# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина $P$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $PQ$. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра $RS$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{1}$

$$\begin{cases} \text{①}\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \text{②}\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

② : $2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

① → $\cos 2\beta = \frac{-8}{17\cdot 2\sin(2\alpha+2\beta)} = \frac{\cancel{-8}^{4}\cdot\sqrt{17}}{\cancel{17}_{\sqrt{17}}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{(-1)}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

Рассмотрим 2 случая

I. $\sin 2\beta = -\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \sin(2\alpha+2\beta) \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\beta+2\alpha = 2\beta+2\pi k \\ 2\beta+2\alpha = \pi-2\beta+2\pi n \end{array}\right.;\ n,k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha=\pi k \\ 4\beta+2\alpha=\pi+2\pi n \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ \sin(2\alpha+4\beta)=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha=0 \\ \text{②}\ \sin 2\alpha = \left(-\frac{8}{17}\right) \end{array}\right.$

~~Пусть~~ ~~...~~ Восп. ① выбрав знач $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\cos 2\beta$ для 2-го случая I

$-\frac{8}{17}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\alpha + \frac{32}{17} = 1 \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{-15}{17} \Rightarrow$

по def $tg x$: $tg 2\alpha = \frac{8}{15}$

по формуле $tg 2\alpha$: $tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \Rightarrow \frac{8}{15} = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} \Rightarrow$

$\Rightarrow 4 - 4tg^2\alpha = 15 tg\alpha \Rightarrow 4tg^2\alpha + 15tg\alpha - 4 = 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

I. $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -4 \\ tg\alpha = \frac{1}{4} \end{array}\right.$

Рассм II

$$\sin 2\beta = +\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 2\beta = -\sin(2\alpha + 2\beta) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha + 2\beta = -2\beta + 2\pi k \\ 2\alpha + 2\beta = \pi + 2\beta + 2\pi k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha + 4\beta = 2\pi k \\ 2\alpha = \pi + 2\pi k \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin(2\alpha + 4\beta) = 0 \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \\ \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 1 \\ tg\alpha = -1 \end{array}\right. \end{array}\right. \cancel{\Rightarrow}$$

Рассм. ① случай

$\sin 2\alpha, \sin 2\beta, \cos 2\beta$ известны $\Rightarrow$

$$\Rightarrow -\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{8}{17}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha \Rightarrow -\cos 2\alpha + \frac{32}{17} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow tg 2\alpha = -\frac{8}{15} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{8}{15} = \frac{2 tg\alpha}{1 - tg^2\alpha} \Rightarrow 4tg^2\alpha - 4 = 15 tg\alpha \Rightarrow 4tg^2\alpha - 15tg\alpha - 4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 4 \\ tg\alpha = -\frac{1}{4} \end{array}\right.$$

Ответ: $tg\alpha \in \left\{0; \pm 1; \pm\frac{1}{4}; \pm 4\right\}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

**№3**

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

т.к. $x^2+6x>0$ по сво-ву логарифма, то
$|x^2+6x| = x^2+6x$

Произведём замену $x^2+6x=t$ ; $t>0$

$$3^{\log_4 t}+t \geq t^{\log_4 5}$$

по осн логарифмич. тождеству

$$t = 3^{\log_3 t} \quad \Rightarrow 3^{\log_4 t}+3^{\log_3 t} \geq 3^{\log_3 t^{\log_4 5}}$$

$$\log_3 t^{\log_4 5} = \log_4 5 \cdot \log_3 t$$

Про~~логарифмируем~~ потанцируем обе части нер-ва по осн. 3 перейдя к нер-ву показателей (знак сохр. т.к $3>1$)

$$\log_4 t+\log_3 t \geq \log_4 5\cdot \log_3 t$$

Перейдём к осн. 4

$$\log_4 t+\frac{\log_4 t}{\log_4 3} \geq \frac{\log_4 5\cdot\log_4 t}{\log_4 3} \Rightarrow$$

Формула суммы логарифмов

$$\Rightarrow \log_4 t\left(1+\frac{1-\log_4 5}{\log_4 3}\right)\geq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \log_4 t\left(\frac{\log_4 3+\log_4 4-\log_4 5}{\log_4 3}\right) = \log_4 t\left(\frac{\log_4\left(\frac{12}{5}\right)}{\log_4 3}\right)\geq 0$$

