

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω , а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D . Луч AD повторно пересекает Ω в точке E . Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC , повторно пересекает Ω в точке F . Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF , если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.
5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leq x \leq 27$, $3 \leq y \leq 27$ и $f(x/y) < 0$.
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x - 3}{2x - 2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Данна пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ . Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin(2\alpha) = 2 \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = \frac{-2}{\sqrt{17}} \cos 2\beta = \frac{-8}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{-4}{\sqrt{17}}$$

$$1) \cos(2\alpha + 2\beta) = \sqrt{1 - \left(\frac{-1}{\sqrt{17}}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$0 = \cos(2\alpha + 2\beta) - \cos 2\beta = -2 \sin \alpha \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin \alpha = 0 \\ \sin(2\alpha + 2\beta) = 0 \end{cases} \stackrel{(\exists)}{\Rightarrow} \begin{cases} \tan \alpha = 0 \\ \sin \alpha \cdot \frac{n}{\sqrt{17}} + \cos \alpha \cdot \sin 2\beta = 0 \end{cases} \stackrel{(\exists)}{\Rightarrow} \begin{cases} \tan \alpha = 0 \\ \tan \alpha = \frac{-n\sqrt{17}}{4} \sin 2\beta \end{cases} \stackrel{(\exists)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tan \alpha = 0 \\ \tan \alpha = \pm \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$2) \cos(2\alpha + 2\beta) = \frac{-4}{\sqrt{17}}$$

$$\cos(2\alpha + 2\beta) + \cos 2\beta = 2 \cos(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos 2\beta = 0 \\ \cos(2\alpha + 2\beta) = 0 \end{cases}$$

при $\cos 2\beta = 0$ $\tan 2\beta$ не определен $\Rightarrow \cos(2\alpha + 2\beta) = 0 \Rightarrow \cos 2\beta \cdot \frac{n}{\sqrt{17}} = \sin \alpha \cdot \sin 2\beta \Rightarrow \tan 2\beta = \frac{n}{\tan \alpha}$

