МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases} \longrightarrow \cancel{2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}}$$

$\cancel{2\sin\alpha\cdot\cos 2\beta}$

2-е условие

$$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

$$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta-1)+2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$$

$$2\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta+2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha$$

$$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha) = -\frac{2}{17} \quad \text{но} \quad \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$2\cos 2\beta(\sin(2\alpha+2\beta)) = -\frac{2}{17}$$

$$2\cos 2\beta\cdot -\frac{1}{\sqrt{17}} = -\frac{2}{17} \quad \Big| : -\frac{2}{\sqrt{17}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

Первое условие: $\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \Big|\cdot\sqrt{17}$$

$$\sin 2\alpha\pm 4\cos 2\alpha+1=0$$

знак „–" | пусть знак „+"

$$\sin 2\alpha-4\cos 2\alpha+1=0$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha-4\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=0$$

$$5\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-3\cos^2\alpha=0 \quad \Big| : \cos^2\alpha$$

т.к. $\cos\alpha \neq 0$ ($\operatorname{tg}\alpha$ определён)

$$5\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha-3=0$$

$$5(\operatorname{tg}\alpha+1)\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{3}{5}\right)=0$$

$$\operatorname{tg}\alpha=-1 \quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}$$

$-1 \le \sin 2\alpha \le 1$

$+$

что-то положительно ≥ 0

$\shortparallel$

-1

Оценка:

$2\sin\cdot\cos\alpha+5\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha=0$

$-3\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha-5=0$

$\cancel{\operatorname{tg}=\alpha}$

$\operatorname{tg}\alpha = 1$

$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{5}$

~~возможно в одном случае~~

$$\cancel{\cos 2\alpha=0 \Rightarrow \sin 2\alpha=-1}$$

$$\cancel{2\alpha=\frac{3\pi}{2}+2\pi k}$$

$$\cancel{\alpha=\frac{3\pi}{4}+\pi k}$$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha=-1$; $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{5}$; $\operatorname{tg}\alpha=1$; $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{5}$ $\operatorname{tg}\alpha=-1$ ($\cos\alpha\neq 0$)

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

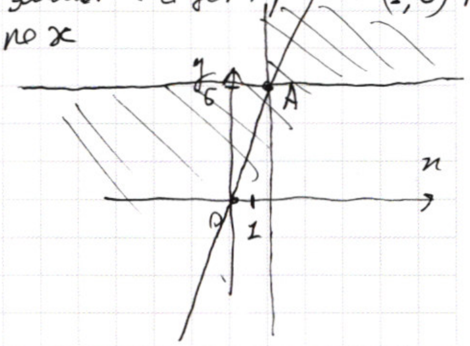
№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \Rightarrow \cancel{3x}\ (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \quad 9(x-1)^2+(y-6)^2=90$$