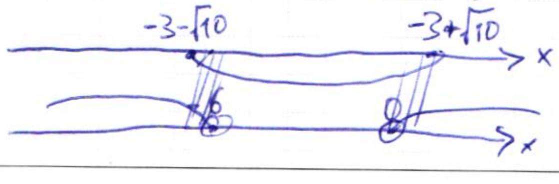
обратный переход к осн. 3

$$\log_4 t\cdot \log_3 2{,}4 \geq 0 \Rightarrow \log_4 t \leq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t\leq 1 \iff \begin{cases} x^2+6x-1\leq 0 \\ x(x+6)>0 \end{cases} \iff \begin{cases} (x+3-\sqrt{10})(x+3+\sqrt{10})\leq 0 \\ x(x+6)>0 \end{cases}$$

из ОДЗ $t>0$

по м. интервалов



Ответ: $x\in[-3-\sqrt{10};-6)\cup(0;-3+\sqrt{10}]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2-2(x-1)=\sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 3x(x-2)+y(3y-4)=4 \end{cases}$$

Произведём замену $x-1=a$, $3y-2=b$ $\Rightarrow$ $x=a+1$, $y=\frac{b+2}{3}$

$$\begin{cases} ① \; b-2a=\sqrt{ab} \\ ② \; 9a^2+b^2=25 \end{cases}$$

$①^{\wedge}2$: $b^2+4a^2-4ab=ab$

$b^2=5ab-4a^2$ ③

③ → ②: $9a^2+5ab-4a^2=25 \Rightarrow 5a(a+b)=25 \Rightarrow$

$\Rightarrow a(a+b)=5$ т.к. $a\neq0$, то $b=\frac{5}{a}-a$ ④

④ → ②: $\frac{25}{a^2}+a^2-10+9a^2=25 \Rightarrow$

$\Rightarrow 10a^4-35a^2+25=0$

Решаем биквадратное ур-е

$2\cdot a^4-7a^2+5=0$

$$\left[\begin{array}{l} a^2=1 \\ a^2=\frac{5}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ a=-1 \\ a=\frac{\sqrt{10}}{2} \\ a=-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right. \xrightarrow{④} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=4 \end{cases} \quad \checkmark \\ \begin{cases} a=-1 \\ b=-4 \end{cases} \quad \times \\ \begin{cases} a=\frac{\sqrt{10}}{2} \\ b=\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \quad \times \\ \begin{cases} a=-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ b=-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \quad \checkmark \end{array}\right.$$

Результат проверки

Далее подставим каждую пару чисел в ① и проверим подходит ли она

Ответ: $(1;4)$; $\left(\frac{-\sqrt{10}}{2}; \frac{-\sqrt{10}}{2}\right)$

5) $f(ab) = f(a) + f(b) \qquad a, b \in \mathbb{R}_+$

Пусть $a = \frac{x}{y}$, $b = y$ $\Rightarrow f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$x, y \in \mathbb{N}$

Также по усл. $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

т.к. каждое натуральное число $x$ ; представимо в таком виде

$$x = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots p_k^{\alpha_k} \qquad p_i \in P, \ \alpha_i \in \mathbb{N}_0$$

$$f(x) = f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \ldots) =$$
$$= f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2}) + \ldots f(p_k^{\alpha_k}) =$$
$$= \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2) + \ldots \alpha_k f(p_k) =$$

Составим таблицу

$$= \alpha_1 \left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2 \left[\frac{p_2}{4}\right] + \alpha_3 \left[\frac{p_3}{4}\right] + \ldots$$

| простые числа меньше 27 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | целая часть от деления остатка в строке на 4 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 | | •• | | • | | ••• | | • | | •• | | • | | •••• | | • | | •• | | • | | ••• | | • | | 0 |
| 3 | • | | | • | | | •• | | | • | | | • | | | •• | | | • | | | • | | | ••• | 0 |
| 5 | | | • | | | | | • | | | | | • | | | | | • | | | | | •• | | | 1 |
| 7 | | | | | • | | | | | | | • | | | | | | | • | | | | | | | 1 |
| 11 | | | | | | | | | • | | | | | | | | | | | • | | | | | | 2 |
| 13 | | | | | | | | | | | • | | | | | | | | | | | | | • | | 3 |
| 17 | | | | | | | | | | | | | | | • | | | | | | | | | | | 4 |
| 19 | | | | | | | | | | | | | | | | | • | | | | | | | | | 4 |
| 23 | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | • | | | | | 5 |
| $f(x)$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 2 | 0 | 3 | 1 | 1 | 0 | 4 | 0 | 4 | 1 | 1 | 2 | 5 | 0 | 2 | 3 | 0 | |

Итак представив числа от 3 до 27 произв. простых чисел мы нашли $f(x)$ ; $f(y)$ осталось посчитать кол-во вариантов выбрать $x, y \rightarrow f(x) - f(y) < 0$

