МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. **[3 балла]** Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. **[4 балла]** Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. **[5 баллов]** Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. **[5 баллов]** Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. **[5 баллов]** Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. **[5 баллов]** Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. **[6 баллов]** Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{x(y-6)-(y-6)} \\ 9x^2-18x+9+y^2-12y+36=45+36+9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \begin{cases} (y-6x)^2=(x-1)(y-6) \ (1) \\ y-6x\geqslant 0 \end{cases} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

1) $(y-6x)^2=(x-1)(y-6)$

$y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$y^2-(13x-1)y+36x^2+6x-6$

Решим относ. y:

$D=(13x-1)^2-4(36x^2+6x-6)=169x^2-26x+1-144x^2-$

$-24x+24=25x^2-50x+25=25(x-1)^2$

$$\left[\begin{aligned} y&=\frac{13x-1+5(x-1)}{2} \\ y&=\frac{13x-1-5(x-1)}{2} \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} y&=9x-3 \\ y&=4x+2 \end{aligned}\right.$$

К системе:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 9x-3 \\ y = 4x+2 \end{array}\right. \\ y-6x \geqslant 0 \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-6x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 9x-3 \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases} \quad (2) \\ \begin{cases} y = 4x+2 \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases} \quad (3) \end{array}\right. \end{cases}$$

$$2)\ \begin{cases} y = 9x-3 \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9x-3 \\ 9(x-1)^2+\cancel{9(x-1)}(9x-9)^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 9x-3 \\ 90(x-1)^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9x-3 \\ (x-1)^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9x-3 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=-3 \end{cases} \\ \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$3)\ \begin{cases} y = 4x+2 \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x+2 \\ 9(x-1)^2+16(x-1)^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y = 4x+2 \\ \cancel{9}(x-1)^2=\frac{18}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4x+2 \\ \left[\begin{array}{l} x=-\sqrt{\frac{18}{5}}+1 \\ x=+\sqrt{\frac{18}{5}}+1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1 \\ y=-12\sqrt{\frac{2}{5}}+4+2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=+3\sqrt{\frac{2}{5}}+1 \\ y=+12\sqrt{\frac{2}{5}}+4+2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Значит есть условие $y-6x \geqslant 0$ и решения
$(0;-3)$; $(2;15)$; $\left(-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1;\ -12\sqrt{\frac{2}{5}}+6\right)$; $\left(+3\sqrt{\frac{2}{5}}+1;\ +12\sqrt{\frac{2}{5}}+6\right)$
переходя к системе

Подставим в условие

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(0;3):\quad -3 - 6\cdot 0 = -3 \neq 0$ не подходит

$(2;15)\quad 15 - 6\cdot 2 = 3 \geq 0$ подходит

$\left(-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1;\ -12\sqrt{\frac{2}{5}}+6\right):\quad -12\sqrt{\frac{2}{5}}\cancel{+6}+18\sqrt{\frac{2}{5}}\cancel{-6}=+6\sqrt{\frac{2}{5}} \geq 0$

~~$=6\sqrt{\frac{2}{5}}-30=6(\underbrace{\sqrt{0,4}-\sqrt{25}}_{<0})\neq 0$~~

подходит

$\left(+3\sqrt{\frac{2}{5}}+1;\ +12\sqrt{\frac{2}{5}}+6\right):\quad 12\sqrt{\frac{2}{5}}\cancel{+6}-18\sqrt{\frac{2}{5}}\cancel{-6}=-6\sqrt{\frac{2}{5}}\neq 0$

не подходит

Значит решения системы: $(2;15)$ и $\left(-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1;\ -12\sqrt{\frac{2}{5}}+6\right)$

Ответ: $(2;15)$; $\left(-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1;\ -12\sqrt{\frac{2}{5}}+6\right)$

№ 3 $\quad |x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

Замена $t = 26x - x^2$

$$|-t|^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$$

Ограничение на t: $t>0$ (т.к под логарифмом), тогда

$$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$$

$$t^{\log_5 12}=\left(12^{\log_{12} t}\right)^{\log_5 12}=12^{\log_5 t};\ t=5^{\log_5 t}$$