Это уравнение эллипса с центром в $(1;6)=A$ растянутым по x

ОДЗ: $\sqrt{\ }$ под корнем ≥ 0

$6(1-x)-y(1-x)=(1-x)(6-y)=(x-1)(\cancel{6-y}\ y-6)\geq 0$

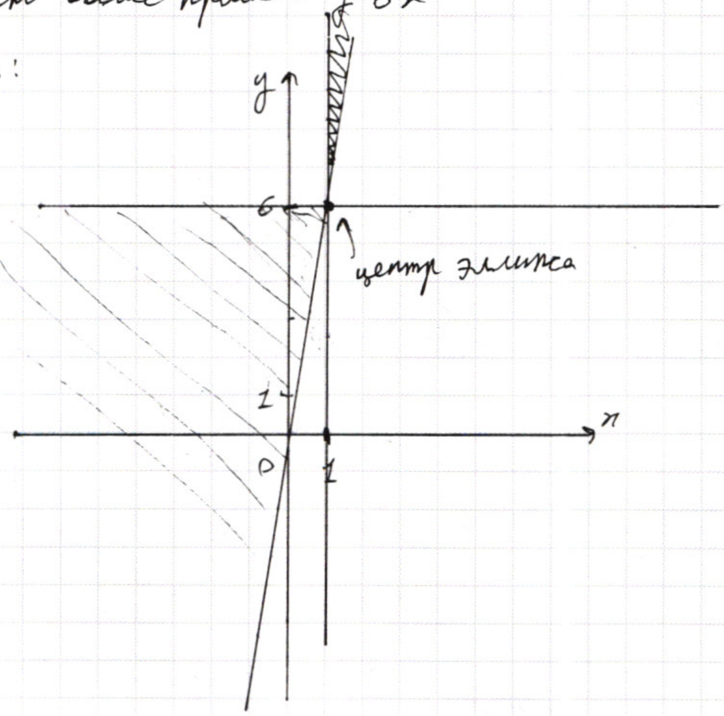


Это области, где $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y\geq 6 \\ x\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y\leq 6 \\ x\leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$

Так же $y-6x\geq 0$ для решений

$y\geq 6x$ это всё, что выше прямой $y=6x$

По итогу получаем область:



Эллипс - множество точек

Все точки эллипса, которые попали в зону - будут подходить по ОДЗ

Возведём первое в квадрат

$y^2+36x^2-12xy=xy-6x-y+6$

$y^2+y-13xy+36x^2+6x+6=0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

ОДЗ: $26x-x^2>0 \quad |\cdot(-1)$

$x(x-26)<0$

$+ \quad 0 \quad - \quad 26 \quad +$

$x \in (0;26)$

1) На ОДЗ $x^2-26x<0$ всегда $\Rightarrow$ модуль раскроется со знаком минус.

2) $13=5^{\log_5 13}$

$\Downarrow$

выражение преобразуется к виду

$$(-(x^2-26x))^{\log_5 12}+26x-x^2 \geq 5^{(\log_5 13)\cdot \log_5(26x-x^2)}$$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2 \geq (26x-x^2)^{\log_5 13} \quad \text{(все преобразования на ОДЗ)}$$

Замена: $t=26x-x^2 \quad (t>0)$

$$t^1 \geq t^{\log_5 13}-t^{\log_5 12}$$

Все степени это какие-то постоянные числа const

некая степенная функция.

~~Обе функции все возрастают при $t>1$, но функция сверху всегда вы~~

1) участки t: $0<t<1 \Rightarrow t^{\log_5 13}-t^{\log_5 12}<0$ т.к. при возведении числа от 0 до 1 в бо́льшую степень значение выходит меньшее. Справа <0, слева $t>0 \Rightarrow$ верно всегда.

2) $t=1 \Rightarrow$ справа $=0$ – верно. 3) $t>1$ Обе функции слева и справа монотонно возрастают. (метод рационализации $(t-1)(\log_5 13-\log_5 12)$)

при $t<1$ $f(x)<0$

$t=1$ $f(x)=0$

$t>1$ $f(x)>0$

Угадываем корень $t=25$ при равенстве функций

$$25=5^{2\log_5 13}-5^{2\log_5 12}=13^2-12^2=25$$

$t=25$ – одно из пересечений.

$g(t)=t$ – просто прямая. $f(t)=t^{\log_5 13}-t^{\log_5 12}$ выпукла вниз и равна 0 в $t=1$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) при $t=1$ $g(t)$ выше $f(t)$

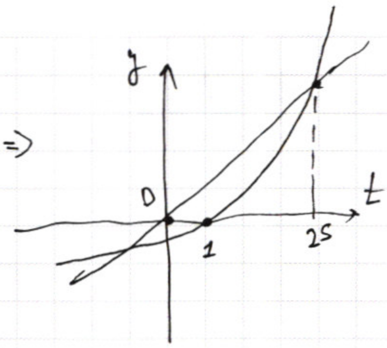
$t=25$ они пересекаются и $f(t)$ выпукла вниз $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ при $t>1$ единственно пересечение!