5 прод

$f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(x) < f(y)$

| $f(x)$ | кол-во x |
|---|---|
| 0 | 10 |
| 1 | 7 |
| 2 | 3 |
| 3 | 2 |
| 4 | 2 |
| 5 | 1 |

$n = 10 \cdot (7+3+2+2+1) + 7(3+2+2+1) + 3(2+2+1) + 2(2+1) + 2 \cdot 1$

кол-во способов выбрать x (из данной строки)

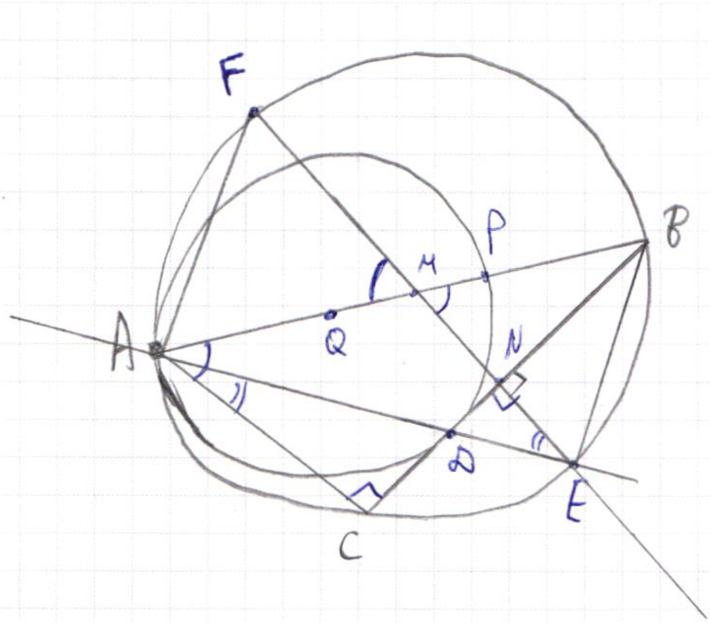
кол-во способов y удовл. усл (из строк ниже)

$n = 10 \cdot 15 + 7 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 = 231$

Ответ: 231

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4




$CD = \frac{5}{2}$ ; $P = AB \cap \omega$

$BD = \frac{13}{2}$ ;

$r, R$ - ?

$\angle AFE$ - ?

$S_{AEF}$ - ?

① $\angle ACB$ - прямой т.к. $AB$ - диаметр

Пусть $FE \cap AB = M \Rightarrow EM \parallel AC \Rightarrow$

$BC \cap FE = N$

$\Rightarrow \angle BME = \angle BAC$ (как соответственные углы при секущей $AM$)

$\angle BME = \angle AMF$ (по св-тву вертикальных углов)

$\triangle ACD \sim \triangle END \Rightarrow \frac{ED}{AD} = \frac{EN}{AC}$ ; $\angle$

по св-тву как-леж. углов: $\angle NED = \angle DAC$

$\angle DCA = \angle DNE = 90^\circ$

по св-тву в нутри впис. окр: $Q$ - центр внутри впис. окр-ти

$Q \in AB$

по св-тву угла между хордой и касательной в $\omega$: $\angle ADC = \frac{1}{2} \breve{AD} = \frac{1}{2} \angle AQD$

4. Продолж 2

в $\Delta ABC$ $\quad \beta = \arccos\left(\frac{BC}{AB}\right) = \arccos\left(\frac{BC}{2R}\right) \Rightarrow$

$$\cos\beta = \frac{\overset{2}{\cancel{18}}\cdot\overset{6}{\cancel{24}}}{2\cdot\cancel{7}\cdot\underset{13}{\cancel{117}}} = \frac{12}{13} \Rightarrow \beta = \arccos\frac{12}{13}$$

Обозначим остальные углы выразением из $\beta$

$$\angle AFE = 45 + \frac{\beta}{2} = \boxed{45 + \frac{1}{2}\arccos\frac{12}{13}} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arccos\frac{12}{13}$$

$\cancel{\angle AEF}$ $\quad tg\beta = \frac{5}{12}$ ; $\sin\beta = \frac{5}{13}$

Пусть $ND = x \Rightarrow BN = 6,5 - x$

в $\Delta BNM$ $\quad MN = BN \cdot tg\beta = \frac{5\cdot 13}{12\cdot 2} - \frac{5x}{12} = \frac{65}{24} - \frac{5x}{12}$

$BM = \frac{BN}{\cos\beta} = \frac{(6,5-x)\cdot 13}{12} = \frac{169}{24} - \frac{13}{12}x$