$\Rightarrow \tan 2\beta = \frac{n}{\sqrt{17}} \sin 2\beta = \pm 4$. Это уравнение может иметь 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41, 43, 45, 47, 49, 51, 53, 55, 57, 59, 61, 63, 65, 67, 69, 71, 73, 75, 77, 79, 81, 83, 85, 87, 89, 91, 93, 95, 97, 99, 101, 103, 105, 107, 109, 111, 113, 115, 117, 119, 121, 123, 125, 127, 129, 131, 133, 135, 137, 139, 141, 143, 145, 147, 149, 151, 153, 155, 157, 159, 161, 163, 165, 167, 169, 171, 173, 175, 177, 179, 181, 183, 185, 187, 189, 191, 193, 195, 197, 199, 201, 203, 205, 207, 209, 211, 213, 215, 217, 219, 221, 223, 225, 227, 229, 231, 233, 235, 237, 239, 241, 243, 245, 247, 249, 251, 253, 255, 257, 259, 261, 263, 265, 267, 269, 271, 273, 275, 277, 279, 281, 283, 285, 287, 289, 291, 293, 295, 297, 299, 301, 303, 305, 307, 309, 311, 313, 315, 317, 319, 321, 323, 325, 327, 329, 331, 333, 335, 337, 339, 341, 343, 345, 347, 349, 351, 353, 355, 357, 359, 361, 363, 365, 367, 369, 371, 373, 375, 377, 379, 381, 383, 385, 387, 389, 391, 393, 395, 397, 399, 401, 403, 405, 407, 409, 411, 413, 415, 417, 419, 421, 423, 425, 427, 429, 431, 433, 435, 437, 439, 441, 443, 445, 447, 449, 451, 453, 455, 457, 459, 461, 463, 465, 467, 469, 471, 473, 475, 477, 479, 481, 483, 485, 487, 489, 491, 493, 495, 497, 499, 501, 503, 505, 507, 509, 511, 513, 515, 517, 519, 521, 523, 525, 527, 529, 531, 533, 535, 537, 539, 541, 543, 545, 547, 549, 551, 553, 555, 557, 559, 561, 563, 565, 567, 569, 571, 573, 575, 577, 579, 581, 583, 585, 587, 589, 591, 593, 595, 597, 599, 601, 603, 605, 607, 609, 611, 613, 615, 617, 619, 621, 623, 625, 627, 629, 631, 633, 635, 637, 639, 641, 643, 645, 647, 649, 651, 653, 655, 657, 659, 661, 663, 665, 667, 669, 671, 673, 675, 677, 679, 681, 683, 685, 687, 689, 691, 693, 695, 697, 699, 701, 703, 705, 707, 709, 711, 713, 715, 717, 719, 721, 723, 725, 727, 729, 731, 733, 735, 737, 739, 741, 743, 745, 747, 749, 751, 753, 755, 757, 759, 761, 763, 765, 767, 769, 771, 773, 775, 777, 779, 781, 783, 785, 787, 789, 791, 793, 795, 797, 799, 801, 803, 805, 807, 809, 811, 813, 815, 817, 819, 821, 823, 825, 827, 829, 831, 833, 835, 837, 839, 841, 843, 845, 847, 849, 851, 853, 855, 857, 859, 861, 863, 865, 867, 869, 871, 873, 875, 877, 879, 881, 883, 885, 887, 889, 891, 893, 895, 897, 899, 901, 903, 905, 907, 909, 911, 913, 915, 917, 919, 921, 923, 925, 927, 929, 931, 933, 935, 937, 939, 941, 943, 945, 947, 949, 951, 953, 955, 957, 959, 961, 963, 965, 967, 969, 971, 973, 975, 977, 979, 981, 983, 985, 987, 989, 991, 993, 995, 997, 999, 1001, 1003, 1005, 1007, 1009, 1011, 1013, 1015, 1017, 1019, 1021, 1023, 1025, 1027, 1029, 1031, 1033, 1035, 1037, 1039, 1041, 1043, 1045, 1047, 1049, 1051, 1053, 1055, 1057, 1059, 1061, 1063, 1065, 1067, 1069, 1071, 1073, 1075, 1077, 1079, 1081, 1083, 1085, 1087, 1089, 1091, 1093, 1095, 1097, 1099, 1101, 1103, 1105, 1107, 1109, 1111, 1113, 1115, 1117, 1119, 1121, 1123, 1125, 1127, 1129, 1131, 1133, 1135, 1137, 1139, 1141, 1143, 1145, 1147, 1149, 1151, 1153, 1155, 1157, 1159, 1161, 1163, 1165, 1167, 1169, 1171, 1173, 1175, 1177, 1179, 1181, 1183, 1185, 1187, 1189, 1191, 1193, 1195, 1197, 1199, 1201, 1203, 1205, 1207, 1209, 1211, 1213, 1215, 1217, 1219, 1221, 1223, 1225, 1227, 1229, 1231, 1233, 1235, 1237, 1239, 1241, 1243, 1245, 1247, 1249, 1251, 1253, 1255, 1257, 1259, 