МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+8\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha \Rightarrow$

$+\sin 2\alpha = \sin 2\alpha(1+\cos 4\beta) + \sin 4\beta\cos 2\alpha = 2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta\cos 2\beta \cdot \cos 2\alpha =$

$\cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1$ $= 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha) =$

$= 2\cos 2\beta\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

~~$\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow$~~ $= -\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{17}}$

$\boxed{\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\Downarrow$

$\sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

1°. $\sin 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1 \;|\; : \cos 2\alpha$

$\operatorname{tg}2\alpha + 4 = -\frac{1}{\cos 2\alpha} \;|\;{}^2$

$\boxed{\text{случай } \cos 2\alpha = 0 \text{ рассмотрим позже}}$ (~~если $\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \sin 2\alpha = 1 \Downarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$~~ ?)

$\operatorname{tg}^2\beta + 1 = \frac{1}{\cos^2\beta}$

$\operatorname{tg}^2 2\alpha + 16 + 8\operatorname{tg}2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha}$

$15 + 8\operatorname{tg}2\alpha = 0$ $\operatorname{tg}2\alpha = -\frac{15}{8} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ $15\operatorname{tg}^2\alpha - 15 = 16\operatorname{tg}\alpha$

$15\operatorname{tg}^2\alpha - 16\operatorname{tg}\alpha - 15 = 0$

$D = 16^2 + 4\cdot 15^2 = 256 + 900 = 1156 = 4\cdot 17^2$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{16 \pm 2\cdot 17}{30}$ $\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}\\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{3}{5}\end{array}\right.$

2°. $\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1 \;|\; : \cos 2\alpha$

$\operatorname{tg}2\alpha - 4 = -\frac{1}{\cos 2\alpha} \;|\;{}^2$

$\operatorname{tg}^2 2\alpha + 16 - 8\operatorname{tg}2\alpha = \frac{1}{\cos^2 2\alpha}$ $\Rightarrow 15 - 8\operatorname{tg}2\alpha = 0$

$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{15}{8} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ $16\operatorname{tg}\alpha = 15 - 15\operatorname{tg}^2\alpha$

$15\operatorname{tg}^2\alpha + 16\operatorname{tg}\alpha - 15 = 0$

$D = 4\cdot 17^2$ $\operatorname{tg}\alpha_{1,2} = \frac{-16 \pm 2\cdot 17}{30}$

$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{3}\\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}\end{array}\right.$

$\cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \sin 2\alpha = \pm 1$ $\quad \sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\alpha = -1$

Второе равенство очев. верно

$\cancel{tg}$ $\quad \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = \pm 1$

Ответ: $\{\pm\frac{5}{3}; \pm\frac{3}{5}; \pm 1\}$

2

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \ (1) \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y - = 45 \ (2) \end{cases}$$

(1) $y - 6x = \sqrt{8xy - 6x - y + 6}$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \cancel{xy - 6x - y + 6 \geq 0}\ y - 6x > 0 \\ (y - 6x)^2 = 8xy - 6x - y + 6 \end{cases}$$

$y^2 + 36x^2 - 12xy - xy + 6x + y - 6 = 0$

$y^2 + y(1 - 13x) + 36x^2 + 6x - 6 = 0 \quad D = 1 + 169x^2 - 26x - 4(36x^2 + 6x - 6) =$

$= 1 + 169x^2 - 26x - 144x^2 - 24x + 24 = 25x^2 - 50x + 25 = (5x - 5)^2$

$y = \frac{13x - 1 \pm (5x - 5)}{2} \quad y_1 = \frac{13x - 1 + 5x - 5}{2} = 9x - 3$

$y_2 = \frac{13x - 1 - 5x + 5}{2} = 4x + 2$

1°. $y = 9x - 3$ $\quad 9x^2 + (9x - 3)^2 - 18x - 12(9x - 3) - 45 = 0$

$\begin{array}{r} 54 \\ +18 \\ \hline 72 \end{array}$

$9x^2 + 81x^2 + 9 - 54x - 18x - 108x + 36 - 45 = 0$

$90x^2 - 180x = 0 \quad 90x(x - 2) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = -3 \\ y = 15 \end{array}\right.$

~~1) $xy - 6x - y + 6 = (y - 6)(x - 1) = (-3 - 6)(0 - 1) = 9$~~

1) $y - 6x = -3 - 0 = -3 < 0$?!