Мы доказали, что и при $t \in (0;1]$ пересечений нет

$\Downarrow$

на ограничении $t>0$



$g(t) \geq f(t)$ при $\underline{t \in (0;25]}$ дальше $f(t) > g(t)$

Обратная замена:

$0 < 26x - x^2 \leq 25$

$x \in (0;26)$

(ОДЗ)

$+ \quad 0 \quad - \quad 26 \quad +$

$26x - x^2 \leq 25$ $\qquad x^2 - 26x + 25 \geq 0$

$26 = 25 + 1$

$(x-1)(x-25) \geq 0$

$+ \quad 1 \quad - \quad 25 \quad +$

$x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty)$

$x \in (0;1] \cup [25;26)$

Ответ: $x \in (0;1] \cup [25;26)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

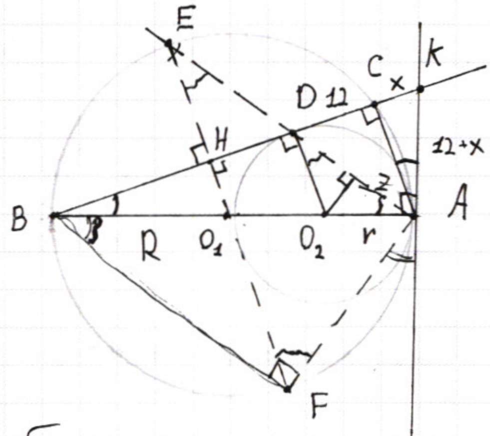
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

~~Дано: Ω и ω касаются внутр. образом в A~~

Дано в условии:) $CD=12$; $BD=13$

Найти: R (радиус Ω); r (радиус ω); $\angle AFE$; $S_{\triangle AEF}$



Решение:

1) AB – диаметр окружности Ω. Проведем AK – общую касательную для Ω и ω

Ω и ω имеют общую касательную и ~~касаются внутренним образом~~ (касаются друг друга в A) $\Rightarrow$ точки O_2, O_1 и A лежат на одной прямой

$\left(\begin{matrix} O_2A \perp AK \\ O_1A \perp AK \end{matrix} \Rightarrow O_1, A, O_2 \text{ – на одной прямой}\right)$

2) BC и AK – касательные к ω и $BC \cap AK = K \Rightarrow DK = AK$, как отрезки касательных

Обозначим CK за x $\Rightarrow DK = AK = DC + CK = 12 + x$

3) $\angle CBA$ опирается на ~~эту же~~ дугу AC малую. Угол между касательной AK и хордой AC равен углу $\angle CBA$, который опирается на эту же дугу.

$\angle BCA = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр $AB \Rightarrow \angle CKA = 90 - \angle KAC$

Так же $\angle CKA = 90 - \angle CBA$ (диаметр $BA \perp$ касательной AK)

подобие $\triangle BCA$ и $\triangle BAK$ (BAK) по 3-м углам равным. (по УУ)

Запишем соотношение сторон: $\frac{BC}{AB} = \frac{AB}{BK} \Rightarrow \frac{13+12}{2R} = \frac{2R}{25+x}$ (*)

4) $\angle$ степень точки K: $AK^2 = KC \cdot KB \Rightarrow (12+x)^2 = x(25+x)$

$144 + 24x + \cancel{x^2} = 25x + \cancel{x^2}$

$\underline{144 = x}$

Подставим в (*) $4R^2 = 25(25+144)$ $R^2 = \frac{25 \cdot 169}{4}$ $R = \frac{5 \cdot 13}{2}$ $(R>0)$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

5) Запишем ещё одно соотношение подобных Δ-ов. $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ (по УУ)

$$\frac{BD}{BC}=\frac{BO_2}{BA} \Rightarrow \frac{13}{13+12}=\frac{2R-r}{2R} \qquad \frac{13}{25}=1-\frac{r}{2R} \qquad \frac{r}{2R}=\frac{12}{25} \qquad r=\frac{24R}{25}$$

$$r=\frac{\cancel{24}^{12}}{\cancel{25}_{5}}\cdot\frac{5\cdot 13}{\cancel{2}}=\frac{12\cdot 13}{5}$$