$12^{\log_5 t} + 5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$

Замена $y = \log_5 t$

$$12^y + 5^y \geq 13^y$$

пусть $f(y) = 12^y + 5^y$; $g(y) = 13^y$ — экспоненты

1) $f''(y) = \frac{12^y}{\underbrace{\ln^2 12}_{>0}} + \frac{5^y}{\underbrace{\ln^2 5}_{>0}} > 0 \Rightarrow f(y)$ — строго выпукла вниз

2) $f'(y) = \frac{12^y}{\ln 12} + \frac{5^y}{\ln 5} > 0 \Rightarrow f(y)$ — возр. строго;

3) $g''(y) = \frac{13^y}{\ln^2 13} > 0 \Rightarrow g(y)$ — строго выпукла вниз

4) $g'(y) = \frac{13^y}{\ln 13} > 0 \Rightarrow g(y)$ — возр. строго;

Значит если гр-ки $f(y)$ и $g(y)$ пересекаются

$f(y_0) = g(y_0)$, где y_0 — т. пересечения

то при $y > y_0$, $f(y) - g(y)$ не меняет знак

и при $y < y_0$, $f(y) - g(y)$ не меняет знак

$y_0 = 2$ $\quad 12^2 + 5^2 = 13^2$

$y > 2$ $\quad y = 3$ $\quad 12^3 + 5^3 < 13^3$

$y > 2$ — не подходят

$y < 2$ $\quad y = 1$ $\quad 12 + 5 > 13$ $\quad y < 2$ — подходит

Значит $y \leq 2$

Обр. зам.: $\log_5 t \leq 2 = \log_2 25$

$z = \log_5 w$ — возр. ф-я $\Rightarrow$ $t \leq 25$

~~Обр. зам. $26x - x^2 \leq 25$~~

~~$x^2 - 26x + 25 \geq 0$~~

~~$(x-1)(x-25) \geq 0$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

с учетом $t>0$

$$\begin{cases} t>0 \\ t\le 25 \end{cases}$$

Обр. замена

$$\begin{cases} 26x-\overset{x}{\cancel{t}}^2>0 \\ 26x-\overset{x}{\cancel{t}}^2\le 25 \end{cases} \qquad \begin{cases} \cancel{t}\; x(x-26)<0 \\ (x-1)(x-25)\ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\in(0;26) \\ x\in[-\infty;\ 1]\cup[25;+\infty) \end{cases} \qquad x\in(0;\ 1]\cup[\ 25;26)$$

Ответ: $(0;1]\cup[25;26)$

№ 5 ~~a, b - рац~~
x,y - натур. числа, тогда

$$f(x)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$$

$f(1)=f(1)+f(1)\Rightarrow f(1)=0$

$f(2)=[2/4]=0$

$f(3)=[3/4]=0$

$f(4)=F(2)+F(2)=0$

$f(5)=[5/4]=1$

$f(6)=f(3)+f(2)=0$

$f(7)=[7/4]=1$

$f(8)=f(2)\cdot 3=0$

$f(9)=f(3)\cdot 2=0$

$f(10)=f(5)+f(2)=1$

$f(11)=[11/4]=2$

$f(12)=f(2)+f(2)+f(3)=0$

$f(13)=[13/4]=3$

$f(14)=f(7)+f(2)=1$

$f(15)=f(3)+f(5)=1$

$f(16)=4F(2)=0$

$f(17)=[17/4]=4$

$f(18)=f(2)+2\cdot f(3)=0$

$f(19)=[19/4]=4$

$f(20)=f(5)+2f(2)=1$

$f(21) = f(3)+f(7) = 1$

$f(22) = f(11)+f(2) = 2$

$f(23) = [23/4] = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2 \cdot f(5) = 2$

$f(26) = f(13)+f(2) = 3$

$f(27) = 3f(3) = 0$

$f(28) = 2f(2)+f(7) = 1$

при t ~~при~~ от 4 до 28 вкл. ф-я $f(t)$:

$f(t) = 0$ при 9 значений t

$f(t) = 1$ при 8 значений t

$f(t) = 2$ при 3 зн. t

$f(t) = 3$ при 2 зн. t

$f(t) = 4$ при 2 зн. t

$f(t) = 5$ при 1 зн. t ; другие знач $f(t)$ не приним. при этих t

чтобы $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, надо $f(x) - f(y) < 0$

