МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \quad \begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$\exists\ \alpha=x-2;\ \beta=y-1$

тогда получим $\begin{cases} \alpha-2\beta=\sqrt{\alpha\beta} & (1) \\ \alpha^2+9\beta^2=25 & (2) \end{cases}$ $(1):\ \Rightarrow \alpha^2+4\beta^2-4\alpha\beta=\alpha\beta$

$\alpha^2+4\beta^2-5\alpha\beta=0\ (3)$

$(2)-(3):\ \alpha^2+9\beta^2-\alpha^2-4\beta^2+5\alpha\beta=25;\quad \beta^2+\alpha\beta=5;\ \beta(\alpha+\beta)=5$

$\Rightarrow \alpha=\frac{5}{\beta}-\beta \Rightarrow \alpha^2=\frac{25}{\beta^2}+\beta^2-2\cdot\frac{5}{\cancel{\beta}}\cdot\cancel{\beta}=$

$=\frac{25}{\beta^2}+\beta^2-10$ — подставим это во (2):

$$\frac{25}{\beta^2}+10\beta^2-10=25$$

$\exists\ \gamma=\beta^2$; тогда $\frac{25}{\gamma}+10\gamma-35=0$; $\cancel{10\gamma^2}$

$$2\gamma^2-7\gamma+5=0$$

$$\cancel{(2\gamma)}\ (2\gamma-5)(\gamma-1)=0$$

$\left[\begin{array}{l} \gamma=\frac{5}{2} \\ \gamma=1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \beta^2=\frac{5}{2} \\ \beta^2=1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \beta=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \\ \beta=\pm 1 \end{array}\right.$ ~~для 1-ой: α^2?~~

для $\beta=\sqrt{\frac{5}{2}}$; $\alpha=\frac{5}{\sqrt{\frac{5}{2}}}-\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{5}\left(\sqrt{2}-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

проверим в 1-ом ур-ии: $\alpha-2\beta=\sqrt{\frac{5}{2}}-2\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}=-\sqrt{\frac{5}{2}}<0$, а $\sqrt{\alpha\beta}\geq 0$ не подх.

для $\beta=-\sqrt{\frac{5}{2}}$; $\alpha=\frac{5}{-\sqrt{\frac{5}{2}}}+\sqrt{\frac{5}{2}}=-\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}+\sqrt{5}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=-\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\alpha\beta=\frac{5}{2}>0$ подх.; $\alpha-2\beta=-\sqrt{\frac{5}{2}}+2\cdot\sqrt{\frac{5}{2}}=\sqrt{\frac{5}{2}}>0$ подх.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) тогда $\begin{cases} x-2 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y = 1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$

для $\beta=-1$; $\alpha = \frac{5}{-1}+1 = -4$; $\alpha\beta = -4\cdot(-1) > 0$

$\alpha - 2\beta = -4 - 2(-1) = -4+2 = -2$; т.е. $\sqrt{\alpha\beta} = -2$; $\sqrt{\alpha\beta} \geq 0$

не подх.

для $\beta = 1$; $\alpha = \frac{5}{1} - 1 = 4$; $\alpha\beta = 4 > 0$

$\alpha - 2\beta = 4 - 2 = 2 > 0$ подх.

тогда $\begin{cases} x-2 = 4 \\ y-1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$

Ответ: $\left\{ (6;2); \left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right) \right\}$.

№3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

У нас присутствует $\log_{12}(x^2+18x)$. О.О.Н.: $x^2+18x \geq 0$

$x(18+x) \geq 0$

тогда $|x^2+18x| = x^2+18x$ ~~fm~~, т.к. по О.О.Н. $x^2+18x \geq 0$ -18 0 x

$\exists\ z = x^2+18x$, $z \geq 0$

тогда ур-е $5^{\log_{12} z} + z \geq z^{\log_{12}13}$

т.к. О.О. не поменяется, то $\log_{12} z = \frac{\log_5 z}{\log_5 12}$

тогда $5^{\log_{12} z} = 5^{\frac{\log_5 z}{\log_5 12}} = \left(5^{\log_5 z}\right)^{\frac{1}{\log_5 12}} = z^{\frac{1}{\log_5 12}} =$

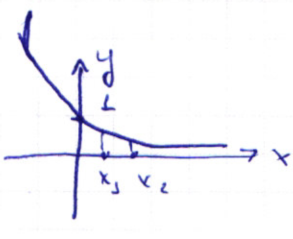
$= z^{\log_{12} 5}$

тогда нер-во ~~ур-е~~ будет: $z^{\log_{12}5} + z^{\log_{12}12} \geq z^{\log_{12}13}$

рассм. 3 случ.

