МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство
$$\frac{16x-16}{4x-5} \leqslant ax+b \leqslant -32x^2+36x-3$$
выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}$; $tg\,\alpha$ - ?

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$

$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{2}{5}\end{cases} \Bigg| \Rightarrow 2\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta}=\pm\sqrt{1-\frac15}=\pm\frac{2}{\sqrt5}$

1) $\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha+\frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

домножим обе части ур-я на $\sqrt5$

$2\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-1$

$2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha=-1$ | поделим на $\cos^2\alpha$, т.к. $tg\alpha$ определён и $\cos\alpha\neq 0$

$2-2tg^2\alpha+2tg\alpha=-\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{1}{\cos^2\alpha}=1+tg^2\alpha$

$2-2tg^2\alpha+2tg\alpha=-1-tg^2\alpha$

$tg^2\alpha-2tg\alpha-3=0$

$(tg\alpha-3)(tg\alpha+1)=0$

$\left[\begin{array}{l}tg\alpha=3\\ tg\alpha=-1\end{array}\right.$

2) $\sin 2\beta=-\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha+\frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad |\times\sqrt5$

$-2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha=-1$ $\quad |:\cos^2\alpha$

$-2+2tg^2\alpha+2tg\alpha=-\frac{1}{\cos^2\alpha}=-1-tg^2\alpha$

$3tg^2\alpha+2tg\alpha-1=0$

$D=2^2+4\cdot3=16=4^2$

$tg\alpha=\frac{-2\pm4}{6}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}tg\alpha=\frac13\\ tg\alpha=-1\end{array}\right.$ **Ответ:** $\{-1;\frac13;3\}$.

№ 2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{x(2y-1)-6(2y-1)} \\ (x^2-12x+36)+(36y^2-36y+9)-45=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases}$$

$x-6=a$ | $x=a+6$

$2y-1=b$ | $y=\frac{b+1}{2}$

$$\begin{cases} a+6-6(b+1)=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \Rightarrow ab\geq 0,\ a\geq 6b \\ a^2+9b^2=90 \Rightarrow a=\pm 3\sqrt{10-b^2} \end{cases}$$

$a^2-12ab+36b^2=(\sqrt{ab})^2$

$90-9b^2+36b^2-12ab=(\sqrt{ab})^2$

$27b^2-12ab+90=ab$

$27b^2-13ab+90=0$

$27b^2\pm 13b\cdot 3\sqrt{10-b^2}+90=0$

$9b^2\pm 13b\sqrt{10-b^2}+30=0$

$9b^2+30=\pm 13b\sqrt{10-b^2}$ $\quad \uparrow 2 \quad\quad |b|\leq\sqrt{10}$

$81b^4+540b^2+900=169b^2(10-b^2)$

$250b^4-1150b^2+900=0$ $\quad |\div 50$

$5b^4-23b^2+18=0$

$D=23^2-4\cdot 5\cdot 18=529-360=169=13^2$

$b^2=\frac{23\pm 13}{10} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b^2=3,6 \\ b^2=1 \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} b_1=\frac{6}{\sqrt{10}} \\ b_2=-\frac{6}{\sqrt{10}} \\ b_3=1 \\ b_4=-1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} a_1=3\cdot\frac{8}{\sqrt{10}}=\frac{24}{\sqrt{10}} \\ a_2=-\frac{24}{\sqrt{10}} \\ a_3=9 \\ a_4=-9 \end{array}\right.$$

т.к. $a\geq 6b$, то пары 1,2 и 4 не подходят

$$\begin{cases} 2y-1=1 \\ x-6=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=15 \end{cases}$$

Ответ: $x=15$, $y=1$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: по опр. log $10x-x^2>0$

$x^2-10x<0$

$x(x-10)<0$

$x\in(0;10)$

$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geqslant 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2=t$, $t>0$

$t+t^{\log_3 4}\geqslant 5^{\log_3 t}$

т.к. $3<5$, $3>1$, $5>1$, то $\log_3 t \geqslant \log_5 t$ если $t\in[1;+\infty)$

$\log_3 t<\log_5 t$ если $t\in(0;1)$

1. $t\in(0;1)$

$\log_3 t<\log_5 t$

$5^{\log_3 t}<5^{\log_5 t}=t$

$\begin{cases} t+t^{\log_3 4}\geqslant 5^{\log_3 t} \; * \\ 5^{\log_3 t}<t \end{cases}$