$f(y) > f(x)$

Случаи

$f(y)$	$f(x)$	способов взять такие x и y	
5	4	1 · 2	24
5	3	1 · 2	
5	2	1 · 3	
5	1	1 · 8	
5	0	1 · 9	
4	3	2 · 2	2 · 22 = 44
4	2	2 · 3	
4	1	2 · 8	
4	0	2 · 9	
3	2	2 · 3	2 · 20 = 40
3	1	2 · 8	
3	0	2 · 9	
2	1	3 · 8	3 · 17 = 51
2	0	3 · 9	
1	0	4 · 9	36

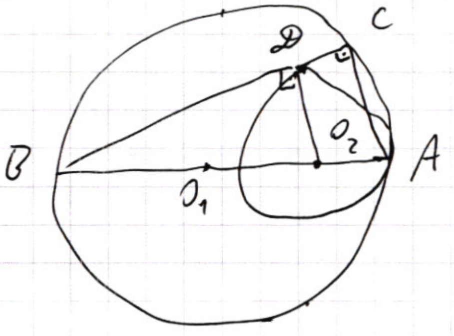
⇒

Всего 24+44+40+51+36 = 100+95 = 195

Ответ: 195

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



1) O_2 - ц. внутр. окр.-сти с радиусом r

O_1 - ц. внеш окр.-сти с рад. R

2) BD - кас $\Rightarrow BD \perp DO_2$

$\angle CBA$ - впис. опир. на диаметр $\Rightarrow \angle CBA = 90°$

3) $BO_2 = 2R - r$

$DO_2 = r$

по т. Пифагора в $\triangle BDO_2$

$BO_2^2 = BD^2 + DO_2^2$

$(2R-r)^2 = 13^2 + r^2$

4) $\triangle BDO_2$ и $\triangle BCA$

$$\left.\begin{array}{l}\angle B - \text{общ.} \\ \angle BDO_2 = \angle BCA = 90°\end{array}\right\} \triangle BDO_2 \sim \triangle BCA \text{ (по 2 угл)} \Rightarrow$$

$\frac{BD}{BC} = \frac{O_2B}{BA} \Rightarrow \frac{13}{25} = \frac{2R-r}{2R} \Rightarrow 26R = 50R - 25r \Rightarrow$

$25r = 24R \Rightarrow 2R = \frac{25}{12} r$

5) $(2R-r)^2 = 13^2 + r^2$

$\left(\frac{13}{12} r\right)^2 = 13^2 + r^2 \quad | \cdot 12^2$

$13^2 r^2 = 13^2 \cdot 12^2 + 12^2 r^2$

$(5r)^2 = (13 \cdot 12)^2$, т.к $r > 0$

$169 - 144 = 5^2$

$13 \cdot 12 = 144 + 12 = 156$

$r = \frac{156}{5} = 31{,}2$; $R = \frac{25}{24} r = \frac{\cancel{25}^{5} \cdot \cancel{12} \cdot 13}{\cancel{24}_{2} \cdot \cancel{5}_{1}} = \frac{65}{2} = 32{,}5$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Ответ а) $r = 31,2$

$R = 32,5$

№6 $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$

пусть $f(x) = \frac{8-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2}$ – гипербола с асимпт. $y = -2$ и $x = \frac{2}{3}$