1) $0 \leq z < 1$; ~~ф-~~ $y = z^x$ выглядит так:

~~т.е. для~~ т.е. $y = z^x$ строго убывает ~~возраст~~.



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ф-ия на О.О. $\Rightarrow$ для $\forall x_1$ и x_2 : $x_1 < x_2$ $\quad y(x_1) > y(x_2)$

т.к. $y = \log_{12} x$ строго возраст. ф-ия, то $\log_{12} 5 < \log_{12} 13 \Rightarrow$

$\Rightarrow z^{\log_{12} 5} > \log_{12} 13$ т.е. нач подх. $z \in [0;1]$

2) $z = 1$ тогда $1 + 1 \geq 1$ подх. $z = 1$

3) $z > 1$

т.к. $y = z^x$ строго возрастает.

Найдём z, при кот. впервые сравняются части

$z^{\log_{12} 5} + z^{\log_{12} 12} \geq z^{\log_{12} 13}$

при $z = 12^2$; $\left(12^{\log_{12} 5}\right)^2 + \left(12^{\log_{12} 12}\right)^2 = 5^2 + 12^2 = 169$

$\left(12^{\log_{12} 13}\right)^2 = 13^2 = 169$

~~то~~ при $z < 12^2$ $\quad z^{\log_{12} 5} + z^{\log_{12} 12} \geq z^{\log_{12} 13}$

(ф-ия монотонна; проверим это при $z = 12$; $5 + 12 = 17 > 13$)

Тогда $0 \leq z \leq 12^2$; $0 \leq x^2 + 18 \leq 144$

$\begin{cases} x^2 + 18x \geq 0 & (1) \\ x^2 + 18x \leq 144 & (2) \end{cases}$

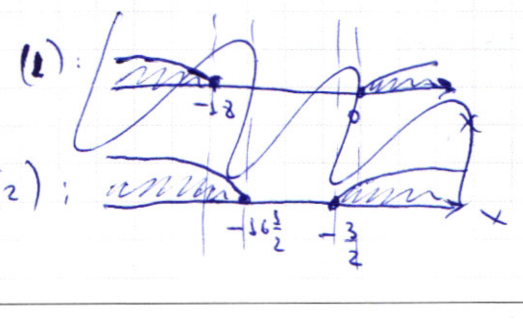
(1): $x \in (-\infty; -18] \cup [0; +\infty)$

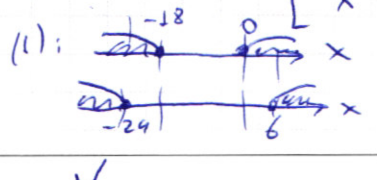
(2): $x^2 + 18x - 144 = 0$

$D = 18^2 + 4 \cdot 144 = 4 \cdot 81 + 4 \cdot 144 = 4(81 + 144) =$

$= 4 \cdot 4 \cdot 225 \Rightarrow$ $\quad x = \frac{-18 \pm 2 \cdot 15}{2} = \left[\begin{array}{l} \cancel{x = -\frac{33}{2}} \\ \cancel{x = -\frac{3}{2}} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \cancel{x = -16\frac{1}{2}} \\ \cancel{x = -1\frac{1}{2}} \end{array}\right.$

$= \frac{-18 \pm 30}{2}$ $\quad \left[\begin{array}{l} x = -24 \\ x = 6 \end{array}\right.$





тогда для (2): $x \in (-\infty; -24] \cup [6; +\infty)$

Ответ: $(-\infty; -24] \cup [6; +\infty)$

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\exists\ S = 2\alpha+2\beta \Rightarrow 2\alpha = S-2\beta$ и $2\alpha+4\beta = S+2\beta$; $\cos S = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

тогда $\begin{cases} \sin S = -\frac{1}{\sqrt5} \ (1) \\ \sin(S+2\beta)+\sin(S-2\beta) = -\frac{4}{5} \ (2) \end{cases}$

(2): $\sin S\cdot\cos2\beta + \sin2\beta\cdot\cos S + \sin S\cdot\cos2\beta - \sin2\beta\cdot\cos S = -\frac{4}{5}$