6) DO_2 и EH — $\perp$ к прямой $BC \Rightarrow DO_2 \parallel EH$

Рассм. $\triangle EO_1A$ и DO_2A. Они подобные по УУ ($\angle A$ — общий; $\angle O_1EA=\angle O_2DA$ (при $\parallel$ прямых и ED-секущая))

$\triangle DO_2A$ — равнобедренный ($DO_2=O_2A=r$) $\Rightarrow \angle$ при основании равные $=\gamma=\angle EAB=\angle ADO_2=\angle AEO_1$)

$\angle AEF=\angle ABF$ (опираются на одну дугу) $\Rightarrow \angle ABF=\angle EAB=\gamma \Rightarrow AE\parallel BF$ (Х лежащие $\angle$ равны)

$\angle BFA=90^\circ$ т.к. опирается на диаметр. Рассм. $\angle$ ~~EF~~ EAF. Он равен $\angle EAB+\angle BAF=\gamma+\angle BAF$

$\angle BAF=90-\gamma$

$\gamma+90-\gamma=90$

$\angle EAF=90^\circ \Rightarrow$ опирается на диаметр

EF — диаметр Ω

$\triangle O_1AF$ — равнобедренный ($O_1A=O_1F=R$) $\Rightarrow \angle BAF=90-\gamma=\angle EFA$

7) Рассм. $\triangle DAO_2$ проведём высоту из O_2 и получим: $\cos\gamma=\frac{z}{2\cdot r}$ $(z=AD)$

Рассм. $\triangle DCA$ (прямоуг.) $\angle CDA=90-O_2DA \Rightarrow =90-\gamma \Rightarrow CAD=\gamma$ $\quad \sin\gamma=\frac{12}{z}$

$z=\frac{12}{\sin\gamma}$

Подставим r и z

$$\cos\gamma=\frac{\cancel{12}\cdot 5}{\sin\gamma\cdot 2\cdot\cancel{12}\cdot 13} \Rightarrow 2\cos\gamma\cdot\sin\gamma=\frac{5}{13} \qquad \sin 2\gamma=\frac{5}{13} \Rightarrow \cos 2\gamma=\frac{12}{13}$$

$$\cos 2\gamma=2\cos^2\gamma-1=\frac{12}{13} \qquad 2\cos^2\gamma=\frac{25}{13} \qquad \cos^2\gamma=\frac{25}{26} \qquad \cos\gamma<90^\circ \Rightarrow \cos\gamma=+\frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\sin\gamma=\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$\sin(90-\gamma)=\cos\gamma=\frac{5}{\sqrt{26}}$ $\quad \angle EFA=\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}$

$\cos(90-\gamma)=\sin\gamma=\frac{1}{\sqrt{26}}$

$\cos(90-\gamma)=\frac{AF}{EF}$ ($\triangle$ прямоуг.) $\quad AF=\cos(90-\gamma)\cdot EF$

$$S_{\triangle AEF}=\frac{1}{2}\cdot AF\cdot EF\cdot\sin(90-\gamma)=\frac{1}{2}EF^2\cdot\cos(90-\gamma)\cdot\sin(90-\gamma)=\frac{1}{4}EF^2\cdot 2\cos\gamma\cdot\sin\gamma=\frac{EF^2\cdot\sin 2\gamma}{4}$$

$$=\frac{4R^2\cdot\sin 2\gamma}{4}=R^2\cdot\sin 2\gamma=\frac{5^2\cdot 13^2}{2^2}\cdot\frac{5}{\cancel{13}}=\frac{125\cdot 13}{4}$$