$t^{\log_3 4}>0$

$t>5^{\log_3 t}$ $\Rightarrow$ $t+t^{\log_3 4}>5^{\log_3 t}$ при $\forall\, t\in(0;1)$

$(10x-x^2)\in(0;1)$

$\begin{cases} 10x\cancel{^2}-x^2>0 \\ 10x\cancel{^2}-x^2<1 \end{cases}$

$x^2-10x+1>0$

$x^2-10x+1=0$

$D=100-4=96=16\cdot 6$

$x=\dfrac{10\pm 4\sqrt6}{2}$

$2{,}4=\sqrt{5{,}76}<\sqrt6<\sqrt{6{,}25}=2{,}5$

$x\in(0;10)$; ~~$\sqrt{10}>\sqrt9=3 \Rightarrow 5+2\sqrt{10}>11$, $5-2\sqrt{10}<-1$~~

~~в этом случае нет решений~~

$x\in(0;5-2\sqrt6)\cup(5+2\sqrt6;10)$

2. $t \in [1;+\infty)$

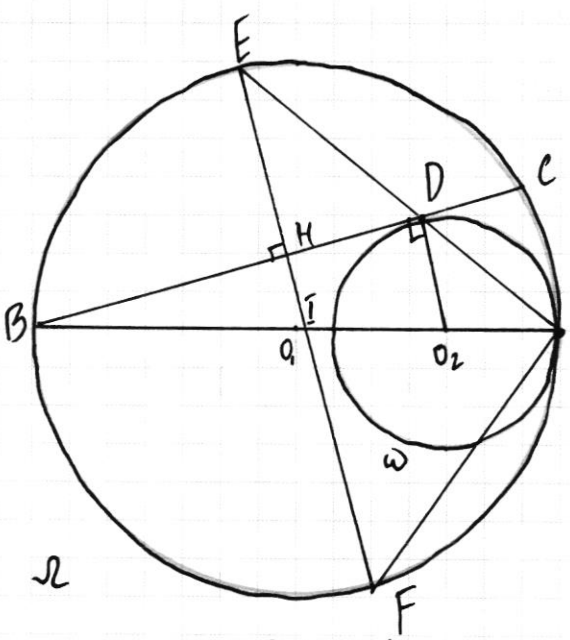
$\log_3 t \geqslant \log_5 t$

$5^{\log_3 t} \geqslant 5^{\log_5 t} = t$

$t + t^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3 t} \geqslant t$

$\cancel{\log_3 4 = \log_3 (3+1)}$

№4



пусть O_1 – центр Ω, O_2 – центр ω

пусть r – радиус ω, R – радиус Ω

$\triangle BDO_1$: по т. Пифагора: $BD^2 + r^2 = (2R-r)^2$

$BD^2 = 4R^2 - 4Rr = 4R(R-r)$

$\left.\begin{array}{l} EF \perp BD \\ O_2D \perp BD \text{ по св-ву кас.} \end{array}\right| \Rightarrow EF \parallel O_2D$

пусть $EF \cap AB = I$

$EF \parallel O_2D \Rightarrow \triangle AIE \sim \triangle AO_2D$

$\frac{AO_2}{O_2D} = \frac{r}{r} = 1 = \frac{AI}{IE} \Rightarrow AI = IE$

но $O_1E = O_1A = R \Rightarrow I = O_1$, EF – диам. Ω

пусть $EF \cap BD = H$, тогда т. к. $EF \perp BC$, $BH = HC = \frac{BC}{2} = 8$

$BC = BD + CD = \frac{15}{2} + \frac{17}{2} = 16$

$\triangle BHI \sim \triangle BDO_2 \Rightarrow \frac{BH}{BD} = \frac{BO_1}{BO_2} = \frac{R}{2R-r} = \frac{8}{\frac{17}{2}} = \frac{16}{17}$

$17R = 32R - 16r$

$16r = 15R \Rightarrow r = \frac{15R}{16}$

$BD^2 = 4R(R-r)$

$\frac{289}{4} = \frac{4R^2}{16} \Rightarrow R = 17$ – радиус Ω

$r = \frac{15R}{16} = \frac{255}{16} = \cancel{14{,}0625}$ $\quad r = 15{,}9375$ – радиус ω