$2\sin S\cos2\beta = -\frac{4}{5}$; $\sin S\cdot\cos2\beta = -\frac{2}{5}$

(1) и (2): $\cancel{-}\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta = \cancel{-}\frac{2}{5}$; $\cos2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\Rightarrow \sin2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

~~тогда $\sin(2\alpha+4\beta) = \sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\cdot\sin2\beta$~~

$\sin(S+2\beta) = \sin S\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos S$

тогда $\sin2\alpha = -\frac{4}{5} - (\sin S\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos S)$

~~1 вар.: $\begin{cases}\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5} \\ \cos S=\frac{2}{\sqrt5}\end{cases}$ тогда $\sin2\alpha = -\frac{4}{5} - \left(-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}\right) = -\frac{4}{5}$~~

$\cos2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{\cos2\alpha+1}{2}$; $\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{2}{\cos2\alpha+1}$

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha = 1 \Rightarrow tg^2\alpha+1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $tg^2\alpha = \frac{2}{\cos2\alpha-1} - 1$

$\cos2\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}$; ~~$tg^2\alpha$~~

1) возьмём $\sin2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$ и $\cos S = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha = -\frac{4}{5}+0 = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\alpha = \pm\sqrt{1-\frac{16}{25}} = \pm\frac{3}{5}$

тогда 1): $tg^2\alpha = \frac{2}{\frac{3}{5}-1} - 1 = -6$ не подх.

2) $tg^2\alpha = \frac{2}{-\frac{3}{5}-1} - 1 < 0$ не подх.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) возьмём $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\cos \delta - \frac{2}{\sqrt{5}}$

~~cos~~ $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} - \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0$

$\cos 2\alpha = \pm 1$

1сл): $tg^2\alpha = \frac{2}{1-1} - 1$ не подх

$tg^2\alpha = \frac{2}{-1-1} - 1 = -2$ ~~подх~~ не подх.

3) ~~ver sin~~ возьмём $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\cos \delta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

~~tg2~~ $\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} - \left(-\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ — аналогично пред. пункту

4) возьмём $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $\cos \delta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

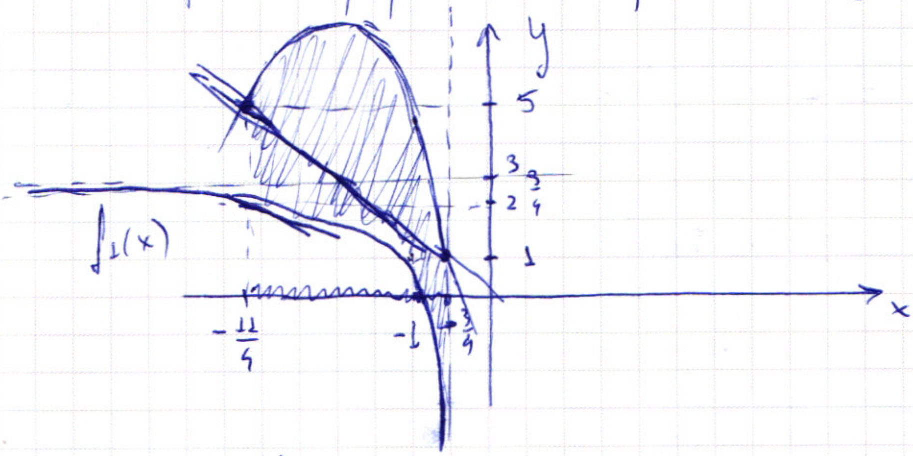
аналогично п. 1.

№6

$\exists\ f_1(x) = \frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$\exists\ f_2(x) = -(8x^2+30x-17)$ — парабола с ветвями вниз

Построим графики этих ф-ий по ключ. точкам:



$f_1\left(-\frac{11}{4}\right) = 3 + \frac{2}{-11+3} = 2\frac{3}{4}$

$f_2\left(-\frac{3}{4}\right) = -\cancel{8}\cdot\frac{9}{\cancel{16}_{2}} + \cancel{30}^{15}\cdot\frac{3}{\cancel{4}_{2}} - 17 = 1$

$f_2\left(-\frac{11}{4}\right) = -\cancel{8}\cdot\frac{121}{\cancel{16}_{2}} + \cancel{30}^{15}\cdot\frac{11}{\cancel{4}_{2}} - 17 = 5$

теперь заметим, что $y=ax+b$ — график лин. ф-ии, кот. лежит в заштрихов. обл.