Ответ: $R_\Omega=\frac{5\cdot 13}{2}=32{,}5$; $r_\omega=\frac{12\cdot 13}{5}=31{,}2$; $\angle EFA=\arccos\frac{1}{\sqrt{26}}$; $S_{AEF}=\frac{125\cdot 13}{4}=R^2\cdot\sin 2\gamma$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

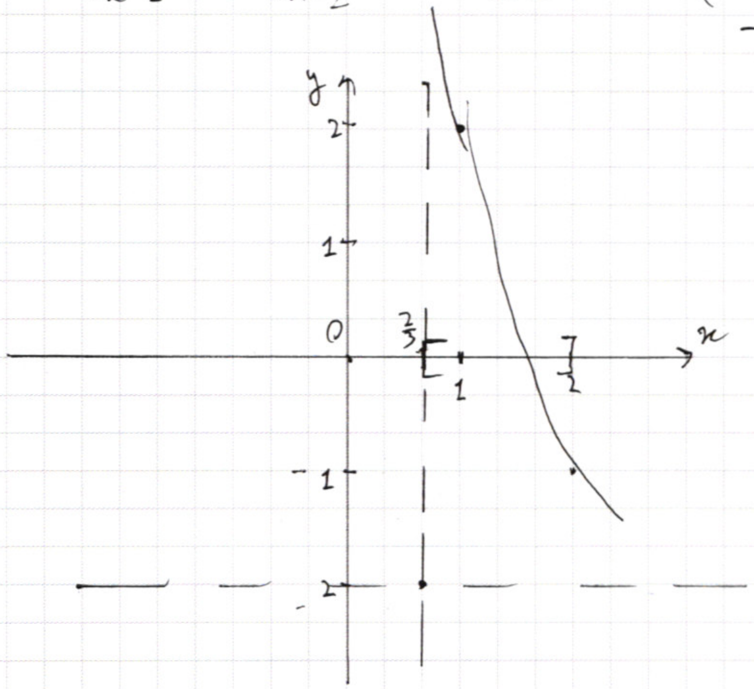
№6

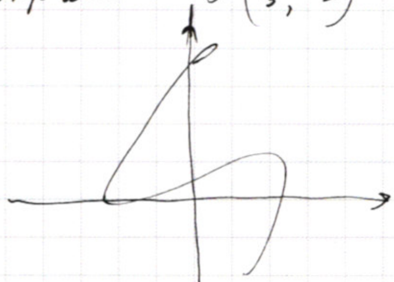
$$\begin{cases} \frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \\ 18x^2-51x+28 \leqslant ax+b \end{cases}$$

$ax+b$ – прямая.

$$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{-(6x-4)+4}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2 = \frac{4}{3}\frac{1}{\left(x-\frac{2}{3}\right)} - 2$$

$\longrightarrow$ центр асимптот в $\left(\frac{2}{3}; -2\right)$





$f(x) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{\left(x-\frac{2}{3}\right)} - 2$

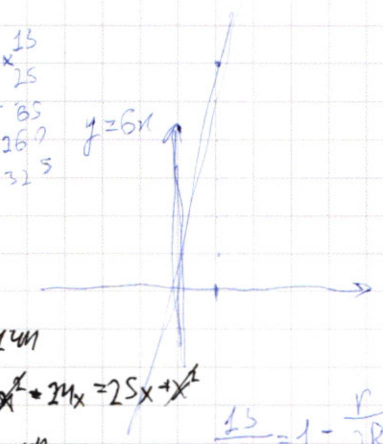
$f(1) = 2$

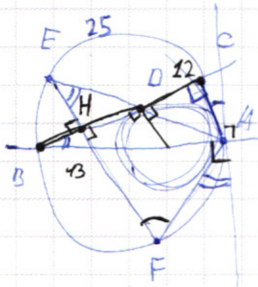
$f(2) = -1$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\times\begin{array}{r}13\\25\\\hline 65\\26\\\hline 325\end{array}$