$AM = 2R - BM =$

из подобия $\Delta ACD, \Delta END$ $\quad \frac{ND}{CD} = \frac{ED}{AD}$

$\Delta APE$, $\Delta AQD$ - равнобедренные

Ответ: $\quad R = \frac{117}{24}$ ; $r = \frac{65}{24}$

$\angle AFE = 45° + \frac{1}{2}\arccos\frac{12}{13}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

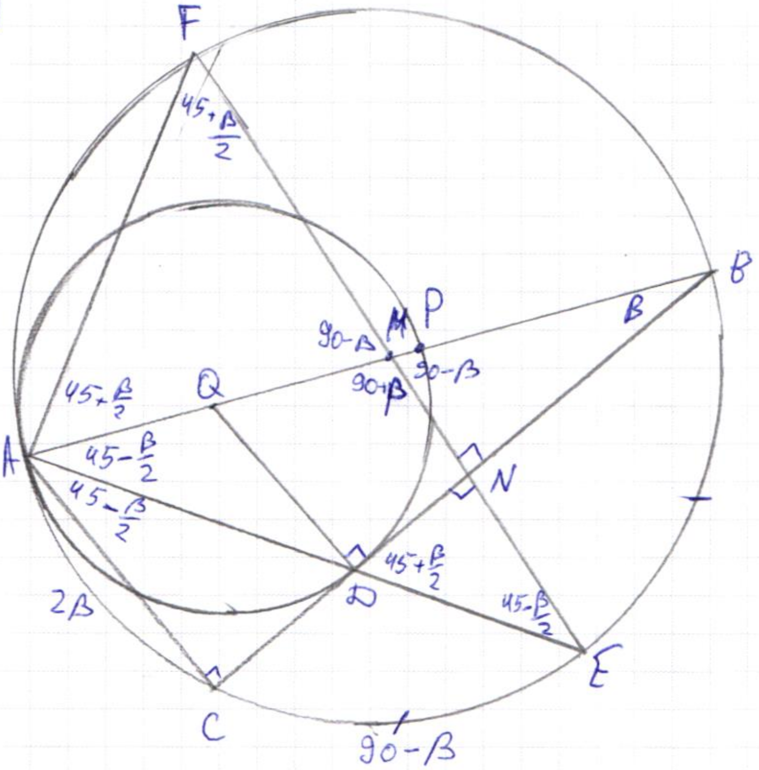
ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. продолж 1

введём $\angle\beta = \angle ABC$




$\triangle AME$ – равнобедренный

Пусть $ND = x \Rightarrow BN = \frac{13}{2} - x$

из подобия $\triangle BQD$ и $\triangle BAC$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{BQ}{BA} \Rightarrow \frac{13\cdot 2}{2\cdot 18} = \frac{2R-r}{2R} \Rightarrow 26R = 36R - 18r$$

$$18r = 10R \Rightarrow R = 1{,}8r$$

по св-ву хорд и секущих

$$BD^2 = BP\cdot BA$$

$$\frac{169}{4} = 2(R-r)\cdot 2R$$

$$169 = 16(R^2 - R\cdot r)$$

$$169 = 16\left(\frac{9\cdot 9}{25}r^2 - \frac{9}{5}r^2\right) = \frac{16r^2\cdot 9}{5}\left(\frac{9}{5}-1\right) = \frac{16\cdot 9\cdot 4}{25}r^2$$