подходит только $(2; 15)$

2) $y - 6x = 15 - 12 = 3$ (+)

2°. $y = 4x + 2$

$9x^2 + (4x + 2)^2 - 18x - 12(4x + 2) - 45 = 0$

$9x^2 + 16x^2 + 4 + 16x - 18x - 48x - 24 - 45 = 0$

$25x^2 - 50x - 65 = 0 \quad 5x^2 - 10x - 13 = 0$

$D = 100 + 20 \cdot 13 = 360 = 36 \cdot 10$

$x_{1,2} = \frac{10 \pm 6\sqrt{10}}{10} = 1 \pm \frac{6}{\sqrt{10}}$

$y_{1,2} = 4 \pm \frac{24}{\sqrt{10}} + 2 = 6 \pm \frac{24}{\sqrt{10}}$

1) $y - 6x = 6 + \frac{24}{\sqrt{10}} - 6 - \frac{36}{\sqrt{10}} < 0$!

2) $y - 6x = 6 - \frac{24}{\sqrt{10}} - (6 - \frac{36}{\sqrt{10}}) > 0$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $\left\{ (2;15) \vee \left(1-\frac{6}{\sqrt{10}};\ 6+\frac{24}{\sqrt{10}}\right) \right\}$

③ Из условия $\Rightarrow$ $26x-x^2>0$ $\Rightarrow$ $|x^2-26x| = 26x-x^2$
(из логарифма)

$(26x-x^2)^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$5^{\log_5(26x-x^2)\cdot\log_5 12} + 5^{\log_5(26x-x^2)} \geq 5^{\log_5 13\cdot\log_5(26x-x^2)}$

$5^{\log_5(26x-x^2)(\log_5 12+1)} \geq 5^{\log_5(26x-x^2)\log_5 13}$

$\Updownarrow$

$\log_5(26x-x^2)(\log_5 12+1) \geq \log_5(26x-x^2)\log_5 13$

$\log_5(26x-x^2)\left(\log_5\frac{12\cdot 5}{13}\right) \geq 0$ $\Leftrightarrow$ $\log_5(26x-x^2) \geq 0$

$\log_5\frac{12\cdot5}{13} > 0$

$\Updownarrow$

$26x-x^2 \geq 1$

$x^2-26x+1 \leq 0$ $\quad D = 26^2-4 = 672 = 168\cdot 4 = 42\cdot 16$

$x_{1,2} = \frac{26\pm4\sqrt{42}}{2} = 13\pm2\sqrt{42}$

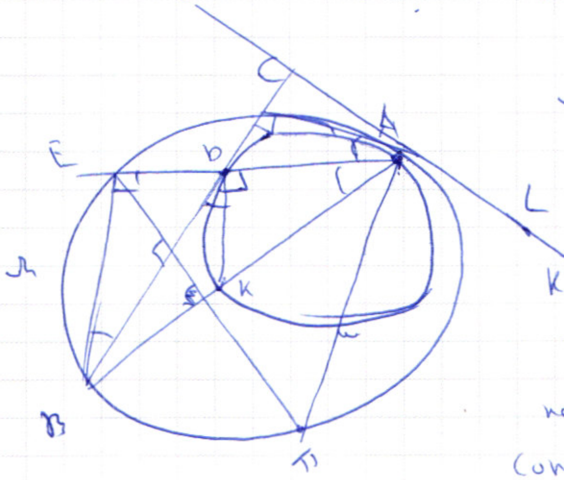
$26 \times 26 = 156 + 52\cdot 10 = 676$

$x \in [13-2\sqrt{42};\ 13+2\sqrt{42}]$, учитывая условие $26x-x^2>0$

$x\in[13-\sqrt{168};\ 13+\sqrt{168}]$ $\qquad x\in(0;26)$

Ответ: $[13-\sqrt{168};\ 13+\sqrt{168}]$

④



центр Ω, центр ω

Ω касается ω $\Rightarrow$ $O_1; O_2; A$ лежат на одной прямой

$\Downarrow$

AB – диаметр $\Rightarrow$ $O_1 \in AB \Rightarrow O_2 \in AB$.

K – диаметрально противоположная точка A. $\angle KDA$ прямой (опирается на диаметр AK, $\angle BEA$ прямой $= \angle BCA$ (опирается на диаметр AB)

$\Downarrow$

$DK \parallel BE$

$\angle DAK = \angle BDK = \angle EBD = \angle CAD$

угол между кас. и хордой дуги. $\quad$ $DK \parallel BE$ $\quad$ углы опираются на одну дугу

$\Rightarrow$

AD – биссектрисса $\triangle CAB$ (1)

Из (1) и из условия $\Rightarrow \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CD}{BD} = \dfrac{12}{13}$ $\quad (12;13)=1$ $\Rightarrow$ $AC = 12x$, $AB = 13x$