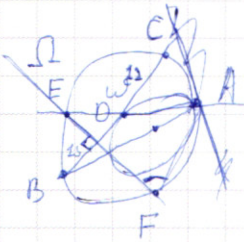


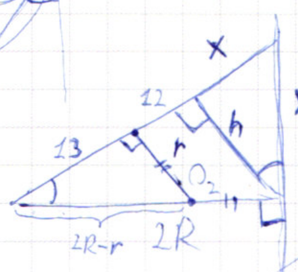
$R-?$

$r-?$

$S_{AFE}-?$

$\angle AFE-?$





$12+x=y$

144

$144+\cancel{x^2}+24x=25x+\cancel{x^2}$

$x=144$

$\frac{13}{25}=1-\frac{r}{2R}$ $\quad 2R$

$\frac{r}{2R}=\frac{12}{25}$

$r=\frac{24}{25}R$

$r=\frac{12}{25}\sqrt{}$

$\frac{2R-r}{25+x}=\frac{13}{2R}$

$\boxed{\frac{13}{25}=\frac{2R-r}{2R}}$

$y^2=x\cdot(x+25)$

$\frac{2R}{25+x}=\frac{25}{2R}$

481

$370+111$

$25^2-12^2=13\cdot37$

$\begin{array}{r}625\\-481\\\hline 144\end{array}$

$\frac{2R-r}{13}=\frac{25+x}{2R}=\frac{2R}{25}$

$4R^2+y^2=(25+x)^2$

$4R^2=625+25x$

$4R^2=625+x^2+50x-144-x^2-24x$

$481+26x=625+25x$

$\boxed{x=144}$

$\frac{2R}{y}=\frac{25}{h}$

$4R^2+x^2+25x=625+x^2+50x$

$4R^2=481+26x$

$\boxed{4R^2=625+25x}$

$288+37$

$\frac{2R-r}{25+x}=\frac{h}{y}=\frac{25}{2R}$

325

$25x=h \quad h^2$

318

$(25+x)^2=(12+x)^2+4R^2$

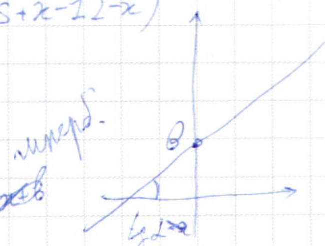
$625x^2=h^2=y^2-x^2=25x$

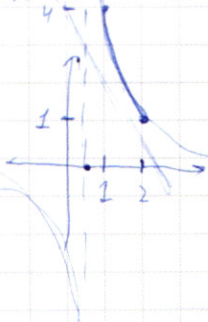
$481+26x=4R^2$

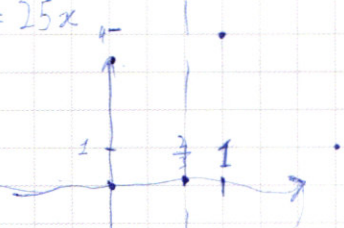
$13\cdot(37+2x)=4R^2$

$R=\frac{\sqrt{\cancel{481}\,13(37+2x)}}{2}(25+x-12-x)$

$(2;1)$







$\sqrt{13^2 5^2}$

$1=a2+b$

$b=-2a+1$

$R=\frac{13\cdot5}{2}$

$ax+b\geq 18x^2-51x+28$

$3\sqrt{2}$

$x=2$

$r=\frac{24\cdot13\cdot5}{25\cdot2}$

$\frac{8-6x}{3x-2}$

$-(6x-8)=-(3x-2+3x-6)$

$\frac{-(6x-4-4)}{3x-2}=\frac{-(6x-4)+4}{3x-2}=\frac{4}{3x-2}-2=\frac{4}{3(x-\frac{2}{3})}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{(x-\frac{2}{3})}$

$r=\frac{12\cdot13}{5}$

$\frac{25\cdot169}{4}$

$\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\frac{4}{3}}=1$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$6(1-x)-y(1-x)$

