\sqrt{6}b)$$

$x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$

$x^2-12x+36\ +\ 36\cancel{6}y^2-\cancel{9y}\ =45+36+9$

$(y^2-y+\frac{1}{4})=(y-\frac{1}{2})^2$

$36\cdot\frac{1}{4}=9$

$$\begin{array}{r} 2 \\ 45 \\ +36 \\ +9 \\ \hline 90 \end{array}$$

$(x-6)^2+\ 36(y-\frac{1}{2})^2=90$

$(x-6)(2y-1)=\ 2xy-x\ -12y+6$

$x-12y=\sqrt{(x-6)\ (2y-1)}$

$\sin(\alpha+\alpha)=2\sin(\alpha)\cos(\alpha)$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(\alpha)\cdot\cos(\alpha)+$

$\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha)$

$\sin(2\alpha+4\beta)\ +\sin(2\alpha)$

$\sin(2\alpha)\cdot\cos(4\beta)\ +\sin(4\beta)\cdot\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)$

$$\begin{cases} x\geq 12y \\ x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6 \end{cases}$$

$(x-12y)^2=(x-6)\ (2y-1)$

$a=x-6$

$b=2y-1$

$\cancel{a-6b}$

$a-6b\ =a\cdot b$

$a^2+\ 36\left(\frac{b}{2}\right)^2=90$

$a=\frac{6b}{1-b}$

$$\begin{cases} a-6b=ab \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$\left(\frac{6b}{1-b}\right)^2+9b^2=90$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

+

$$189 + 17 = 196$$

$b^2 \le 2$

$\frac{90}{36}$

$9 \cdot 2 \cdot 5$

$9 \cdot 4$

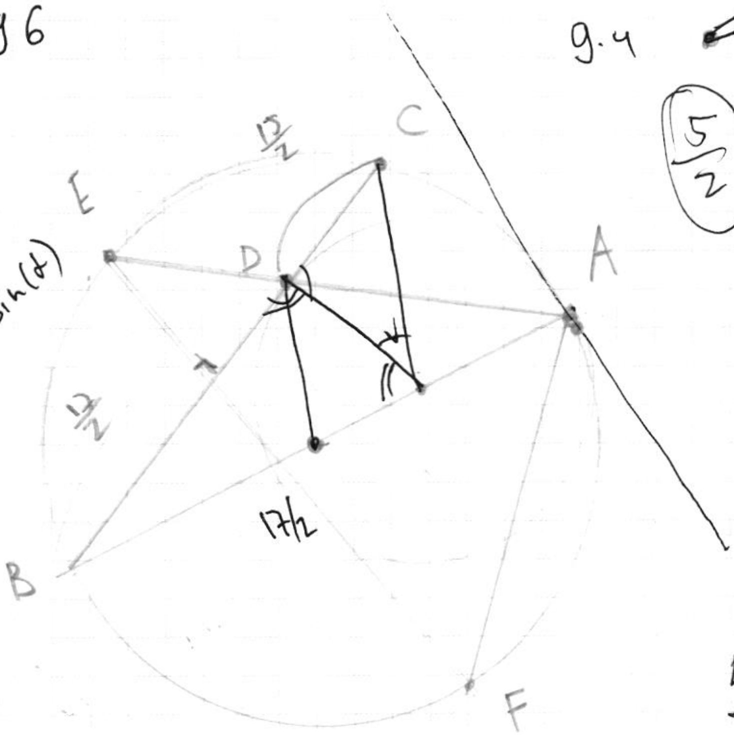
$\frac{5}{2}$

AD

$\sin(\alpha) =$

$\frac{EA}{2R} = \sin(\alpha)$

$EA \cdot AD =$



$f\left(\frac{1}{2}\cdot 2\right) = f(2) + f'$

$f(1) = 0$

$f(3 \cdot 1) = f(3) + f(1)$

$f(1) = 0$

$\frac{4(4x-5)+4}{4x-5}$

$4 + \frac{4}{4x-5}$

$f(2\cdot 3) = f(2) + f(3) =$

0

$$\begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

$55b^2$ $\quad b^2 \le 2$

$a^2 \le$

$f(7) = 1 = f\left(\frac{7}{2}\cdot 2\right) =$

$f\left(\frac{7}{2}\right) + f(2) = 0$

$f\left(\frac{7}{2}\right) = 1$

$f\left(\frac{2}{3}\right) >$

$r^2 = r^2 + AD^2 - 2ADr\sin(\alpha)$

$2r\sin(\alpha)$

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23.

$32x^2$

$32x^2 - 36x + 3$

$f(5\cdot 5) = f(5) + f(5) = 2$

$f\left(\frac{7}{11}\cdot 11\right) = 1$

$f\left(\frac{7}{11}\right) + f(11)$

2

$f\left(\frac{7}{11}\right) = 0$

$f(a) + f\left(\frac{1}{8}\right)$

$16^5 \cdot x^2 - 2 \cdot 18$

$f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right) = f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$ $\quad f(x) < f(y)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)