$\triangle BCA$ прямоугольный, тогда по т. Пифагора:

$AB^2 = BC^2 + AC^2 \qquad 169x^2 = 25^2 + 144x^2 \Rightarrow x = 5$

$\Downarrow$

$AC = 60;\ AB = 65$

Степень B относ. ω: $BD^2 = BK \cdot AB$

$13^2 = BK \cdot 13 \cdot 5 \quad BK = \dfrac{13}{5}$ $\quad \boxed{R_\Omega = \dfrac{65}{2}}$

$AK = AB - BK = 65 - \dfrac{13}{5} = \dfrac{312}{5}$ $\quad \boxed{R_\omega = \dfrac{156}{5}}$

$\angle AFE = \angle ABE = \cancel{\angle DKA}\ \angle AKD$ $\qquad \sin\angle AKD = \dfrac{AD}{AK} =$

опираются на одну дугу $\quad DK \parallel BE$

$= \dfrac{\sqrt{DC^2 + AC^2}}{AK} = \dfrac{12\sqrt{26} \cdot 5}{312} =$

$\sqrt{144 + 3600} = \sqrt{3744} = 12\sqrt{26}$

$= \dfrac{5}{\sqrt{26}}$ $\quad \boxed{\angle AFE = \arcsin\left(\dfrac{5}{\sqrt{26}}\right)}$

Проведем касательную к окружностям в A: обозначим там L

$\angle LAF = \angle AEF = \angle CAD = \angle EAK$

угол между касательной и хордой

$\begin{cases} EF \perp BC \\ AC \perp BC \end{cases} \Rightarrow EF \parallel AC$ (как накрест лежащие)

Так же $AB \perp AL$, потому что Ω: AB – диаметр, AL – касательная.

~~Из всего выше~~ ока $\angle BAF = 90^\circ - \angle LAF = 90^\circ - \angle EAK \Rightarrow \triangle AEF$ – прямоугольный

$\angle AFE = \alpha$: $\quad \sin\alpha = \dfrac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$

$\Downarrow$

Из подобия $\triangle EDB$ и $\triangle CDA$ $\qquad \operatorname{tg}\alpha = 5$

$\Downarrow$

$\dfrac{BD}{AD} = \dfrac{ED}{CD} \quad \dfrac{13}{12\sqrt{26}} = \dfrac{ED}{12} \quad ED = \dfrac{13}{\sqrt{26}}$ $\quad \dfrac{65}{\sqrt{26}}$ $\Downarrow$

$AE = \dfrac{13}{\sqrt{26}} + 12\sqrt{26} = \dfrac{13 + 12 \cdot 26}{\sqrt{26}} = \dfrac{325}{\sqrt{26}} \qquad AF = \dfrac{AE}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{\frac{325}{\sqrt{26}}}{5}$

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot EF = \frac{1}{2} \cdot \frac{325}{\sqrt{26}} \cdot \frac{65}{\sqrt{26}} = \frac{325 \cdot 65}{52} =$$

$$= \frac{65^2 \cdot 5}{13 \cdot 4} = \frac{65 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 5}{13 \cdot 4} = \frac{65 \cdot 25}{4} = \boxed{\frac{1625}{4}}$$

$$\begin{array}{r} 65 \\ \times\ 25 \\ \hline 325 \\ 130\ \ \\ \hline 1625 \end{array}$$

5

$$\underbrace{f\left(\frac{x}{y} \cdot \frac{y}{x}\right)}_{f(1)} = f\left(\frac{x}{y}\right) + f\left(\frac{y}{x}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) + f(1) - f(x)$$

$$\underbrace{f\left(x \cdot \frac{1}{x}\right)}_{f(1)} = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$$

Заметим, что пары $(x;y)$ и $(y;x)$ взаимоисключающие (если какая-то из них не равна 0), потому что если $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) > 0$, то $f(\frac{y}{x}) = f(y) - f(x) < 0$

Значит достаточно найти, то отношения, которые равны 0.