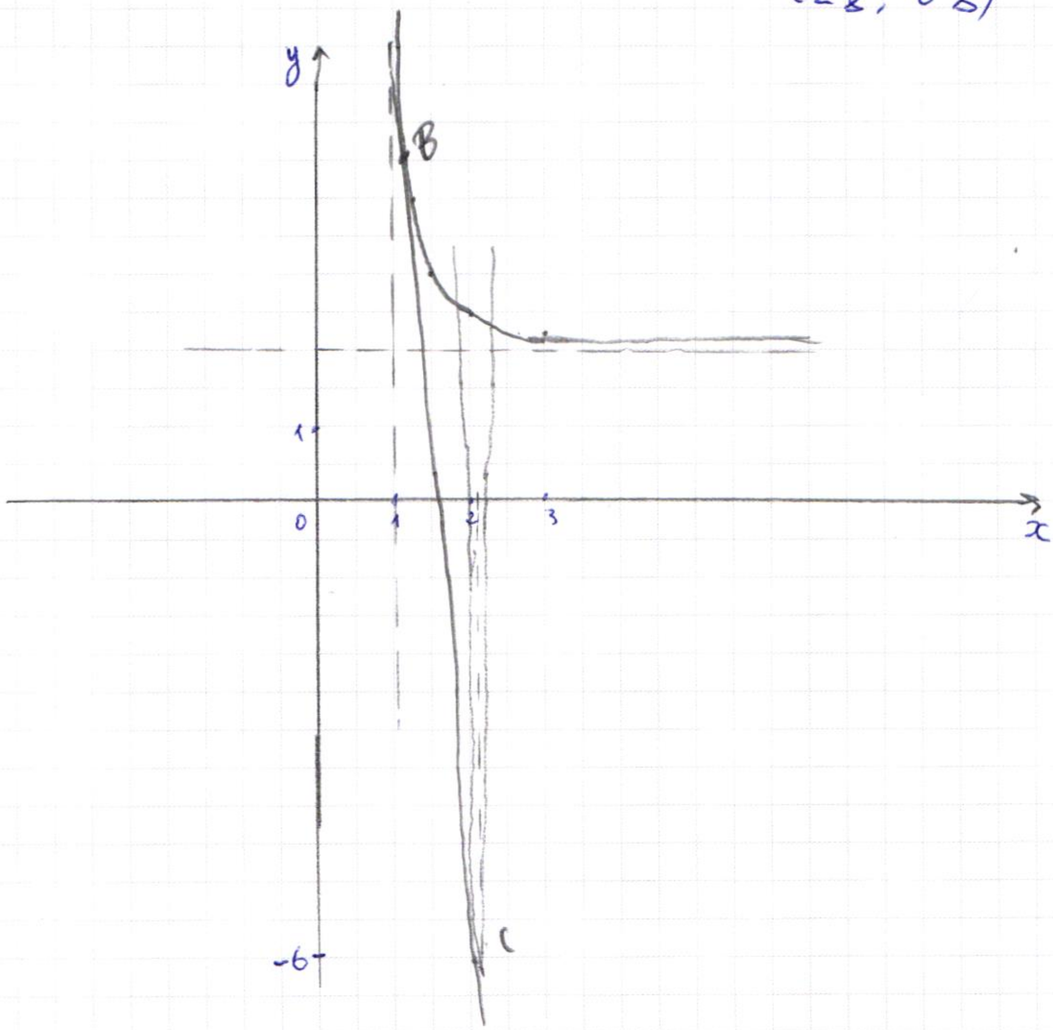
$$r = \frac{5\cdot 13}{2\cdot 3\cdot 4} = \frac{65}{24}\ ;\ R = \frac{117}{24}$$

6]

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

$f(x)=\frac{4x-3}{2x-2}$ – гипербола с асимптотами $x=1$ и сжатием на 2 $y=2$

$g(x)=8x^2-34x+30$ – парабола с вершиной в $A(2\frac{1}{8}; -6\frac{1}{8})$




$ax+b$ – прямая лежащая ниже гиперболы и выше параболы. Это прямая, касающаяся гиперболы и параболы одновременно в точках B и C

~~Ответ:~~

$f'(x)=\left(2+\frac{1}{2(x-1)}\right)'=\frac{1}{2}\ln|x-1|$

$g'(x)=16x-34$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

12/35

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) $f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$y = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot p_3^{\alpha_3} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$

$f(y) = \alpha_1 f(p_1) + \alpha_2 f(p_2)$

$f(y) = \alpha_1 \left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2 \left[\frac{p_2}{4}\right]$

$f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = f\left(\frac{1}{p}\right)$

$f(x \cdot (y)^{-1}) = f(x) - f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) \cdot y = f(x)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{f(x)}{y}$

$f\left(\frac{x}{y}\right.$

$\underbrace{f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{x}{y}\right) + \ldots + f\left(\frac{x}{y}\right)}_{y \text{ раз}}$

$y \cdot \frac{x}{y} = f(x$

$f(b) = f(ab) - f(a)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) - f(y) = f(x) - f(y)$ – док-во

$f(x) = \alpha_1 \left[\frac{p_1}{4}\right] + \alpha_2 \left[\frac{p_1}{4}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