1261, 1263, 1265, 1267, 1269, 1271, 1273, 1275, 1277, 1279, 1281, 1283, 1285, 1287, 1289, 1291, 1293, 1295, 1297, 1299, 1301, 1303, 1305, 1307, 1309, 1311, 1313, 1315, 1317, 1319, 1321, 1323, 1325, 1327, 1329, 1331, 1333, 1335, 1337, 1339, 1341, 1343, 1345, 1347, 1349, 1351, 1353, 1355, 1357, 1359, 1361, 1363, 1365, 1367, 1369, 1371, 1373, 1375, 1377, 1379, 1381, 1383, 1385, 1387, 1389, 1391, 1393, 1395, 1397, 1399, 1401, 1403, 1405, 1407, 1409, 1411, 1413, 1415, 1417, 1419, 1421, 1423, 1425, 1427, 1429, 1431, 1433, 1435, 1437, 1439, 1441, 1443, 1445, 1447, 1449, 1451, 1453, 1455, 1457, 1459, 1461, 1463, 1465, 1467, 1469, 1471, 1473, 1475, 1477, 1479, 1481, 1483, 1485, 1487, 1489, 1491, 1493, 1495, 1497, 1499, 1501, 1503, 1505, 1507, 1509, 1511, 1513, 1515, 1517, 1519, 1521, 1523, 1525, 1527, 1529, 1531, 1533, 1535, 1537, 1539, 1541, 1543, 1545, 1547, 1549, 1551, 1553, 1555, 1557, 1559, 1561, 1563, 1565, 1567, 1569, 1571, 1573, 1575, 1577, 1579, 1581, 1583, 1585, 1587, 1589, 1591, 1593, 1595, 1597, 1599, 1601, 1603, 1605, 1607, 1609, 1611, 1613, 1615, 1617, 1619, 1621, 1623, 1625, 1627, 1629, 1631, 1633, 1635, 1637, 1639, 1641, 1643, 1645, 1647, 1649, 1651, 1653, 1655, 1657, 1659, 1661, 1663, 1665, 1667, 1669, 1671, 1673, 1675, 1677, 1679, 1681, 1683, 1685, 1687, 1689, 1691, 1693, 1695, 1697, 1699, 1701, 1703, 1705, 1707, 1709, 1711, 1713, 1715, 1717, 1719, 1721, 1723, 1725, 1727, 1729, 1731, 1733, 1735, 1737, 1739, 1741, 1743, 1745, 1747, 1749, 1751, 1753, 1755, 1757, 1759, 1761, 1763, 1765, 1767, 1769, 1771, 1773, 1775, 1777, 1779, 1781, 1783, 1785, 1787, 1789, 1791, 1793, 1795, 1797, 1799, 1801, 1803, 1805, 1807, 1809, 1811, 1813, 1815, 1817, 1819, 1821, 1823, 1825, 1827, 1829, 1831, 1833, 1835, 1837, 1839, 1841, 1843, 1845, 1847, 1849, 1851, 1853, 1855, 1857, 1859, 1861, 1863, 1865, 1867, 1869, 1871, 1873, 1875, 1877, 1879, 1881, 1883, 1885, 1887, 1889, 1891, 1893, 1895, 1897, 1899, 1901, 1903, 1905, 1907, 1909, 1911, 1913, 1915, 1917, 1919, 1921, 1923, 1925, 1927, 1929, 1931, 1933, 1935, 1937, 1939, 1941, 1943, 1945, 1947, 1949, 1951, 1953, 1955, 1957, 1959, 1961, 1963, 1965, 1967, 1969, 1971, 1973, 1975, 1977, 1979, 1981, 1983, 1985, 1987, 1989, 1991, 1993, 1995, 1997, 1999, 2001, 2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013, 2015, 2017, 2019, 2021, 2023, 2025, 2027, 2029, 2031, 2033, 2035, 2037, 2039, 2041, 2043, 2045, 2047, 2049, 2051, 2053, 2055, 2057, 2059, 2061, 2063, 2065, 2067, 2069, 2071, 2073, 2075, 2077, 2079, 2081, 2083, 2085, 2087, 2089, 2091, 2093, 2095, 2097, 2099, 2101, 2103, 2105, 2107, 2109, 2111, 2113, 2115, 2117, 2119, 2121, 2123, 2125, 2127, 2129, 2131, 2133, 2135, 2137, 2139, 2141, 2143, 2145, 2147, 2149, 2151, 2153, 2155, 2157, 2159, 2161, 2163, 2165, 2167, 2169, 2171, 2173, 2175, 2177, 2179, 2181, 2183, 2185, 2187, 2189, 2191, 2193, 2195, 2197, 2199, 2201, 2203, 2205, 2207, 2209, 2211, 2213, 2215, 2217, 2219, 2221, 2223, 2225, 2227, 2229, 2231, 2233, 2235, 2237, 2239, 2241, 2243, 2245, 2247, 2249, 2251, 2253, 2255, 2257, 2259, 2261, 2263, 2265, 2267, 2269, 2271, 2273, 2275, 2277, 2279, 2281, 2283, 2285, 2287, 2289, 2291, 2293, 2295, 2297, 2299, 2301, 2303, 2305, 2307, 2309, 2311, 2313, 2315, 2317, 2319, 2321, 2323, 2325, 2327, 2329, 2331, 2333, 2335, 2337, 2339, 2341, 2343, 2345, 2347, 2349, 2351, 