Посмотрим на прямую, проход. через точки $\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$ и $\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$

$\begin{cases} 5 = -\frac{11}{4}a + b \\ 1 = -\frac{3}{4}a + b \end{cases}$ $\Rightarrow -4 = 2a;\ a = -2 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

посмотрим является ли эта прямая касат. к гиперболе.

коэф. накл. $k = f_1'(x) = \frac{-8}{(4x+3)^2}$

чтобы ~~это был~~ прямая $y = -2x - \frac{1}{2}$ была касат. $k = -2 \Rightarrow (4x+3)^2 = 4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+3=-2 \\ 4x+3=2 \end{array}\right.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\left[\begin{array}{l} x=-\frac{5}{4} \\ x=-\frac{1}{4} \end{array}\right.$ – не подх. $\left(x\in\left[-\frac{11}{2};-\frac{3}{4}\right]\right)$

при ~~$x=$~~ $-\frac{5}{4}$ $f_1'\left(-\frac{5}{4}\right) = 3+\frac{2}{-5+3} = 2$

тогда $2 = -\frac{5}{4}\cdot(-2)+b$; $2 = \frac{5}{2}+b \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$

т. е. наша прямая – касат. к графику $f_1(x)$. Значит другие прямые не подх. (т. к. они лежат ниже этой и в любом случ. пересек. графика)

Ответ: $\left(-2; -\frac{1}{2}\right)$.

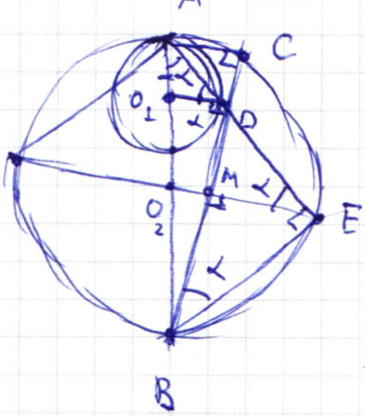
№4

Д.п.: соединим (·)A и (·)C

т.к. AB – диаметр, то $\angle ACB = 90^\circ$

Соединим B и E ; AB – диаметр $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle AEB = 90^\circ$.



Пусть O_1 – центр окр-сти ω

~~ΔABE~~ Пусть $\angle BAE = \alpha$

ΔABE: $\angle ABE = 90^\circ - \alpha$

~~т.к.~~ Д.п.: соединим O_2 и D. ΔAO_2D – р/б $\Rightarrow \angle DAO_2 = \angle ADO_2 = \alpha \Rightarrow \angle AO_2D = 2\alpha$

ΔBO_2D: $\angle O_2BD = 90^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle DBE = 90^\circ - \alpha - (90^\circ - 2\alpha) = \alpha \Rightarrow \angle BDE = 90^\circ - \alpha \Rightarrow$ в ΔDME $\angle DEM = 90^\circ - (90^\circ - \alpha) = \alpha$

$\angle ABE$ и $\angle AFE$ – вписанные и опир. на одну дугу =>

$\Rightarrow \angle AFE = \angle ABE = 90° - \alpha$

ΔAFE: $\angle AFE + \angle AEF = 90° - \alpha + \alpha = 90° \Rightarrow EF$ – тоже диаметр.

$\left.\begin{array}{l} BC \perp FE \\ EF \text{ – диаметр} \end{array}\right| \Rightarrow CM = BM$; $8 + DM = 17 - DM$

$DM = \frac{9}{2}$

$BM = 17 - \frac{9}{2} = \frac{25}{2}$

ΔBDE из подобия: $\frac{DM}{ME} = \frac{ME}{BM} \Rightarrow ME = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{25}{2}} = \frac{15}{2}$

Так $BE = \frac{5}{2}\sqrt{\underset{25}{5^2} + \underset{9}{3^2}} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt{34}$

$\sin\alpha = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{5}{2}\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

тогда $\cos \angle AFE = \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$

D≢

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$(2\alpha+2\beta)+2\beta$

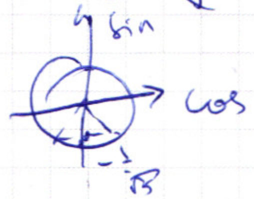
$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$