$g(x) = 18x^2 - 51x + 28$ – парабола

$x_в = \frac{51}{36} = \frac{17}{12} \in (\frac{2}{3}; 2]$

т.к. $\frac{17}{12} - \frac{2}{3} = \frac{17-8}{12} > 0$

$g(\frac{2}{3}) = 8 - 34 + 28 = 0$; $f(1) = \frac{2}{1} = 2$

$g(2) = 72 - 102 + 28 = 2$; $f(2) = -1$

~~$f(x) = \frac{8-6x}{3x-2} = 0$~~

~~$x = \frac{4}{3}$~~

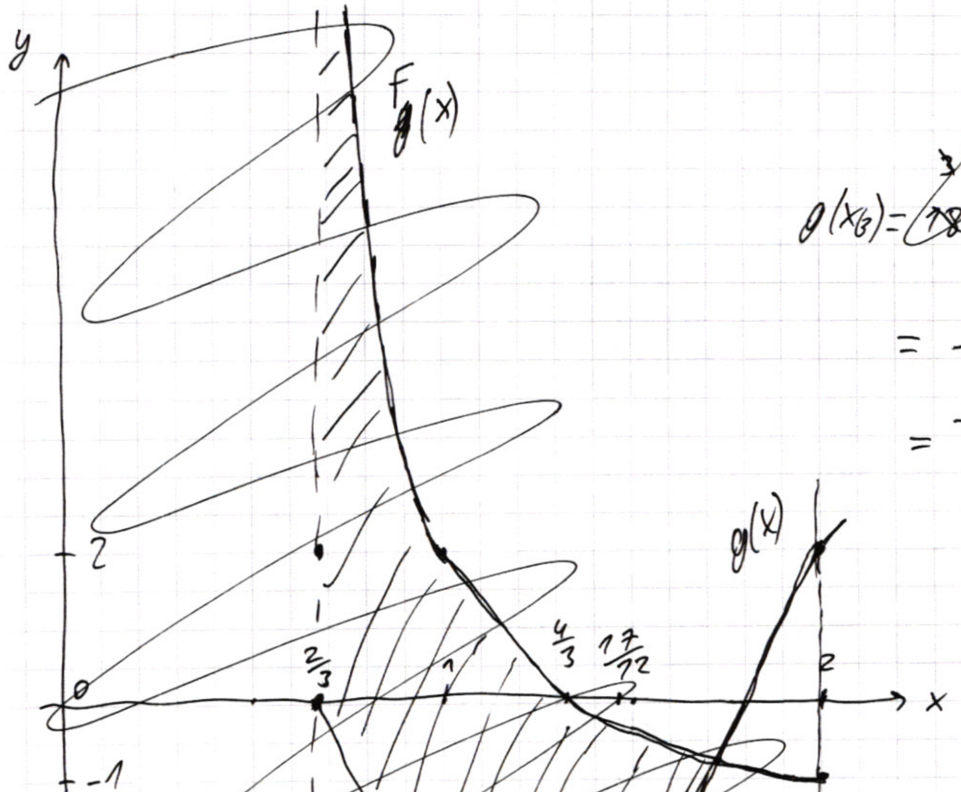
~~$x = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$~~

~~$g(x_в) = 18 \cdot \frac{17^2}{12 \cdot 12} - \frac{3 \cdot 17^2}{12} + 28 =$~~

~~$= -\frac{17^2}{8} + 28 =$~~

~~$= \frac{-289 + 224}{8} = -\frac{65}{8} =$~~

~~$= -8 - \frac{5}{8}$~~



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

при $x = 2 \quad \in (\frac{2}{3}; 2]$

$-\frac{4}{4} \geqslant 2a + b \geqslant 2$ $\quad -1 \not\geqslant 2 \Rightarrow$

$-1 \geqslant 2a+b \geqslant 2 \quad \begin{cases} a \in \varnothing \\ b \in \varnothing \end{cases}$

значит нет прямых $ax+b$ ~~удолетв~~ удолетв. нер-ву

при $x=2 \quad \Rightarrow$

а значит что нет прямых $ax+b$

~~удото~~ удовлетворяющим $x \in (\frac{2}{3}; 2]$

Ответ: $\varnothing$

№ 1 $\quad \sin(2\alpha + 4\beta) \mp \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$$\frac{-2}{\sqrt{17}} \cos(2\beta) = -\frac{2}{17} \Rightarrow$$

$\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}} \qquad \sin 2\beta = \frac{\pm 4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\sin 2\alpha \ \frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{\pm 4}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$$

$$\sin(2\alpha \pm \frac{\pi}{4}) = -1$$

$$2\alpha \pm \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\alpha = \mp \frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

~~Ответ: tg ($\frac{\pi}{8}$ $\frac{\pi}{4}$~~ [illegible]

тогда

$$tg\left(-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}+\pi n\right) = tg\left(\frac{\pi}{8}\right)$$

$$tg\left(+\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}+\pi n\right) = tg\left(\frac{3\pi}{8}\right)$$