2353, 2355, 2357, 2359, 2361, 2363, 2365, 2367, 2369, 2371, 2373, 2375, 2377, 2379, 2381, 2383, 2385, 2387, 2389, 2391, 2393, 2395, 2397, 2399, 2401, 2403, 2405, 2407, 2409, 2411, 2413, 2415, 2417, 2419, 2421, 2423, 2425, 2427, 2429, 2431, 2433, 2435, 2437, 2439, 2441, 2443, 2445, 2447, 2449, 2451, 2453, 2455, 2457, 2459, 2461, 2463, 2465, 2467, 2469, 2471, 2473, 2475, 2477, 2479, 2481, 2483, 2485, 2487, 2489, 2491, 2493, 2495, 2497, 2499, 2501, 2503, 2505, 2507, 2509, 2511, 2513, 2515, 2517, 2519, 2521, 2523, 2525, 2527, 2529, 2531, 2533, 2535, 2537, 2539, 2541, 2543, 2545, 2547, 2549, 2551, 2553, 2555, 2557, 2559, 2561, 2563, 2565, 2567, 2569, 2571, 2573, 2575, 2577, 2579, 2581, 2583, 2585, 2587, 2589, 2591, 2593, 2595, 2597, 2599, 2601, 2603, 2605, 2607, 2609, 2611, 2613, 2615, 2617, 2619, 2621, 2623, 2625, 2627, 2629, 2631, 2633, 2635, 2637, 2639, 2641, 2643, 2645, 2647, 2649, 2651, 2653, 2655, 2657, 2659, 2661, 2663, 2665, 2667, 2669, 2671, 2673, 2675, 2677, 2679, 2681, 2683, 2685, 2687, 2689, 2691, 2693, 2695, 2697, 2699, 2701, 2703, 2705, 2707, 2709, 2711, 2713, 2715, 2717, 2719, 2721, 2723, 2725, 2727, 2729, 2731, 2733, 2735, 2737, 2739, 2741, 2743, 2745, 2747, 2749, 2751, 2753, 2755, 2757, 2759, 2761, 2763, 2765, 2767, 2769, 2771, 2773, 2775, 2777, 2779, 2781, 2783, 2785, 2787, 2789, 2791, 2793, 2795, 2797, 2799, 2801, 2803, 2805, 2807, 2809, 2811, 2813, 2815, 2817, 2819, 2821, 2823, 2825, 2827, 2829, 2831, 2833, 2835, 2837, 2839, 2841, 2843, 2845, 2847, 2849, 2851, 2853, 2855, 2857, 2859, 2861, 2863, 2865, 2867, 2869, 2871, 2873, 2875, 2877, 2879, 2881, 2883, 2885, 2887, 2889, 2891, 2893, 2895, 2897, 2899, 2901, 2903, 2905, 2907, 2909, 2911, 2913, 2915, 2917, 2919, 2921, 2923, 2925, 2927, 2929, 2931, 2933, 2935, 2937, 2939, 2941, 2943, 2945, 2947, 2949, 2951, 2953, 2955, 2957, 2959, 2961, 2963, 2965, 2967, 2969, 2971, 2973, 2975, 2977, 2979, 2981, 2983, 2985, 2987, 2989, 2991, 2993, 2995, 2997, 2999, 3001, 3003, 3005, 3007, 3009, 3011, 3013, 3015, 3017, 3019, 3021, 3023, 3025, 3027, 3029, 3031, 3033, 3035, 3037, 3039, 3041, 3043, 3045, 3047, 3049, 3051, 3053, 3055, 3057, 3059, 3061, 3063, 3065, 3067, 3069, 3071, 3073, 3075, 3077, 3079, 3081, 3083, 3085, 3087, 3089, 3091, 3093, 3095, 3097, 3099, 3101, 3103, 3105, 3107, 3109, 3111, 3113, 3115, 3117, 3119, 3121, 3123, 3125, 3127, 3129, 3131, 3133, 3135, 3137, 3139, 3141, 3143, 3145, 3147, 3149, 3151, 3153, 3155, 3157, 3159, 3161, 3163, 3165, 3167, 3169, 3171, 3173, 3175, 3177, 3179, 3181, 3183, 3185, 3187, 3189, 3191, 3193, 3195, 3197, 3199, 3201, 3203, 3205, 3207, 3209, 3211, 3213, 3215, 3217, 3219, 3221, 3223, 3225, 3227, 3229, 3231, 3233, 3235, 3237, 3239, 3241, 3243, 3245, 3247, 3249, 3251, 3253, 3255, 3257, 3259, 3261, 3263, 3265, 3267, 3269, 3271, 3273, 3275, 3277, 3279, 3281, 3283, 3285, 3287, 3289, 3291, 3293, 3295, 3297, 3299, 3301, 3303, 3305, 3307, 3309, 3311, 3313, 3315, 3317, 3319, 3321, 3323, 3325, 3327, 3329, 3331, 3333, 3335, 3337, 3339, 3341, 3343, 3345, 3347, 3349, 3351, 3353, 3355, 3357, 3359, 3361, 3363, 3365, 3367, 3369, 3371, 3373, 3375, 3377, 3379, 3381, 3383, 3385, 3387, 3389, 3391, 3393, 3395, 3397, 3399, 3401, 3403, 3405, 3407, 3409, 3411, 3413, 3415, 3417, 3419, 3421, 3423, 3425, 3427, 3429, 3431, 3433, 3435, 3437, 3439, 3441, 3443, 3445, 3447, 3449,