$x = 2\alpha$

$y = 2\beta$

$$\begin{cases} \sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(\underbrace{x+2y}_{(x+y)+y}) + \sin x = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$\sin(x+y)\cdot\cos y + \cos(x+y)\cdot\sin y$



$|\cos(x+y)| = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt5}$

1) $\cos(x+y) = \frac{2}{\sqrt5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos y + \frac{2}{\sqrt5}\cdot\sin y + \sin x = -\frac{4}{5}$

$x = x+y-y = s-y$

$\exists\ x+y=s$

$\sin s = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(s+y)+\sin(s-y) = -\frac{4}{5}$

$\sin s\cdot\cos y + \sin y\cdot\cos s + \sin s\cdot\cos y - \sin y\cdot\cos s = -\frac{4}{5}$

$2\sin s\cos y = -\frac{4}{5}$

$\sin s\cdot\cos y = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos y = -\frac{2}{5}$; $\cos y = \frac{2}{\sqrt5}$

$y-1=1;\ y=2$

$x-2=4;\ x=6$

$\frac{6-4}{2} = \sqrt{\frac{6\cdot2-6-2\cdot2+2}{2}}$

x^2+9y^2 $(x^2-4x+4)+9(y^2-2y+1)-13=12$

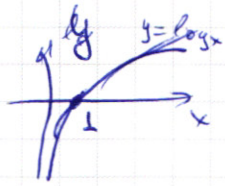
$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$xy-x-2y+2\geq0$

$x(y-1)-2(y-1) = (y-1)(x-2)$

$\begin{cases} y-1\geq0 \\ x-2\geq0 \end{cases}$ или $\begin{cases} y-1\leq0 \\ x-2\leq0 \end{cases}$

$\log_a b \quad ; \quad a>0 ; a \neq 1 \quad ; b>0$



$x^2+18x>0$

$z=x^2+18x \quad \overset{0}{\wedge}$

$5^{\log_{12} z} + z \geq z^{\log_{12} 13}$ $\overset{0}{\wedge}$

z

$x \quad z^{\log_{12} 13} - z$

$5^{\log_{12} z}$

$z^{\log_{12} 13} = A \iff \cancel{z}\, x = \log_z A$

$\log_{12} 13 = \log_z z^{\log_{12} 13}$

$\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ $\qquad \log_3 9 = 2 = \dfrac{\log_{27} 9}{\log_{27} 3} = \dfrac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} =$

$\log_{12} 13 = \dfrac{\log_z 13}{\log_z 12}$ $\qquad \left(z^{\log_z 13}\right)^{\frac{1}{\log_z 12}} = 13^{\frac{1}{\log_z 12}}$

$5^{\log_{12} z} = \dfrac{\log_5 z}{\log_5 12}$

$\left(5^{\log_5 z}\right)^{\frac{1}{\log_5 12}} = z^{\frac{1}{\log_5 12}}$

$\log_b a = x \iff b^x = a$ $\qquad z^{\frac{1}{\log_5 12}} + z \geq z^{\log_{12} 13}$

$b = a^{\frac{1}{x}}$

$\log_a b = \frac{1}{x} \cdot \log_a a$ $\qquad z^{\frac{1}{\log_5 12}} + z$

$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$

$z^{\log_{12} 5} + z^{\log_{12} 12} \geq z^{\log_{12} 13}$

$z^{\log_{12} 5} + z^{\log_{12} 12} - z^{\log_{12} 13} \geq 0$

$z^{\log_{12} 5}\left(1 + z^{\log_{12} 12 - \log_{12} 5} - z^{\log_{12} 13 - \log_{12} 5}\right) \geq 0$

$z^{\log_{12} 5}\left(1 + z^{\log_{12} \frac{12}{5}} - z^{\log_{12} \frac{13}{5}}\right) \geq 0$

$f\left(-\frac{3}{4}\right) = -8 \cdot \frac{9}{16} + 30 \cdot \frac{3}{4} - 17 = -17 + \frac{45}{2} - \frac{9}{2} = -17 + \frac{36}{2} = \frac{-34+36}{2} = 1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f_2 = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$f_2(-1) = 3 + \frac{2}{\underbrace{-4+3}_{-1}} = -1$