| | Итог | 0<br>2 | 0<br>3 | 1<br>5 | 1<br>7 | ~~12~~ | 2<br>11 | 3<br>13 | 4<br>17 | 4<br>19 | 5<br>23 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ~~2~~ 3 | 0 ~~3~~ 1 | | v | | | | | | | | |
| 4 | 0 ~~2~~ 3 | vv | | | | | | | | | |
| 5 | 1 ~~5~~ 1 | | | v | | | | | | | |
| 6 | 0 | v | v | | | | | | | | |
| 7 | 1 | | | | v | | | | | | |
| 8 | 0 | vvv | | | | | | | | | |
| 9 | 0 | | vv | | | | | | | | |
| 10 | 1 | v | | v | | | | | | | |
| 11 | 2 | | | | | | v | | | | |
| 12 | 0 | vv | v | | | | | | | | |
| 13 | 3 | | | | | | | v | | | |
| 14 | 1 | v | | | v | | | | | | |
| 15 | 1 | | v | v | | | | | | | |
| 16 | 0 | vvvv | | | | | | | | | |
| 17 | 4 | | | | | | | | v | | |
| 18 | 0 | v | vv | | | | | | | | |
| 19 | 4 | | | | | | | | | v | |
| 20 | 1 | vv | | v | | | | | | | |
| 21 | 1 | | v | v | | | | | | | |
| 22 | 2 | v | | | | | v | | | | |
| 23 | 5 | | | | | | | | | | v |
| 24 | 0 | vvv | v | | | | | | | | |
| 25 | 2 | | | vv | | | | | | | |
| 26 | 3 | v | | | | | | v | | | |
| 27 | 0 | | vvv | | | | | | | | |

25 чисел из них

0 − 10
1 − 7
2 − 3
3 − 2
4 − 2
5 − 1

$f(x) - f(y) < 0$

← кол-во вар.

~~10 ...~~

0 − . . . .

$10 \cdot 15 + 7 \cdot 8 + 3 \cdot 5 +$
$+ 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 =$

$= 150 + 56 + 15 + 8 + 2 = 231$

$\frac{D}{4} = 9 + 1 = 10$

$x = \frac{-3 \pm \sqrt{10}}{1}$

$-3 - \sqrt{10} \approx -6 \ldots$

$-3 + \sqrt{10} \approx 0 \ldots$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 ✓

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3y(x-1)-2(x-1)} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Rightarrow 3y-2x=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$$

$3x(x-2)+y(3y-4)=4$

$y(3y-2-2)$

$x-1 = a$

$3y-2 = b$

$x=a+1$

$y=\frac{b+2}{3}$

$$\begin{cases} b+2-2(a+1) = \sqrt{ab} \\ 3(a+1)(a-1)+\frac{1}{3}(b+2)(b-2)=4 \end{cases} \Rightarrow b-2a=\sqrt{ab}$$

$3(a+1)(a-1)+\frac{1}{3}(b+2)(b-2)$

$3a^2-3+\frac{b^2}{3}-\frac{4}{3}=4$

$3a^2+\frac{b^2}{3}=12+4+9=$

$=\frac{25}{3}$

$9a^2+b^2=25$

$b-2a=\sqrt{ab}$

$b^2+4a^2-4ab=ab$

$b^2=5ab-4a^2$

~~$b=\pm 2$~~

~~$a=\pm 1$~~

① $a=1$

$b=4$

~~② $a=-1$~~

~~$b=-4$~~

$5ab-4a^2+9a^2=25$

$5a(a+b)=25 \Rightarrow a(a+b)=5$

$b=\frac{5}{a}-a$

$25-9a^2=a^2+\frac{25}{a^2}-10$

$10a^2+\frac{25}{a^2}-35=0$

$a^2=t$

$10t^2-35t+25=0$

$2t^2-7t+5=0$

$$\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{5}{2} \end{array}\right.$$

$a=\pm 1$

$a=\pm\sqrt{2,5}$

$a=\sqrt{2,5}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

$b=\frac{5\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{5}}-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\sqrt{10}-\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№3

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

$x^2+6x=t$

$(x+6)x>0 \Rightarrow$

ОДЗ: $t\in(-6;0)$

$-6 \quad 0$

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$

$a^{\log_a b}=b$

$\cancel{\log_4 3^{\log_4 t}}=$

$t=3^{\log_3 t^{\log_4 5}}=$

$t=3^{\log_3 t}$

$t^{\log_4 5}=3^{\log_4 5\cdot\log_3 t}$

$3^{\log_4 t}+3^{\log_3 t}\geq 3^{\log_4 5\log_3 t}$

$\log_4 t+\log_3 t\geq\log_4 5\log_3 t$

$\left[\begin{array}{l}x^2+6x>0\\x^2+6x-1\leq 0\end{array}\right.$

$\frac{D}{4}=9+4=13$

$x\in\ldots\ldots$

$\log_4 t\geq(\log_4 5-\log_4 4)\log_3 t$

$\log_4 t>\log_3 t\cdot\log_4\left(\frac{5}{4}\right)$

$3-1\frac{1}{4}=2\frac{3}{4}$

$\log_3 t=\frac{\log_4 t}{\log_4 3}$

$\log_4 t\geq\log_4 t\,\frac{\log_4\frac{5}{4}}{\log_4 3}\ \Big|\times\log_4 3<0$