$\frac{AD}{AE} = \frac{AO_2}{AO_1} = \frac{r}{R} = \frac{15}{16}$

$\frac{HO_1}{DO_2} = \frac{BO_1}{BO_2} = \frac{R}{2R-r} = \frac{HO_1}{r} = \frac{16}{17} \Rightarrow HO_1 = \frac{16r}{17} = \frac{16 \cdot \frac{255}{16}}{17} = 15$

$EH = R - HO_1 = 17 - 15 = 2$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{AD}{ED} = \frac{AO_2}{OO_1} = \frac{r}{R-r} = \frac{\frac{15R}{16}}{R-\frac{15R}{16}} = 15$

$ED^2 = HE^2 + HD^2 = 2^2 - \frac{1}{2^2} = 4 - \frac{1}{4} = \left(\frac{\sqrt{15}}{2}\right)^2$

$HD = HC - CD = 8 - \frac{15}{2} = \frac{1}{2}$

EF – диам. $\Rightarrow \angle EAF = 90^\circ$

$R = O_1F = O_1A \Rightarrow \angle O_1FA = \angle O_1AF = \alpha$

$r = O_2D = O_2A \Rightarrow \angle O_2DA = \angle O_2AD = (90^\circ - \alpha)$

$AD = 15ED = \frac{15\sqrt{15}}{2}$

$\angle AO_2D = 2\alpha$

по т. cos в $\triangle AO_2D$: $r^2 + r^2 - 2r^2\cos 2\alpha = AD^2$

$\frac{15^3}{4} = 2 \cdot \frac{15^2 \cdot 17^2}{16^2}(1-\cos 2\alpha)$

$15 = \frac{289}{\cancel{128}_{32}}(1-\cos 2\alpha)$

$1 - \cos 2\alpha = \frac{15 \cdot \cancel{128} 32}{289}$

$\cos 2\alpha = 1 - \frac{480}{289} = -\frac{191}{289}$

$\alpha = \frac{1}{2} \arccos\left(-\frac{169}{289}\right)$ – угол AFE

$\angle AEF = 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{169}{289}\right)$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} EF \cdot AE \cdot \sin\angle AEF = \frac{1}{2} \cdot 17 \cdot 8 \cdot \sqrt{15} \cdot \sin\angle AEF$

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$, $f(p) = [\frac{p}{4}]$

$$\begin{cases} 2 \le x \le 25 \\ 2 \le y \le 25 \\ f(x/y) < 0 \end{cases}$$

$f(xy) = f(x) + f(y)$

$p \geqslant 2$; $f(p) = [\frac{p}{4}] \geqslant 0$

$f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

простые числа от 2 до 25: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 (9 чисел)

$f(2) = f(3) = 0$
$f(5) = f(7) = 1$
$f(11) = 2$
$f(13) = 3$
$f(17) = f(19) = 4$
$f(23) = 5$

$f(\frac{1}{y}) < 0$, $f(x) \geq 0$, $|f(\frac{1}{y})| > |f(x)|$ т.к. $f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(p \cdot q) = f(p) + f(q)$, где p и q – простые

$\triangleright$ $f(x/y) = f(x) - f(y) < 0$

$\triangleright$ $f(x) < f(y)$

$4 = 2 \cdot 2$, $f(4) = 0$
$f(6) = 0$
$f(8) = 0$
$f(9) = 0$
$f(10) = 1$
$f(12) = 0$
$f(14) = 1$
$f(15) = 1$
$f(16) = 0$
$f(18) = 0$
$f(20) = 1$
$f(21) = 1$
$f(22) = 2$
$f(24) = 0$
$f(25) = 2$