$\begin{cases} a\cdot\left(-\frac{11}{4}\right) + b = 5 \\ a\left(-\frac{3}{4}\right) + b = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} -11a + 4b = 20 \\ -3a + 4b = 4 \end{cases}$ $8a = -16$, $a = -2$

$22 + 4b = 20$; $b = -\frac{1}{2}$

$y = -2x - \frac{1}{2}$

$f_2' = \frac{2'\cdot(4x+3) - (4x+3)'\cdot 2}{(4x+3)^2} = \frac{-8}{(4x+3)^2}$

$-\frac{8}{(4x+3)^2} = -2$; $4 = (4x+3)^2 \Rightarrow \begin{cases} 4x+3 = -2 \\ 4x+3 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 4x = -5 \\ 4x = -1 \end{cases}$

$\begin{cases} x = -\frac{5}{4} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases}$

$y = -2x + b$; $f_2\left(-\frac{5}{4}\right) = 3 + \frac{2}{\underbrace{3 + 4\left(-\frac{5}{4}\right)}_{-2}} = 2$

$2 = 2\cdot\frac{5}{4} + b$; $b = -\frac{1}{2}$

$5^{\log_{12} z} + z \geq z^{\log_{12} 13}$ $\quad \log_{12} z = \frac{\log_5 z}{\log_5 12}$

$z^{\log_{12} 5}$ $\quad 5^{\log_5 z}$

$z\left(z^{\log_{12} 13 - 1} - 1\right) = z\left(z^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1\right)$

$5^{\log}$

$z^{\log_{12} 5} + z^{\log_{12} 12} \geq z^{\log_{12} 13}$

$z^t \uparrow$; 1) $z > 1$

$25 + 144 = 169 =$

$z \in [0; 144]$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

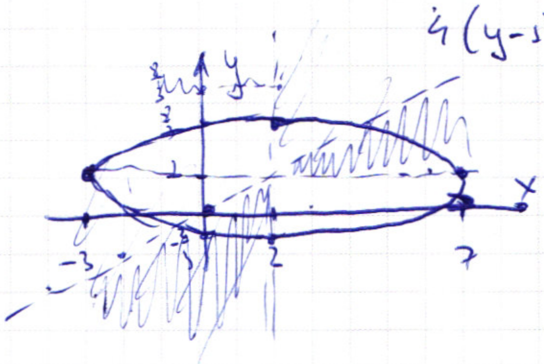
(Нумеровать только чистовики)

$x-2y>0$ $\quad x>2y$ $\quad$ кр. случ.: $x=2y$ $\qquad y<\frac{x}{2}$

$$(2y-2)^2+9(y-1)^2=25$$

$$4(y-1)^2+9(y-1)^2=25$$

$$13(y-1)^2=25$$



$$\cos 2\beta = 2\cos^2\beta - 1$$

$$\cos^2\beta = \frac{\cos 2\beta + 1}{2}$$

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$tg^2\beta + 1 = \frac{1}{\cos^2\beta} = \frac{2}{\cos 2\beta + 1}$$

$$tg^2\beta = \frac{2}{\cos 2\beta + 1} - 1$$

$\alpha = x-2$; $\quad \beta = y-1$

$$\sqrt{\alpha\beta} = \alpha - 2\beta$$

$$x-2-2(y-1) = x-2-2y+2$$

$$\begin{cases} \sqrt{\alpha\beta} = \alpha - 2\beta \\ \alpha^2 + 9\beta^2 = 25 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha\beta = \alpha^2 + 4\beta^2 - 4\alpha\beta \\ \alpha^2 + 9\beta^2 = 25 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha^2 + 4\beta^2 - 5\alpha\beta = 0 \\ \alpha^2 + 9\beta^2 = 25 \end{cases}$$

$$5\beta^2 + 5\alpha\beta = 25$$

$$\beta(\beta+\alpha) = 5$$

$$\alpha = \frac{5}{\beta} - \beta$$

$$\alpha^2 = \frac{25}{\beta^2} + \beta^2 - 2\cdot\frac{5}{\beta}\cdot\beta = \frac{25}{\beta^2} + \beta^2 - 10$$

$$\frac{25}{\beta^2} + 10\beta^2 - 35 = 0$$

$\gamma = \beta^2$; $\quad \frac{25}{\gamma} + 10\gamma - 35 = 0$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = 1$$