3.

$$ODZ: x^2 + 6x > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty).$$

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2 + 6x \geq |x^2 + 6x|^{\frac{\log_4 5}{2}}, \text{ обозначим } Y = x^2 + 6x, Y \geq 0, \text{ имеем:}$$

$$3^{\log_4 Y} + Y \geq Y^{\frac{\log_4 5}{2}}$$

Обозначим $Y = 4^a$, $a \in \mathbb{R}$, можно сдвинуть, т.к. $Y \geq 0$. Тогда:

$$3^a + 4^a \geq 5^a = (5^2)^{\frac{a}{2}} = (3^2 + 4^2)^{\frac{a}{2}} \Leftrightarrow 3^{\frac{a}{2}} + 4^{\frac{a}{2}} \geq (9 + 16)^{\frac{a}{2}}, \text{ это}$$

неравенство, как известно (можно его доказать, например, с помощью обобщенного неравенства Ньютона для $a \in \mathbb{R}$) выполняется при $\frac{a}{2} \leq 1$ и не выполняется при $\frac{a}{2} < 1 \Rightarrow a \in (-\infty; 1] \Rightarrow Y \in (0; 4] \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + 6x \in (0; 4] \Rightarrow x \in [-3 - \sqrt{13}; -6) \cup (0; -3 + \sqrt{13}).$$

Ответ: $x \in$ ↗

$$2. \begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} \begin{cases} (x-1)(3y-2) = 3y - 2x \\ (x-1)^2 + (\frac{1}{3}(3y-2))^2 = (\frac{5}{3})^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = x-1 \\ b = 3y-2 \end{cases} \text{ Тогда: } \begin{cases} \sqrt{ab} = b - 2a \\ a^2 + (\frac{b}{3})^2 = (\frac{5}{3})^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a^2 + b^2 - 5ab = 0 \\ 9a^2 + b^2 - 25 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5a^2 + 5ab - 25 = 0 \Rightarrow a^2 + ab = 5 \Rightarrow b = \frac{5-a^2}{a} \Rightarrow 4a^2 + \left(\frac{5-a^2}{a}\right)^2 - 25 + 5a^2 = 0$$