$y-6x=\sqrt{(6-y)(1-x)}$

$xy=const$

$\sqrt{(y-6)(x-1)}$

$(y-6x)^2=(y-6)(x-1)$

$y^2+36x^2-12xy=xy+6-y-6x$

$y^2+36x^2-13xy-6+y+6x=0$

$-\frac{1}{2}\quad (y+\frac{1}{2})^2+(6x+\frac{1}{2})^2-6,5-13xy=0$

сущ. не

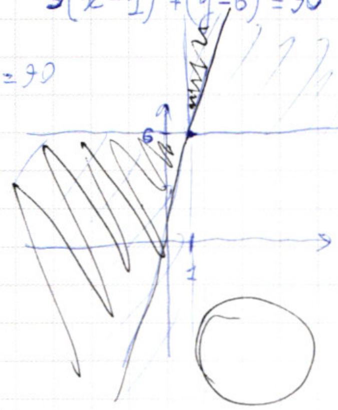
$y\ge6\ \begin{cases} y>6\\ x>1\end{cases}$

$\begin{cases} x<1\\ y<6\end{cases}$

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$ $\quad 9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

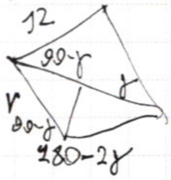
$9x^2+9-18x+y^2+36-12y=90$



$\cos\gamma=\frac{6}{2r\sin\gamma}$

$\cos\gamma\cdot\sin\gamma=\frac{6\cdot5}{2\cdot2\cdot13}=\frac{5}{26}$

$13^2=(2R-2r)\cdot2R$



$\sin2\gamma=\frac{5}{13}$ $\quad\cos\gamma=\frac{z}{2r}$

$z^2=r^2+r^2-2r^2\cos(180-2\gamma)$ $\quad\sin\gamma=\frac{12}{z}$ $\quad z=\frac{12}{\sin\gamma}$

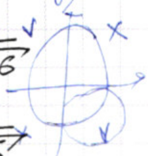
~~cos(90-γ)~~

$2\cos^2\gamma=\frac{25}{13}$ $\quad 2\cos^2\gamma-1=\frac{12}{13}$ $\quad \cos2\gamma=\frac{12}{13}$

$\cos^2\gamma=\frac{25}{26}$ $\quad tg\,\alpha-?$

$\cos\gamma=\frac{5}{\sqrt{26}}$

$\sin\gamma=\frac{1}{\sqrt{26}}$



$\sin(90-\gamma)=\frac{1}{\sqrt{26}}$

$\cos\gamma$

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\alpha+\beta\in$ "

$\sin\alpha+\sin\beta\overset{?}{=}2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$-\quad\overset{?}{=}2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$

$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$156=312$

$50+15$

$\sin2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}+\cos2\alpha\cdot\pm\frac{4}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin2\alpha\pm4\cos2\alpha=-1\ \Big|:$

$\cos\alpha\ne0$

$\Downarrow$

$\cos2\alpha\ne-1$

$\frac{\pi}{2}+\pi k$

$\pi+2\pi k$

$2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)+\sin2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin2\alpha\cdot\cos4\beta+\cos2\alpha\cdot\sin4\beta+\sin2\alpha$

$\sin2\alpha\cdot(2\cos^22\beta-1)+\cos2\alpha\cdot2\sin2\beta\cdot\cos2\beta+\sin2\alpha$

$2\cos^22\beta\cdot\sin2\alpha+2\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{2}{17}$

$2\cos2\beta\cdot(\cos2\beta\cdot\sin2\alpha+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha)$

$2\cos2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{2}{17}$

$2\cos2\beta\cdot-\frac{1}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{17}$

$\begin{cases}\cos2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \Downarrow\\ \sin2\beta=\pm\frac{\sqrt{16}}{\sqrt{17}}=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\end{cases}$

либо

$\cos2\alpha=0$ „−" $\quad$ „+"