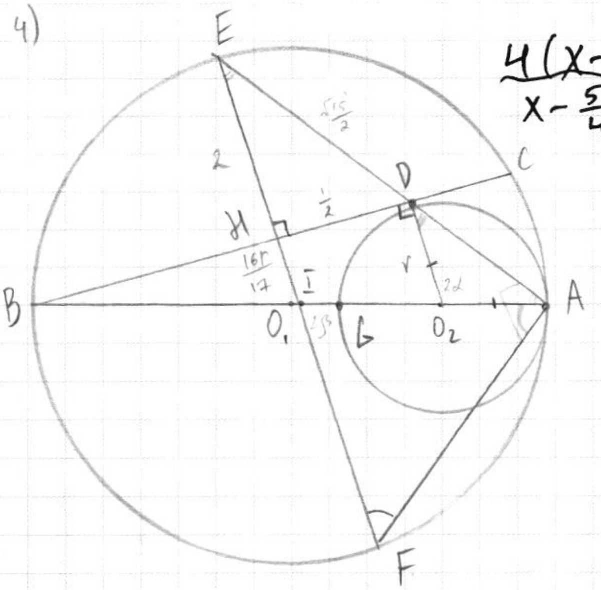
$f(a) = 0$: 10 чисел
$f(a) = 1$: 7 чисел
$f(a) = 2$: 3 числа
$f(a) = 3$: 1 ч.
$f(a) = 4$: 2 ч
$f(a) = 5$: 1 ч.

$$N = \underbrace{10 \cdot 14}_{N_{x_0} N_y} + \underbrace{7 \cdot 7}_{N_{x_1} N_y} + \underbrace{3 \cdot 4}_{N_{x_2} N_y} + \underbrace{1 \cdot 3}_{N_{x_3} N_y} + \underbrace{2 \cdot 1}_{N_{x_4} N_y} =$$

$$= 140 + 49 + 12 + 3 + 2 = 189 + 17 = 206$$

Ответ: 206 пар.

4)



$\frac{4(x-1)}{x-\frac{5}{4}} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$CA = \frac{15}{2}$ $BC = \frac{...}{2} = 16$

$BD = \frac{17}{2}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$BD^2 = BG \cdot BA$

$f(p) = [\frac{p}{4}]$

$BA = 2R, BG = (2R-2r)$

$BD^2 + r^2 = (2R-r)^2$

$\triangleright\ BD^2 = (2R-2r)\cdot 2R$

$BD^2 = 4R^2 - 4Rr$

$BD^2 = 4R^2 - 4Rr$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$ $\begin{array}{r} 15 \\ \times 17 \\ \hline 105 \\ 15 \\ \hline 255 \end{array}$

$255 : 16 = 14{,}0625$

$\triangle AIE \sim \triangle AO_2D$

$\frac{AO_2}{O_2D} = \frac{AI}{IE} = 1 \implies I = O_1$

$255 : 16 = 15{,}9375$

$\begin{array}{r} 32 \\ \times 15 \\ \hline 160 \\ 32 \\ \hline 480 \\ -289 \\ \hline 191 \end{array}$

$BH = HC = 8$

$\frac{BH}{BD} = \frac{BO_1}{BO_2} = \frac{R}{2R-r} = \frac{\frac{15}{2}+\frac{17}{2}}{\frac{17}{2}} = \frac{16}{17}$

$17R = 32R - 16r$

$16r = 15R$ $\quad 2r = \frac{15}{8}R$

$\frac{289}{4} = (2R-2r)\cdot 2R$

$2R - \frac{15}{8}R = \frac{1}{8}R$

$\frac{289}{4} = \frac{R^2}{4} \implies R = 17$

$r = \frac{15R}{16} = \frac{255}{16} = 14{,}0625$

$\begin{array}{r} 128 \\ \times 15 \\ \hline 640 \\ 128 \\ \hline 1920 \\ -289 \\ \hline 1631 \end{array}$ $\quad 1631 : 17 = 9\ldots$

$\boxed{\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R}}$ $\quad HD = 8 - \frac{15}{2} = \frac{1}{2}$

$\frac{AD}{ED} = \frac{r}{R-r} = \frac{\frac{15R}{16}}{-\frac{15R}{16}+R} = 15$

$AD = 15ED = \frac{15\sqrt{15}}{2}$

$ED^2 = HE^2 + HD^2 = 4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{2}$

$\frac{HO_1}{r} = \frac{BO_1}{BO_2} = \frac{R}{2R-r} = \frac{BH}{BD} = \frac{16}{17}$

$180 - 2\cdot(90-2\alpha)$

$\triangleright\ HO_1 = \frac{16r}{17}$ $\quad HE = R - HO_1 = \frac{16r}{15} - \frac{16r}{17} = \frac{32r}{255} = \frac{32\cdot\frac{255}{16}}{255} = 2$