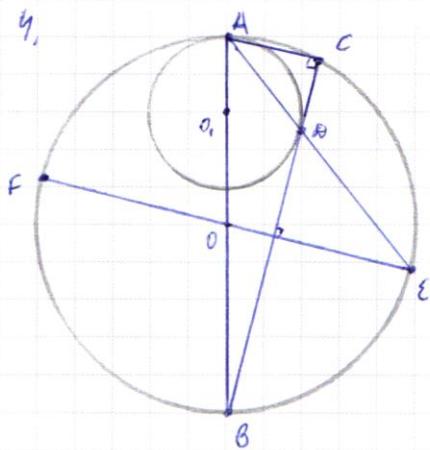
$$\text{т.к. } 10a^4 - 35a^2 + 25 = 0 \Rightarrow 2a^4 - 7a^2 + 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ a^2 = \frac{+5}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \\ x = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

$$\text{и т.к. } ab > 0 \Rightarrow 5 - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow (5-a)(5+a) \geq 0 \Rightarrow |a| \leq 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{ все значения подходит, } \Rightarrow 3) x = 2, y = 2; 2) x = 0, y = 2;$$

$$\text{Ответ: 3) } x = \frac{3}{2}, y = \frac{9}{5}, 4) x = -\frac{3}{2}, y = \frac{9}{5}.$$

$$\text{Ответ: } (2, 2), (0, 2), (\frac{3}{2}, \frac{9}{5}), (-\frac{3}{2}, \frac{9}{5}).$$



$$CD = \frac{5}{2}, \quad BE = \frac{13}{2}$$

Теменюк: Тю лемне дұрыснега АЕ-Балас-
тыңда $\angle BAC$, $\Rightarrow E$ -середина $\cup CEB \Rightarrow EF \ni O$. ы-п. 8.

O_1 - y-p w. $AC \perp BC$, m.k. AB - granu my. \Rightarrow
 $\Rightarrow AC \parallel EF \Rightarrow ACF$ - bmacravd xpravzne, m.k. $AC \subset EF$.

\Rightarrow это побочный продукт.

$$B \triangle ABC \quad OD\text{-succesmpunkt} \Rightarrow \frac{BD}{DC} = \frac{BA}{AC} = \frac{13}{5} \Rightarrow 13AC = 5AB.$$

$$BC = \frac{18}{2} = 9. \quad \text{Ug m. Thespannraet: } 169AC^2 = 25(81 + AC^2) \rightarrow AC^2 = 194 = 1856 \rightarrow$$

$$\Rightarrow AC = \sqrt{\frac{64}{3}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}, BC = \sqrt{\frac{64 \cdot 23}{169 - 64}} = \frac{4\sqrt{58}}{15}, AB = \sqrt{\frac{64}{15}} = \frac{8\sqrt{58}}{15}.$$

$$R_2 - \text{przyjmuje } \sqrt{2} \text{ u w coomb.}$$

$$R = \frac{1}{2} AB = \frac{24}{6} = 4, BD - \text{perpendicularna w } \Rightarrow O, D \perp BC \Rightarrow O, D \parallel AC \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{O_1 B}{AC} = \frac{B O}{BC} \Rightarrow 2 = \frac{13}{18} AC = \frac{13\sqrt{58}}{18}, \frac{13\sqrt{29}}{3}$$

$$\angle AFE = \angle CEF = 90^\circ - \angle BCE = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle BAC.$$

$$\sin(\angle AFE) = \sin(50^\circ - \frac{1}{2}\angle BDC) = \cos\left(\frac{1}{2}\angle BAC\right) = \frac{\sqrt{1 + \cos 2\angle BAC}}{2} = \frac{\sqrt{1 + \sqrt{1 - \sin^2 \angle BAC}}}{2}$$