$\sin2\alpha-4\cos2\alpha=-1\ |:\cos2\alpha$

$\sin2\alpha-4\cos2\alpha+1=0$

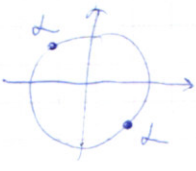
$\cos2\alpha=0$

$\Downarrow$

$\sin2\alpha=-1$

$2\alpha=\frac{3\pi}{2}+2\pi k$

$\alpha=\frac{3\pi}{4}+\pi k$



$tg\,\alpha=-1$

$-\frac{2}{5}=-1+\frac{3}{5}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x^2-26x|^{\log_5 12}$ число >1 $+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

на ОДЗ: всегда <0

ОДЗ: $26x-x^2>0$

$x(x-26)<0$

$+ \quad 0 \quad - \quad 26 \quad +$

ОДЗ:

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$13=5^{\log_5 13}$ $\qquad \log_2 4=2$

$\log_5 5$

$(26x-x^2)^{\log_5 13}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12} - 26$

$26x-x^2 \geq (26x-x^2)^{\log_5 13}-(26x-x^2)^{\log_5 12}$

$t<1$

$(t-1)(\log_5 13-\log_5 12)$

$t^1 \geq t^{\log_5 13}-t^{\log_5 12}$ $\qquad (t>0)$

$25+1$

$t<1$ – всегда ок

$26x-x^2$

$t>1$ $f(t)$ 25

$25 \geq 13^2-12^2=25$

Если $t>25 \Rightarrow$ не ок

ок $t \leq 25$

~~125~~ ~~13~~

$-x^2+26x-25 \leq 0$

$5 \geq 13-12$ – верно

$x^2-26x+25 \geq 0$

$\frac{1}{5} \geq \frac{1}{13}-\frac{1}{12}$

$25+1$

$(x-25)(x-1) \geq 0$

$+ \quad 1 \quad - \quad 25 \quad +$

$0 \qquad 26$

$x \in (0;1] \cup [25;26)$

$1 \Rightarrow$ ок

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

для простого

$\log_5 13\, t^{\log_5 \frac{13}{5}} - \log_5 12\, t^{\log_5 \frac{12}{5}}$

при $t=25$ это $\log_5 13\left(\frac{13}{5}\right)^2-\log_5 12\left(\frac{12}{5}\right)^2 > 1$

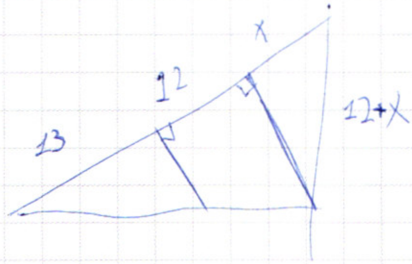
Y T X Z ?

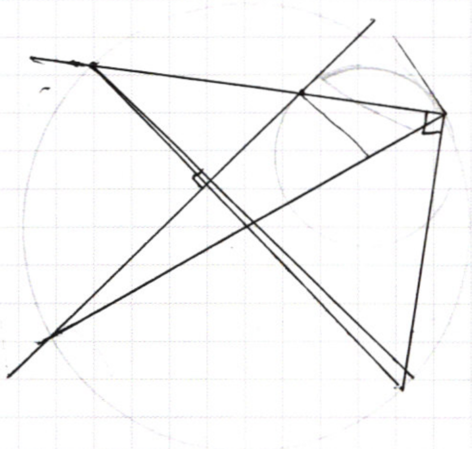
☒ черновик ☐ чистовик

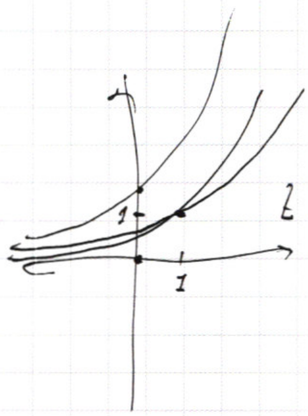
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)


x
12
13
12+x




y
1
1
t