$t>0$

$t\leq 1$

$\cancel{\log_4 t}$

$x^2+6x-1\leq 0$

$\log_4 t\,\frac{(\log_4 3-\log_4\frac{5}{4})}{\log_4 3}\geq 0$

$\log_4 t\,\frac{\log_4\frac{11}{4}}{\log_4 3}\geq 0\Rightarrow\log_4 t\log_3\frac{11}{4}\geq 0$

$\log_4 t\leq 0\Rightarrow$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

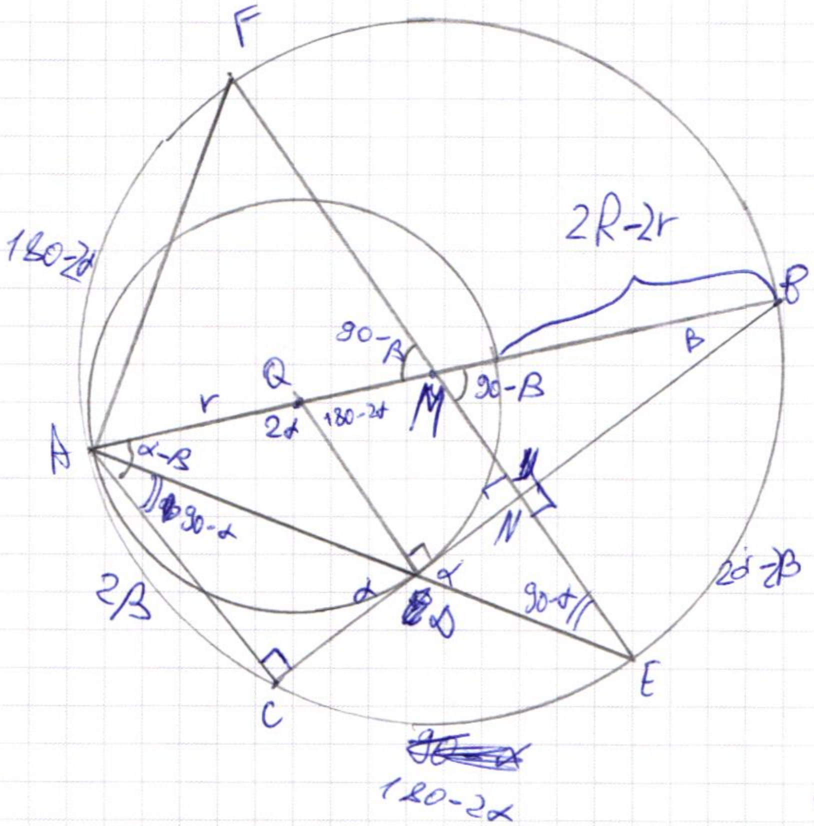
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




$\angle BAC = 90 - \beta$

$\angle DAC = 90 - \beta - 90 + \alpha =$

$= \alpha - \beta$

$BC = 9$

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$\frac{2(R-r)}{2R} = \frac{BN}{BC}$

$90 - \alpha$

1 8·

$\angle QMN = 2\alpha$

$\frac{180 - 2\alpha + 2\beta}{2} =$

$90 - 45 - \frac{\beta}{2}$

$2\alpha + 90 - \beta = 180°$

$2\alpha - \beta = 90$

$45 + \frac{\beta}{2} =$

$2\alpha - \beta = 90$

$\frac{\cancel{65}^{13} \cdot 9}{24 \cdot \cancel{5}} = \frac{117}{24}$

$90 + 27 = 117$

$2\alpha = 90 + \beta$

$\alpha = 45 + \frac{\beta}{2}$

$\alpha - \beta = 45 - \frac{\beta}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

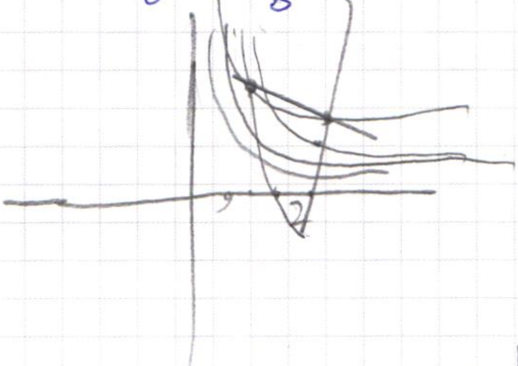
для любых $x \in (1;3]$

$f(x)=\frac{4x-3}{2x-2}=\frac{2(2x-2)+1}{2(x-1)}=$

$=2+\frac{1}{2x-2} \leftarrow \frac{1}{2x-2} \leftarrow \frac{1}{x-2} \leftarrow \frac{1}{x}$