$$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} BC \cdot FE = \frac{1}{4} BC \cdot 2R = \frac{1}{2} BC \cdot R = \frac{AB}{\sqrt{AB \cdot BC}} \cdot BC = \frac{13\sqrt{58}/5}{\sqrt{58+7}} = \left(\frac{13\sqrt{58}}{5}\right) / \left(\frac{\sqrt{133}}{5}\right).$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 9 \cdot \frac{13\sqrt{5}}{3} = \frac{39\sqrt{5}}{4}$$

$$\angle AFE = \arccos \frac{1 + \frac{2\sqrt{29}}{13\sqrt{5}}}{\frac{6,5\sqrt{5} + 2\sqrt{29}}{13\sqrt{5}}}.$$

$$\text{Antwort: } \alpha = \frac{13\sqrt{25}}{3}, R = \frac{13\sqrt{5}}{6}, \angle AFE = \arcsin \left(\frac{6,5\sqrt{5} + 2\sqrt{25}}{13\sqrt{5}} \right), S_{AHEF} = \frac{39\sqrt{5}}{4}.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. Докажите:

$$f(x) = f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y).$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y).$$

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $n = p_1^{d_1} \cdots p_k^{d_k}$ - разложение n на простые множители $p_i \in \mathbb{P}$. Тогда $f(n) = f(p_1^{d_1} \cdots p_k^{d_k})$. Если $a, b, c \in \mathbb{Q}$ и $a, b, c > 0$, то

$$f(a \cdot b \cdot c) = f(a \cdot b) + f(c) = f(a) + f(b) + f(c), \text{ откуда имеем:}$$

$$f(n) = d_1 \cdot f(p_1) + \cdots + d_k \cdot f(p_k) = d_1 \cdot \left[\frac{p_1}{q}\right] + \cdots + d_k \cdot \left[\frac{p_k}{q}\right].$$

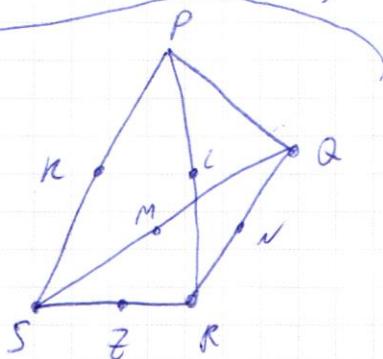
На множестве $[3; 27]$ найдем значения $f(n)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$:

1	$f(1)$	Мы находимся пока, что $f(2)=0$, $f(3)=0$, $f(5)=1$, $f(7)=1$,
3	0	
4	0	$f(11)=2$, $f(13)=3$, $f(17)=4$, $f(19)=4$, $f(23)=5$ из $f(p)=\left[\frac{p}{q}\right]$
5	1	
6	0	Тогда $f(n) \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Значит, нер-в $f(x) < f(y)$
7	1	удовлетворяет (x, y) также, что:
8	0	
9	0	
10	1	1) $f(x)=0$, $f(y)>0$. Всего таких: $10 \cdot 15 = 150$ пар.
11	2	
12	0	2) $f(x)=1$, $f(y)>1$. Всего таких: $7 \cdot 8 = 56$ пар.
13	3	
14	1	3) $f(x)=2$, $f(y)>2$. Всего таких: $3 \cdot 5 = 15$ пар
15	1	
16	0	4) $f(x)=3$, $f(y)>3$. Всего таких: $2 \cdot 3 = 6$ пар
17	4	
18	0	5) $f(x)=4$, $f(y)>4$. Всего таких: $2 \cdot 1 = 2$ пары
19	4	
20	1	6) $f(x)>4$, $f(y)>f(x)$. Всего таких 0 пар.
21	1	
22	2	Всего: $150 + 56 + 15 + 6 + 2 = 150 + 79 = 229$.
23	5	
24	0	Ответ: 229.
25	2	
26	3	
27	0	

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7. $KL \parallel MN, KM \parallel LN \Rightarrow N \in (KLM) \Rightarrow KLMN - \text{параллограмм} \Rightarrow$
 $\Rightarrow KLMN - \text{правоугольник} \Rightarrow PQ \perp SR,$

$KL \parallel SR, KM \parallel PQ, MN \parallel SR, LN \parallel PQ,$



K, L, M, N — середины ребер, как на рис.