$f(1 \cdot 1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$; $f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$; $f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$

$f(4) = 2f(2) = \boxed{0}$; $f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$; $f(6) = f(2) + f(3) = \boxed{0}$,

$f(7) = [\frac{7}{4}] = 1$; $f(8) = f(4) + f(2) = \boxed{0}$; $f(9) = 2f(3) = \boxed{0}$;

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$; $f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$; $f(12) = f(4) + f(3) = \boxed{0}$

$f(13) = [\frac{13}{4}] = 3$; $f(14) = f(2) + f(7) = 1$; $f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(16) = f(8) + f(2) = \boxed{0}$; $f(17) = [\frac{17}{4}] = 4$; $f(18) = f(2) + f(9) = \boxed{0}$;

$f(19) = [\frac{19}{4}] = 4$; $f(20) = f(4) + f(5) = 1$; $f(21) = f(3) + f(7) = 1$

$= 2$; $f(22) = f(2) + f(11) = 2$; $f(23) = [\frac{23}{4}] = 5$; $f(24) = f(4) + f(6) = \boxed{0}$

$f(25) = 2f(5) = 2$; $f(26) = f(2) + f(13) = 3$; $f(27) = f(9) + f(3) = \boxed{0}$; $f(28) = f(2) + f(14) = 1$

Итого нужное нам кол-во пар: $\dfrac{25^2 - 8\cdot 2}{2}$ ← с „0"

↗ всего пар

2 ← без „0" взаимоисключают друг-друга.

$\cancel{\dfrac{25^2}{2} - 8 =}$ $\dfrac{\cancel{25^2 - (7! + 7! + 2! + 1 + 1 + 1)\, 2}}{2}$

$\dfrac{\cancel{25^2 - (7! + 7! + 2! + 1 + 1)}}{2}$

$\left[\dfrac{\cancel{25^2 - (7+6+5+4+3+2+1 + 7+6+5+4+3+2+1 + 2+1 + 1 + 1)\cdot 2}}{2}\right] =$

$= \left[\dfrac{\cancel{25^2 - (28 + 28 + 3 + 2)\cdot 2}}{2}\right] = \left[\dfrac{25^2 - 61\cdot 2}{2}\right] = \left[\dfrac{25^2}{2} - 61\right]$

$\dfrac{24\cdot 25 - 61\cdot 2}{2} = 12\cdot 25 - 61 = \boxed{249}$

Ответ: 249

$$\begin{array}{r} 25 \\ \times\ 2 \\ \hline 50 \\ 25 \\ \hline 310 \\ -\ 61 \\ \hline 249 \\ +\ 61 \\ \hline 310 \end{array}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$|x^2-26|^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26-x^2)} \Rightarrow 26x-x^2>0$$

$$26-x^2>0$$

$$|x^2-26x|=26x-x^2$$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$\log_5(26x-x^2)=a$$

$$26x-x^2=5^a$$

$$(5^a)^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^a$$

$$12^a+26x\geq x^2+13^a$$

$$5^a\geq 13^a-12^a$$

$$12^a \xrightarrow{=13^a} \quad 26x-x^2\geq 13^a-12^a$$

$$5^a+12^a\geq 13^a$$

$$26x-x^2>0$$

$$x(26-x)>0 \qquad 0 \quad 26$$

$$x\in(0;26)$$

$$5^{\log_5(26x-x^2)\cdot\log_5 12}+5^{\log_5(26x-x^2)}\geq 13^{\log_5(26x-x^2)} = 5^{\log_5(26x-x^2)\cdot\log_5 13}$$

$$5^{\log_5(26x-x^2)(\log_5 12+1)}\geq 5^{\log_5(26x-x^2)\cdot\log_5 13}$$

$$\log_5(26x-x^2)(\log_5 12+1)\geq\log_5(26x-x^2)\log_5 13$$

$$\log_5(26x-x^2)(\log_5 12+1-\log_5 13)\geq 0$$

$$\log_5(26x-x^2)\cdot\log_5\frac{12^2}{13}\geq 0$$

$$\vee 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\log_5(26x-x^2)\geq 0$$

$$26x-x^2\geq 1$$

$$x^2-26x+1\leq 0$$

$$D=26^2-4=$$

$$4\leq x\leq 28;\ 4\leq y\leq 284 \quad f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \qquad f(2)=0 \qquad f(6)=0$$

$$f(3)=0$$

$$f(1\cdot 1)=2f(1) \Rightarrow f(1)=0$$

$$x=4;\ y=8 \qquad f\left(\frac{4}{8}\right)$$

$$\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(1)}}\ f\left(\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{4}\right)=f\left(\frac{4}{5}\right)+f\left(\frac{5}{4}\right) \Rightarrow f\left(\frac{5}{4}\right)>0$$

$$f(4)=0 \qquad f(6)=1 \qquad \cancel{f(5)} \quad f(5)+f\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$\overset{0}{\overset{\shortparallel}{f(1)}}=f\left(\frac{1}{4}\cdot 4\right)=f(4)+f\left(\frac{1}{4}\right)=f\left(\frac{1}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{6}{4}\right)=f(6)-f(4)=0-1=-1$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(y)+f(\frac{\cdot}{x})$