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{tg\,\alpha}$$

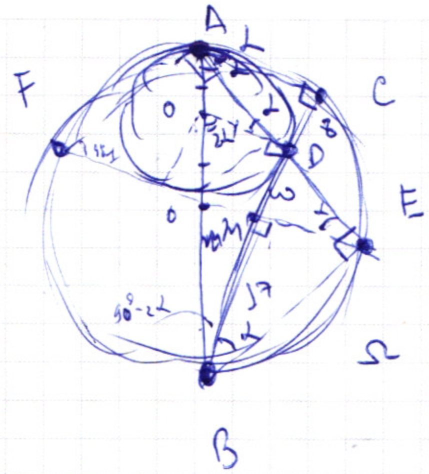
☐ черновик ☐ чистовик

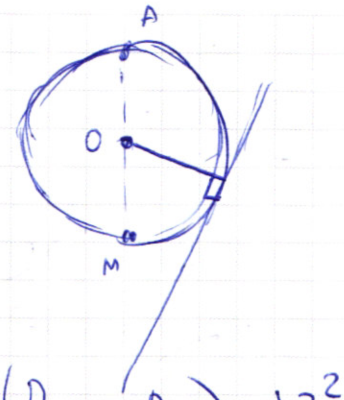
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

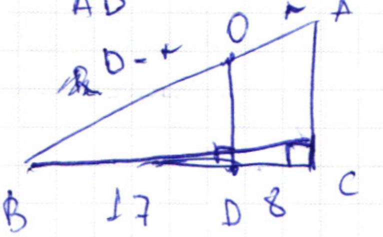
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$D_{AB}(D_{AB}-D_{\omega})=17^2$

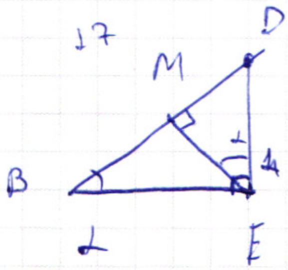
$\frac{DE}{8}=\frac{17}{AD}$; $AD\cdot DE=17\cdot 8$



$\frac{D}{D-r}=\frac{17+8}{17}$

$1-\frac{r}{D}=\frac{17}{25}$

$\frac{r}{D}=\frac{8}{25}$

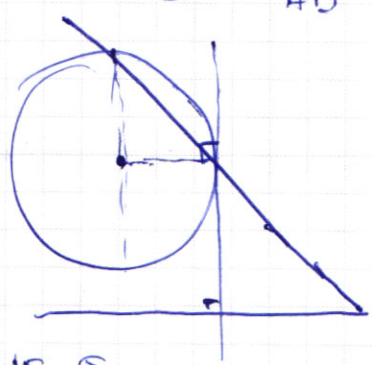


α: BE, CD, DM, EM, DE

90°: AB, AD, BD, DE, BE

$\frac{BE}{D}=\frac{CD}{AD}=\frac{DM}{DE}=\frac{EM}{BE}=\frac{DE}{BD}$; $\frac{BE}{D}=\frac{8}{AD}=\frac{DE}{17}$

$\angle ABE=AFE=90°-\alpha$



$DM+8=BM$

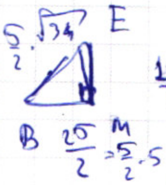
$DM+BM=17$; $DM=17-BM$

$17-BM+8=BM$

$25=2BM$; $BM=\frac{25}{2}$

$DM=17-\frac{25}{2}=\frac{9}{2}$

$EM^2=BM\cdot DM=\frac{9}{2}\cdot\frac{25}{2}\Rightarrow EM=\frac{3\cdot 5}{2}=\frac{15}{2}$



$\frac{15}{2}=\frac{5}{2}\cdot 3$

$\frac{25}{2}=\frac{5}{2}\cdot 5$

$\frac{D}{D-r}$

$\frac{D}{2D}$

$\frac{DM}{EM}=\frac{EM}{BM}$

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $f(p)=[\frac{p}{4}]$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times 8 \\ \hline 136 \end{array}$