$r^2 + r^2 - 2r^2\cos 2\alpha = 2r^2(1-\cos 2\alpha) = \left(\frac{15\sqrt{15}}{2}\right)^2 = \frac{15^3}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0$

$x^2 - 10x < 0$

$x(x-10) < 0$

$+ \quad 0 \quad - \quad 10 \quad +$

$x \in (0;10)$

$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10 > 10x - x^2 = t > 0$

$t + t^{\log_3 4} - 5^{\log_3 t} \geq 0$

$\log_3 4 = \frac{\log_5 4}{\log_5 3}$? $\log_3 t = \frac{\log_5 t}{\log_5 3}$

$5^{\frac{\log_5 t}{\log_5 3}}$

$b = a^{\log_a b}$ $\qquad t = 3^{\log_3 t} = t^{\log_3 3}$

$2t < t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t} > 5^{\log_5 t} = t$

$t = 5^{\log_5 t} \leq 5^{\log_3 t} \leq t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4}$

$5^{\log_5 t}$ $\qquad 5^{\log_3 t} - 5^{\log_5 t}$

$(t-1)$

1. $t \in (0;1)$ $\quad 5^{\log_3 t} < 5^{\log_5 t} = t$

$5^{\log_3 t}$ $\qquad 5^{\log_5 2t} = 5^{\log_5 2} \cdot 5^{\log_5 t}$

$\log_5 2t = \log_5 2 + \log_5 t$

$\log_3 t \geq \log_5 t$

$\log_5 2 < 1$

$5^{\log_3 t} = t^{\log_t 5^{\log_3 t}}$

$t^{\log_3 3}$ $\qquad t^{\log_3 4}$

$1 + \log_3 4 \geq \log_t 5^{\log_3 t}$

$\cancel{\log_t t}$ $\quad \log_t t^t + \log_t t^{\log_3 4}$

$\begin{array}{r} 24 \\ \times 24 \\ \hline 96 \\ 48 \\ \hline 576 \end{array}$

$\log_3 \frac{1}{3} = -1$

$\log_5 \frac{1}{3}$

$\log_5 \frac{1}{5} = -1$

$\frac{1}{3} > \frac{1}{5}$

$\log_3 \frac{1}{5}$

$\log_2 \frac{1}{2} = -1$ $\qquad \log_4 \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

$\log_2 t < \log_4 t$

$16 \cdot 6$

$\log_2 2 = 1$ $\qquad \log_4 2 = \frac{1}{2}$

$\sqrt{4} < \sqrt{6} < \sqrt{9}$

$4 < 2\sqrt{6} < 6$

$\begin{array}{r} 27 \\ \times 27 \\ \hline 189 \\ 54 \end{array}$ $\qquad \begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \end{array}$

$2{,}5 = \sqrt{6{,}25} > \sqrt{6} > \sqrt{5{,}76} = 2{,}4$

$\log_3\left(3 \cdot \frac{4}{3}\right) = 1 + \log_3 \frac{4}{3}$

$t + t \cdot t^{\log_3 \frac{4}{3}} \geq 5^{\log_3 t}$

$t(1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}}) \geq 5^{\log_3 t}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

2) $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$

$9b^2+30=-13b\sqrt{10-b^2}$

$\geq 0 \quad b<0$

(2): $(x^2-\overset{2\cdot x\cdot 6}{12x}+\overset{6^2}{36})+(36y^2-\overset{2\cdot 6y\cdot 3}{36y}+\overset{3^2}{9})-45=45$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

(1): $\boxed{x\geq 12y}$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

$x^2-22xy+144y^2+12y+x-6=0$

▷ под $\sqrt{\ }$: $x(2y-1)-6(2y-1)=(x-6)(2y-1)$

$\begin{cases} x-12y=\sqrt{\underbrace{(x-6)}_{a}\underbrace{(2y-1)}_{b}} \\ \underbrace{(x-6)^2}_{a^2}+9\underbrace{(2y-1)^2}_{b^2}=90 \end{cases}$

$x-6=a$

$2y-1=b$

$12y=6$

$6(b+1)=6$

$b=0$

$x=a+6$

$y=\frac{b+1}{2}$

$a+6-6(b+1)=a-6b=\sqrt{ab}$ $\quad a\geq 6b$

$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=\cancel{ab}\ 0 \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$ $\quad 4a^2+36b^2=360$