$\cancel{f}(1) = f(\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}) = f(\frac{x}{y}) + f(\frac{y}{x}) = f(\frac{x}{y}) + f(y) + f(\frac{1}{x})$

$f(\frac{1}{x}\cdot x) = f(\frac{1}{x}) + f(x)$ $\qquad f(\frac{x}{y}) + f(y) + f(1) - f(x)$

$f(1)$

$f(4) = f(1)+f(1)$ $\qquad f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) < 0$

$f(1)=0$; $f(2)=0$; $f(3)=0$ $\qquad f(x) < f(y)$

$f(4) = 2f(2) = 0$ $\quad f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$; $f(6) = f(2)+f(3) = 0$

$f(7) = \frac{7}{4} = 1$ $\quad f(8) = f(2)+f(4) = 0$; $f(9) = 2f(3) = 0$; $f(10) =$

$= f(2)+f(5) = 1$; $f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$ $\quad f(12) = f(4)+f(3) = 0+0 = 0$

$f(13) = [\frac{13}{4}] = 3$; $f(14) = f(2)+f(7) = 1$; $f(15) = f(3)+f(5) = 1$

$f(16) = f(8)+f(2) = 0$; $f(17) = [\frac{17}{4}] = 4$; $f(18) = f(2)+f(9) = 0$

$f(19) = [\frac{19}{4}] = 4$; $f(20) = f(2)+f(5) = 1$; $f(21) = f(3)+f(7) = 0+1 = 1$

$f(22) = f(2)+f(11) = 2$; $f(23) = [\frac{23}{4}] = 5$; $f(24) = f(6)+f(4) = 0$;

$f(25) = f(5)+f(5) = 2$; $f(26) = f(2)+f(13) = 3$; $f(27) = f(9)+f(6) = 0$

$f(28) = f(14)+f(2) = 1$

---

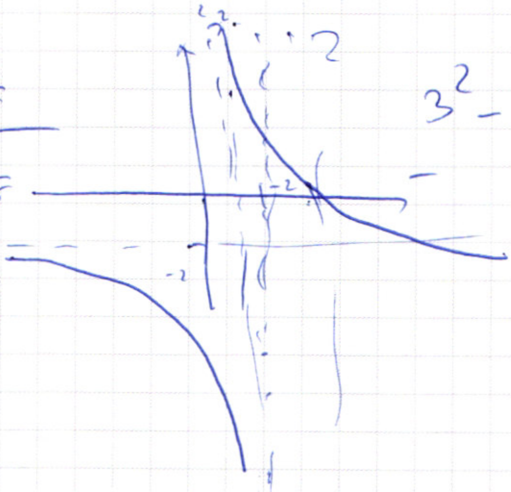
1 $\quad$ ~~$f(x) = f(x+1)+f(1)$~~ $\qquad \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\frac{13}{2}$ $\quad \frac{26\cdot 26 - 13\cdot 2}{2}$ $\qquad \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{12}}$ $\qquad$ 4 8 6 / 4 8 0

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+8 \geq 18x^2 - 51x + 28$ $\qquad \frac{8-6x}{3x-2} = -\frac{6x-8}{3x-2} =$

$= -\left(\frac{2(3x-2)}{3x-2}\cdot\frac{6x-4}{3x-2} - \frac{4}{3x-2}\right)$

$\dfrac{-\frac{6}{5}}{1-\frac{9}{8\cdot 2{,}5}} = -\dfrac{\frac{6}{5}}{\frac{16}{25}}$ $\qquad 3^2 -$