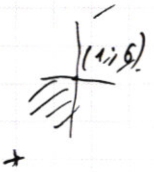
Ответ: $tg\left(\frac{\pi}{8}\right)$; $tg\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{x(y-6)-1(y-6)} \\ 9x^2-2\cdot3\cdot3x+9\ \ +y^2-2\cdot6y+36=90 \end{cases}$$

$$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$$

$$9(x^2-1)^2+(y-6)^2=90$$



$$9(x-1)^2+{}^{81}(\cancel{9}x-1)^2=90$$

$$(x-1)^2=1$$

$$\left[\begin{aligned} x&=2 \\ x&=0 \end{aligned}\right.$$

$$9(x-1)^2+16(x^2-1)^2=90$$

$$(x-1)^2=\frac{90}{25}=\frac{18}{5}=3{,}6$$

$$x=\pm\sqrt{3{,}6}+1$$

$$\frac{(x-1)^2}{10}+\frac{(y-6)^2}{90}=1$$

$$y^2-1\cancel{2}xy\underset{+y}{}+36x^2=xy-6x-y+6$$

$$y^2-13xy\cancel{+6x}+36x^2+6x-6=0$$

$$D=(13x-1)^2-144x^2-24x+24=$$

$$=169x^2-26x+1-144x^2-24x+24=$$

$$25x^2-50x+25=25(x^2-1)^2$$

$$y=\cancel{5(x\pm1)}\ \frac{13x-1\pm5(x-1)}{2}$$

$$y=\frac{13x-1\pm5x\mp5}{2}$$

$$\left[\begin{aligned} y&=9x-3 \\ y&=4x+2 \end{aligned}\right.$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$36x-x^2=t$

$13^y \geq 12^2+5^2 \geq 12^y+5^y$

$|-t|^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$

$12^y+5^y \geq 13^y \geq 12^2+5^2$

$y \geq 2$

$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$

$y>2$

$13^y>13^2$

$12^y>12^2$

$5^y>5^2$

~~$12^{\log_{12} t \cdot \log_5 12}$~~

$12^{\log_5 t}+5^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$

$12^y+5^y \geq 13^y$

$\frac{12^y}{\ln 12}$

$y=2$

$y=3$

$144 \cdot 12$ 125 $13 \cdot$ ~~$13 \cdot 13$~~

169

169
13
169
407
2197

170
13
100
100
21
2210
13
2197

144
12
288
144
1728

$\frac{12^y}{\ln 12}+\frac{5^y}{\ln 5} > 0$

$y>2$

13

$12^2<12^y$

$5^2<5^y$

$13^2<13^y$

$-13^2>$

$36x \quad -51$

$x=\frac{51}{36}=\frac{17}{12}$

$2 \cdot 4-17 \cdot 2+28$

$8 \quad -34+28$

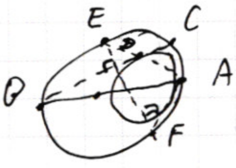
$72-102+28$

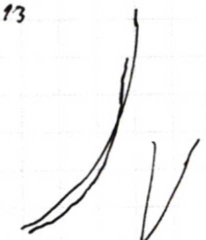
$-30+28=-2$

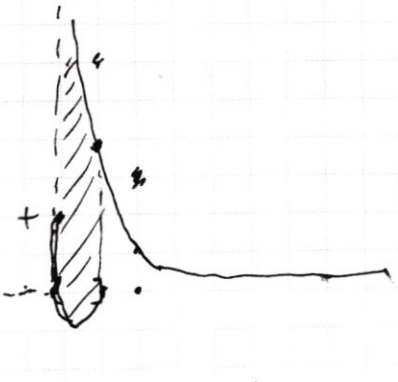
$$\frac{-2(3x-2)+4}{3x-2}=-2+\frac{4}{3x-2} \geq ax+b \geq 2$$

$CD=12$

$BD=13$



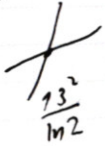




$\frac{12^y}{\ln 12}+\frac{5^y}{\ln 5}=\frac{13^y}{\ln 13}$

$\frac{\ln 5 \cdot 12^y+\ln 12 \cdot 5^y}{\quad}=\frac{13^y}{\ln 13}$

df =



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$F(2) = [2/4] = 0$

$f(3) = [3/4] = 0$

$f(4) = 2f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = 0$

$28-3 = 25 \cdot 25 = 625$

$f(\overset{2}{x}/\underset{3}{y}) =$

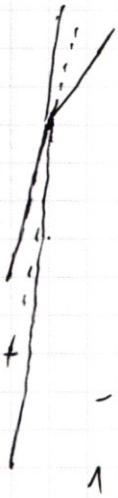
$f(2) = F\left(\frac{2}{3}\right) + f(3)$