$x_м=\frac{34}{16}=\frac{17}{8}=2\frac{1}{8}$

$g(x)=8x^2-34x+30$



$\frac{D}{4}=289-36\cdot 8=1$

$x=\frac{17\pm1}{8}$ $\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=\frac{9}{4}=\frac{18}{8} \end{array}\right.$

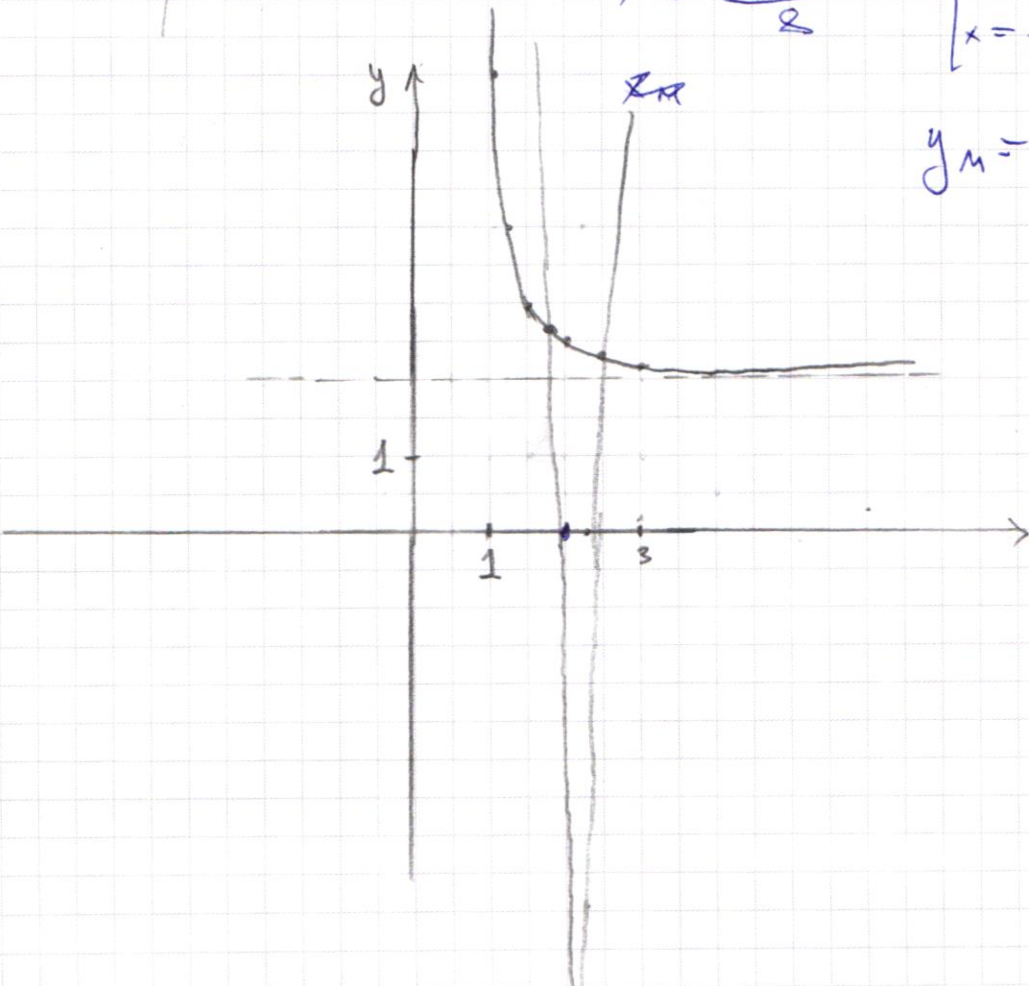
$y_м=8\cdot\frac{17\cdot17}{8\cdot8}-\frac{34\cdot17}{8}+30=$

$=-\frac{17^2}{8}+30=$

$=\frac{240-289}{8}=$

$=-\frac{49}{8}=$

$=-6\frac{1}{8}$




☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{4x-3}{2x-2}=8x^2-34x+30$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 68 \\ \underline{16} \\ 84 \end{array}$$

$$4x-3=16x^3-68x^2+60x-16x^2+68x-60$$

$$16x^3-84x^2+124x-57=0$$

$$\begin{array}{r} -124 \\ \underline{68} \\ 56 \end{array}$$

| | 16 | -84 | 124 | -57 |
|---|---|---|---|---|
| x=1 | 1 | -68 | 56 | -1 |

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)