$-2 + \frac{4}{3x-2} \to \infty$

$3x-2 \to 0$

$x \to \frac{2}{3}$

$-\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{8}$

$-\frac{15}{8}$

$3^2 - 2\cdot 0$ $\qquad \frac{2}{3}$

$3^2 - 1\cdot 2 = 3^2 - 3\cdot 2$

☑ черновик $\qquad$ ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

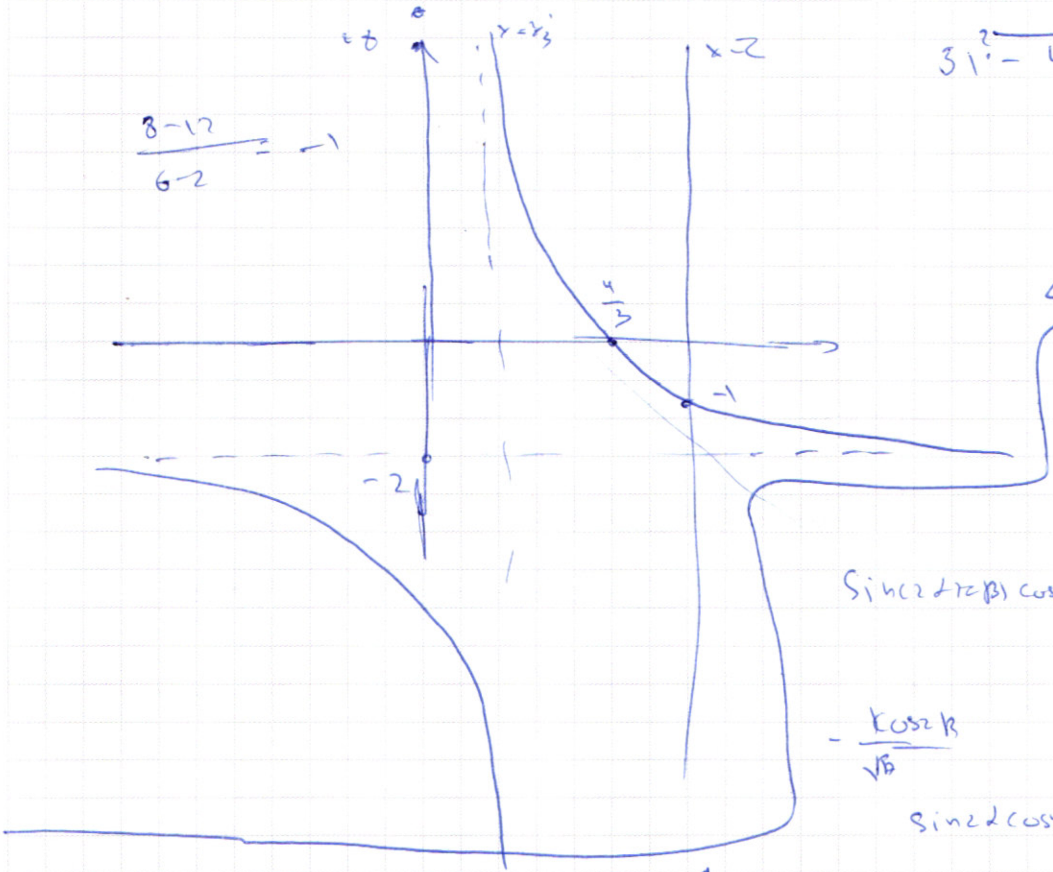
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{8-12}{6-2} = -1$



$31^2 - 4 \cdot 18 \cdot 58$

$51 \cdot 51 = 255 \ldots 260\,1$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$-\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos^4 2\beta + \sin^4 2\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha(3 - 2\sin^2 2\beta)$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

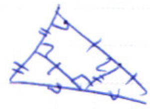
$$\left[\begin{aligned} &2\alpha+2\beta = -\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \\ &2\alpha+2\beta = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \end{aligned}\right.$$

1e. $\sin\left(-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\beta\right) + \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\beta \cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos 2\beta + \sin 2\alpha = \frac{4\sin 2\beta - \cos 2\beta}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha =$

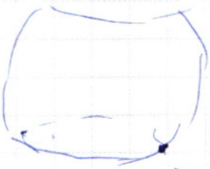
$= -\frac{2}{\sqrt{17}}$ $\quad \frac{4\sin\left(-2\alpha - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \cos\left(-2\alpha - \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha =$

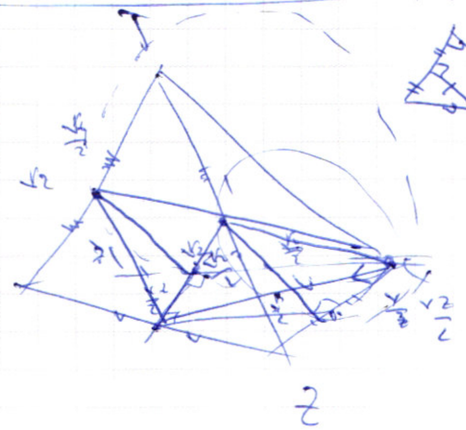
$= -\frac{2}{\sqrt{17}}$ $\quad \frac{\sin\alpha}{\cos\beta} = c$



$\sqrt{\frac{xz^2}{4} + \frac{3}{4}} = \frac{xz}{2}$

$\frac{xz^2}{4} + \frac{3}{4} = \frac{xz^2}{4}$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\cos 4\beta = 2\cos^2 2\beta - 1$

$\sin 2\alpha (1 + \cos 4\beta)$

$2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + \underset{2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha}{\underset{\parallel}{\sin 4\beta \cos 2\alpha}} = -\frac{2}{17}$