$F(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$

$F\left(\frac{x}{y}\right) = -f(y) + f(x) \geq 0$

$f(x) < f(y)$

$f(2) + f(3) \leq F(5)$



$6x = 9x - 3$

$x = 1$

$-\sqrt{3{,}6} + 1$

$1 < \sqrt{3{,}6} < 2$

$-2 < -\sqrt{\ } < -1$

$-1 < -\sqrt{\ } + 1 < 0$

$2 < \sqrt{\ } + 1 < 3$

		f(
0	2	0
0	3	0
4	5	1
4	7	1
8	11	2
12	13	3
16	17	4
16	19	4
20	23	5
	[illegible]	

$f(28) = 1$

$f(27) = 0$

$f(26) = 3$

$f(25)$ 2

$f(24)$ 0

$f(23)$ 5

$f(22) = 3$

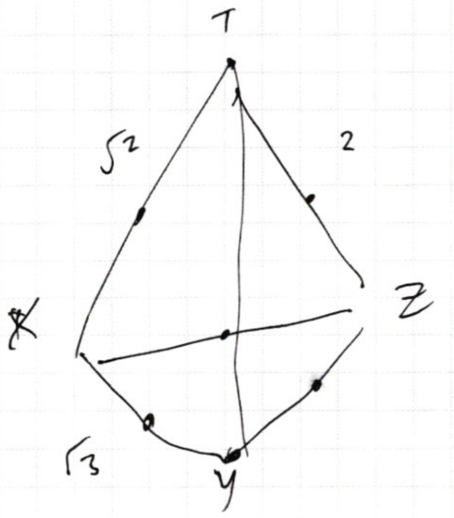
$f(21)$ 1

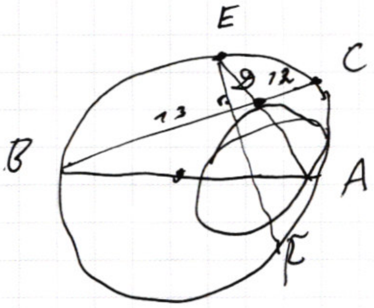
$f(20)$ 1

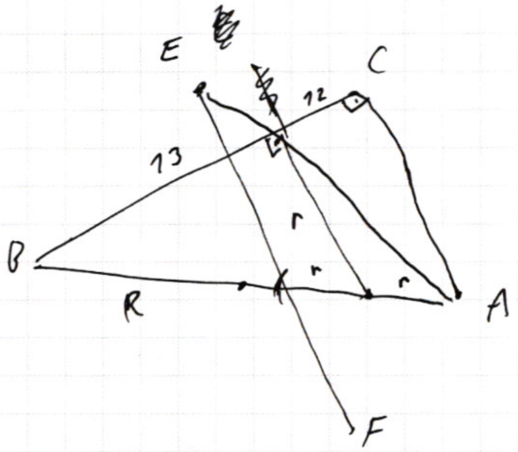
1 0
2 0
3 0
4 0
5 1
6 0
7 1
8 0
9 0
10 1
11 2
12 0
13 3
14 1
15 1
16 0
17 4
18 0
19 4
20 1
21 1
22 2
23 5
24 0
25 2
26 3
27 0
28 1

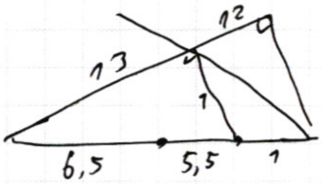
25

$\sin x + \sin = \sin\frac{x+y}{2} - \cos\frac{x-y}{2}$









$13^2+r^2=(2R-r)^2$

~~2?4~~

$\frac{12}{13}=\frac{2R-2r}{2R}$

~~$24R=26R-28r$~~

~~$13r=2R$~~

~~13^2+r^2+12~~

~~$r=1$~~

~~$R=6,5$~~

$\frac{12}{13}=\frac{R-r}{R}$

$\frac{1}{13}=\frac{r}{R}$

$R=13r$

13^2