$-11ab+27b^2=-90$ $\quad a=\pm 3\sqrt{10-b^2}$ $\quad b\leq\sqrt{10}$

$27b^2-13ab+90=0$

▷ $90-9b^2-13\cdot 3b\sqrt{10-b^2}+36b^2=0$

$27b^2-39b\sqrt{10-b^2}+90=0$

$9b^2-13b\sqrt{10-b^2}+30=0$

$9b^2+30=13b\sqrt{10-b^2}$

$81b^4+540b^2+900=169b^2(10-b^2)$

$250b^4-1150b^2+900=0$

$10b^4-46b^2+36=0$ $\quad \frac{72}{20}=\frac{36}{10}$

$b^2=\frac{46\pm 26}{20}=\left[\begin{array}{l}3{,}6\\1\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} b=\pm\frac{6}{\sqrt{10}} \\ b=\pm\sqrt{10} \end{array}\right.$ $\quad a=\pm 3\sqrt{6{,}4}=\pm\frac{24}{\sqrt{10}}$; $\quad a=0$

$y=\frac{\pm\frac{6}{\sqrt{10}}+1}{2}=0{,}5\pm\frac{3}{\sqrt{10}}$, $x=6\pm\frac{24}{\sqrt{10}}$

$y=\frac{\pm\sqrt{10}+1}{2}=0{,}5\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$, $x=6$

$\begin{array}{r} 23 \\ \times 23 \\ \hline 69 \\ 46 \\ \hline 529 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 18 \\ \times 20 \\ \hline 360 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 529 \\ -360 \\ \hline 169 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 13 \\ \times 13 \\ \hline 39 \\ 13 \\ \hline 169 \end{array}$

$\begin{array}{r} 46 \\ \times 46 \\ \hline 276 \\ 184 \\ \hline 2116 \\ -1440 \\ \hline 676 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 36 \\ \times 40 \\ \hline 1440 \end{array}$ $\quad 4\cdot 529 \quad 4\cdot 169$

$\begin{array}{r} 1690 \\ -540 \\ \hline 1150 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 26 \\ \times 26 \\ \hline 156 \\ 52 \\ \hline 676 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ $\qquad tg\alpha - ?$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\beta-\sin^2\beta)+2\sin\alpha\sin\beta(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha$

$\sin 2(\alpha+\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = 2(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)$

$\sin 2(\alpha+2\beta) = 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) = 2(\sin\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos\alpha)(\cos\alpha\cos 2\beta-\sin\alpha\sin 2\beta)$

$\alpha+\beta=\gamma$

$\sin 2(\gamma+\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(\gamma+\beta)\cos(\gamma+\beta)+\sin 2\alpha$

$\sin 2\gamma = 2\sin\gamma\cos\gamma$

$2(\sin\gamma\cos^2\beta\cos\gamma - \sin^2\gamma\sin\beta\cos\beta + \sin\beta\cos^2\gamma\cos\beta - \sin^2\beta\sin\gamma\cos\gamma)$

$2(\sin\gamma\cos\gamma\cos 2\beta + \sin\beta\cos\beta\cos 2\gamma) = \sin 2\gamma\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\gamma = \sin(2\gamma+2\beta)$

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$

▷ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$ $\quad \Rightarrow 2\cos 2\beta = -\frac{2}{5} / -\frac{1}{\sqrt5} = \frac{2}{\sqrt5}$

▷ $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin 2\beta = 1-\frac{1}{5} = \frac{4}{5} = -\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha - \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \quad |\cdot\sqrt5$

▷ $\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) = +2\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha = -1 \quad |:\cos^2\alpha$

$+2tg^2\alpha+2tg\alpha-2 = -\frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\qquad \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+tg^2\alpha$ $\qquad 3tg^2\alpha+2tg\alpha-1=0$

$-1-tg^2\alpha$ $\qquad D=4+12=4^2$

$\sin 4\beta = 2\sin 2\beta\cos 2\beta$ $\qquad tg\alpha = \frac{-2\pm4}{3}$ $\left[\begin{array}{l}\frac{2}{3}\\ -2\end{array}\right.$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

$\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$(tg\alpha-3)(tg\alpha+1)=0$

$\cos 2\beta = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt5}$ $\qquad -2\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} = -\frac{4}{5}$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 3 \\ tg\alpha = -1\end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)