$2\cos 2\beta (\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha) = -\frac{2}{17}$

$2\cos 2\beta \cdot \underset{-\frac{1}{\sqrt{17}}}{\underset{\parallel}{\sin(2\alpha + 2\beta)}} = -\frac{2}{17}$

$\boxed{\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\underset{\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}}{\underset{\parallel}{\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}}}$

$\left[\begin{array}{l} 2\beta = \arccos \frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \\ 2\beta = -\arccos \frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi k \end{array}\right.$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$x + 4\sqrt{1-x^2} = -1$

$\frac{2}{17} - 1 = \frac{15}{17}$

$\operatorname{tg} 2\alpha + 4 = -\frac{1}{\cos 2\alpha}$

$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{15}{8}$

$\operatorname{tg}^2 2\alpha + 16 + 8\operatorname{tg} 2\alpha = \left(\frac{1}{\cos 2\alpha}\right)^2$

$15 + 8\operatorname{tg} 2\alpha = 0$

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

$225 \times 4 = 900$

$\frac{15}{8} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha - 1}$

$15\operatorname{tg}^2\alpha - 15 = 16\operatorname{tg}\alpha$

$15\operatorname{tg}^2\alpha - 16\operatorname{tg}\alpha - 15 = 0$

$D = 256 + 4 \cdot 15^2 = 256 + 900 = 1156 = 4 \cdot 17^2$

$16 \pm$

1156	2
578	2
289	17

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k \\ 2\alpha+2\beta = -\pi+\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}+2\pi k\right) \end{array}\right.$ $\quad \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + \sin(2\alpha+2\beta+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta = -\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{17}} \pm \frac{4\sin 2\beta}{\sqrt{17}} +$

$+\sin 2\alpha =$

2. $\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y+45=0 \end{cases}$

$\begin{array}{r} 12 \\ \times 13 \\ \hline 36 \\ 12 \\ \hline 156 \end{array}$

$(3x)^2-2\cdot 3x\cdot 3+9+y^2-2\cdot y\cdot 6+36 = 90$

$(3x-3)^2+(y-6)^2 = 90 \qquad 9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$y(x-1)-6(x-1) = \frac{1}{9}\sqrt{(y-6)(x-1)}$

$\begin{array}{r} 24 \\ \times 36 \\ \hline 144 \\ 72 \\ \hline 864 \end{array}$

$y-6x = \sqrt{(y-6)(x-1)} \qquad 2y-12x = \frac{2}{9}\sqrt{3(x-1)(y-6)}$

$(y-6x)^2$

$\sqrt{3y-18x} \, 18y-108x = 2\sqrt{3(x-1)(y-6)}$

$y^2+36x^2-12xy = (y-6)(x-1) = xy-y-6x+6$

$y^2+36x^2-13xy+6x+y-6=0$

$36x^2+x(6-13y)+y^2+y-6=0 \qquad D=(6-13y)^2-4\cdot 36(y^2+y-6) =$

$= 36+169y^2-156y-144y^2-144y+\cancel{24\cdot 36}+864 = 25y^2 -$

$\begin{array}{r} 164 \\ 144 \\ \hline 25 \end{array}$

$-\cancel{400}\,300y+900 = (5y)^2-2\cdot 30\cdot 5y+30^2 = (5y-30)^2$

$x_{1,2} = \frac{13y-6\pm(5y-36)}{72} \qquad x_1 = \frac{18y-42}{72} = \frac{3y-7}{12}$

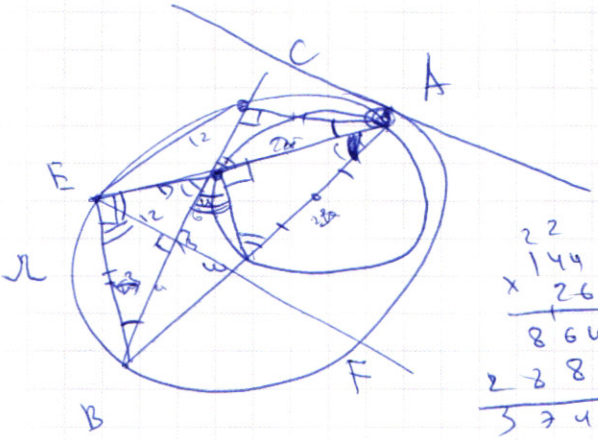
$x_2 = \frac{13y-6-5y+36}{72} = \frac{8y+30}{72} = \frac{4y+15}{36}$

$9\left(\frac{3y-19}{12}\right)^2+(y-6)^2=90$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