$\cancel{f(xy)}$ $f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

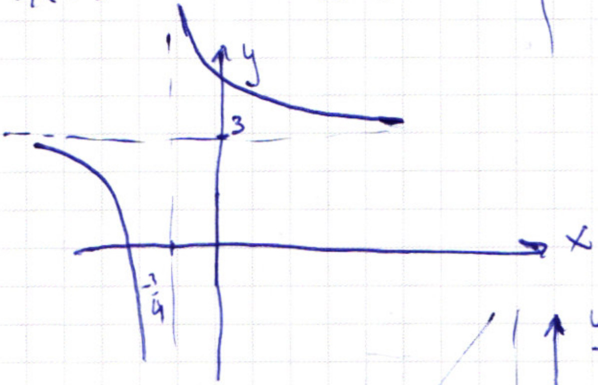
$y_v=-8\cdot\frac{15^2}{8^2}+30\cdot\frac{15}{8}-17=$

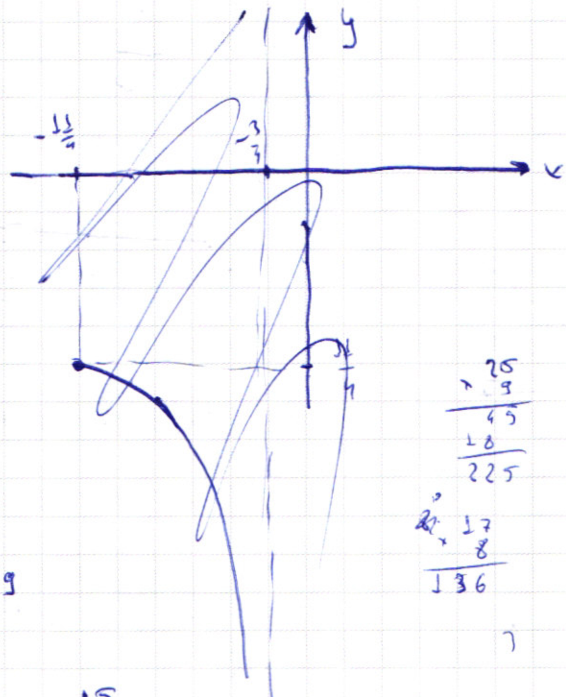
$=-17+\frac{15^2}{8}(2-1)=$

$=\frac{225-136}{8}=\frac{89}{8}=$

$=11\frac{1}{8}$

$y=\frac{3(4x+3)+2}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3}$





$f_1\left(-\frac{11}{4}\right)=3+\frac{2}{\underbrace{-11+3}_{-8}}=3-\frac{1}{4}=\frac{11}{4}=$

$=2\frac{3}{4}$

$8x^2+30x+17=0$

$\begin{array}{r} 25 \\ \times 9 \\ \hline 45 \\ 18 \\ \hline 225 \end{array}$

$D=\overset{4\cdot 25\cdot 9}{900}-4\cdot 8\cdot 17=$

$=4(25\cdot 9-8\cdot 17)=4\cdot 89$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times 8 \\ \hline 136 \end{array}$ $\begin{array}{r} 225 \\ -136 \\ \hline 89 \end{array}$

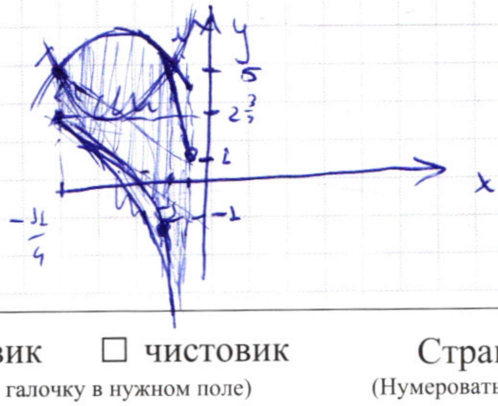
$x=\frac{-30\pm 2\sqrt{89}}{16}=-\frac{15}{8}\pm$

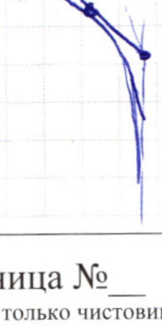
$f_2\left(-\frac{11}{4}\right)=-\cancel{8}\cdot\frac{121}{\cancel{16}_{2}}+30\cdot\frac{11}{\cancel{4}_{2}}-17=-17+\frac{165-121}{2}=-17+\frac{44}{2}=$

$=-17+22=5$

$f_2(-1)=-8+30-17=5$

$x_v=\frac{-1-\frac{11}{4}}{2}=-\frac{15}{8}$





$\log_2 4=\frac{\log_4 4}{\log_4 2}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$