3
36
$\times 6$
216
108
1296
$+1144$
1440



$ab = \cancel{12}\ 144$

$\cancel{a+b=13}$

$12 = \frac{ab}{13}$

$ab = 156$

$\frac{\times 2}{312}$

$\begin{array}{r} 312 \\ +169 \\ \hline 481 \end{array}$

$\begin{array}{r} 144 \\ \times 26 \\ \hline 864 \\ 288 \\ \hline 3744 \end{array}$

$\cancel{a^2+b^2=169}$

$\cancel{a^2+b^2+2ab=169+312}$

$\cancel{(a+b)^2} \qquad \cancel{481}$

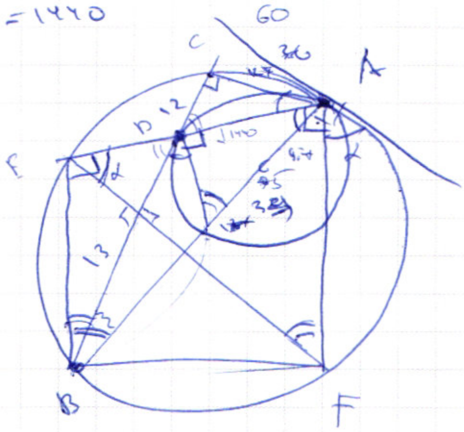
$12^2+36^2=144+1296=1440$

$BC = 15$

$1440 =$

$\begin{array}{r} 1296 \\ +144 \\ \hline 1440 \end{array}$

$\begin{array}{r} 3600 \\ +144 \\ \hline 3744 \end{array}$



$2\,85^2+144x^2=169x^2$

$85^2 = 26x^2$

$\cancel{5x=15} \quad \cancel{x=3}$

$13^2 = 39\cdot x$

$x = \frac{13^2}{39}$

$r = \frac{39}{2} \quad x = 5$

$39 - \frac{13^2}{39} = \frac{39^2-13^2}{39}$

$\sin = \frac{\sqrt{1440}}{26^2}\cdot 39 =$

$2\frac{26^2}{39} = 2\frac{26\cdot 13\cdot 2}{13\cdot 3}$

$2\cdot\frac{26^2}{39} = \frac{26\cdot 52}{39}$

$\cancel{\sin = \frac{\sqrt{1440}}{2\cdot 52}\cdot 3 = \frac{3\cdot 4\sqrt{10}\cdot 3}{2\cdot 52} = \frac{9\sqrt{10}}{\cancel{13}26}}$

$2\frac{52}{3}$

$\begin{array}{r|l} 1440 & 9 \\ 160 & 40 \\ 4 & 4 \end{array}$

$\cancel{\cos = \sqrt{1-\frac{810}{169}}}$

$\cancel{\cos = \sqrt{1-810}}$

$39 - \frac{13^2}{39} = \frac{39^2-13^2}{39}$

$\frac{(39-13)(39+13)}{39} = \frac{26\cdot 52}{39} = \frac{26\cdot 4}{3}$

$\sin = \frac{\sqrt{1440}}{26\cdot 4}\cdot 3 = \frac{4\cdot 3\sqrt{10}\cdot 3}{26\cdot 4} = \frac{9\sqrt{10}}{26}$

$\begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$

$\begin{array}{r|l} 3744 & 3 \\ 1248 & 4 \\ 312 & 3 \\ 104 & 4 \\ 26 & \end{array}$

$\sqrt{3744} = 4\cdot 3\sqrt{26} = 12\sqrt{26}$

$\begin{array}{r} 13 \\ \times 5 \end{array}$

$13^2 = 75\cdot x = 135\cdot x$

$x = \frac{13}{5}$

$\begin{array}{r} 65 \\ \times 5 \\ \hline 325 \\ -13 \\ \hline 312 \end{array}$

$75 \to 65 - \frac{13}{5} = \frac{312}{5}$

$\sin = \frac{12\sqrt{26}}{312}\cdot 5 = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$tg = \frac{\frac{5}{\sqrt{26}}}{\frac{1}{\sqrt{26}}} = 5$

$\begin{array}{r} 26 \\ \times 2 \\ \hline 52 \end{array}$

$\frac{13}{x} \quad \frac{13}{12\sqrt{26}} = \frac{x}{12} \qquad \cos = \frac{1}{\sqrt{26}} \qquad x = \frac{13}{\sqrt{26}}$

$\begin{array}{r} 26 \\ 312 \\ +13 \\ \hline 325 \end{array}$

$12\sqrt{26}+\frac{13}{\sqrt{26}} = \frac{325}{\sqrt{26}}$

$AF = \frac{65}{\sqrt{26}}$