$PZ \angle L$ — прямой, т.к. $KZ \angle L = CKPL = \pi$

$\Rightarrow \angle SPR = 90^\circ = \angle KZL.$

$$\begin{cases} KZ \parallel PR \\ LZ \perp PS \end{cases}$$

черновик чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \frac{-1}{\sqrt{17}} ; \cos(2\alpha + 2\beta) = \pm \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\begin{aligned} \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha &= \frac{-8}{17} = \sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta + \sin 2\alpha \\ &= \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos(2\beta) + \cos(2\alpha + 2\beta) \cdot \sin(2\beta) = \frac{-8}{17} \end{aligned}$$

$$1) \cos(2\alpha + 2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{-8}{17} = \frac{-1}{\sqrt{17}} \cos 2\beta + \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \sin 2\beta$$

$$-8\sqrt{17} = 4 \sin 2\beta - \cos 2\beta = 8 \sin \beta \cdot \cos \beta - (\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha)$$

$$\sin^2 \alpha + 8 \cos$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = 2 \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos(2\beta) = \frac{-2}{\sqrt{17}} \cos 2\beta = \frac{-8}{\sqrt{17}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$1) \sin 2\beta \cdot \cos(2\alpha + 2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\cos(2\alpha + 2\beta) - \cos 2\beta = 0 - 2 \sin \alpha \cdot \cos \sin(2\alpha + 2\beta) = 0$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = 0 \\ \sin(2\alpha + 2\beta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = 0 \\ \sin \alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \cos \alpha \cdot \sin 2\beta = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{tg} \alpha = 0 \\ \operatorname{tg} \alpha = \frac{-\sqrt{17}}{4} \sin 2\beta \Rightarrow \frac{\pm 1}{\sqrt{17}} = \frac{\pm 1}{4} \end{cases}$$

$$2) \cos(2\alpha + 2\beta) = \frac{-4}{\sqrt{17}}$$

$$\cos() + \cos 2\beta = 2 \cos(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\alpha = 0$$

$$\begin{cases} \cos \alpha = 0 \\ \cos(2\alpha + 2\beta) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(2\alpha + 2\beta) = 0 \\ \cos \alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} - \sin \alpha \cdot \sin 2\beta = 0 \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{\sqrt{17} \cdot \sin 2\beta} = \frac{\pm 4}{\sqrt{17}} \pm 4$$

$$\text{или } \sin 2\beta = \frac{-1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 4\beta = \frac{-8}{17}$$

$$2 \cos 2\beta = \frac{8}{\sqrt{17}}$$

$$3^{\log_4(8+6x)} + 6x \geq |x^2 + 6x| / \log_4 5 - x^2$$

$$x^2 + 6x = y$$

$$3^x + 4^x \geq 5^x$$

$$\sqrt{3} + 2\sqrt{\sqrt{5}}$$

$$3^{\log_4 4} + 4 \geq |y| / \log_4 5$$

$$y \geq 0$$

$$3^{\log_4 4} + 4 \geq y^{\log_4 5}$$

$$3^a + 4^a \geq (4^{\log_4 5})^a = 5^a$$

$$3^a + 4^a \geq 5^a = (3^2 + 4^2)^{\frac{a}{2}} \Rightarrow (3^2 + 4^2)^{\frac{a}{2}} \geq (3^2 + 4^2)$$

$$3^t + 4^t - 5^t \geq 0$$

$$t < 1 \Rightarrow 0, t=2 \Rightarrow 0, t > 0 \Rightarrow$$

$$\log_5(3^t + 4^t) \geq \log_5 3^{\frac{3}{2}} + 4^{\frac{3}{2}} = 8 + 3 \cdot 1,7 \sqrt{5} \approx 13$$

$$3^a + 4^a \text{ при } \frac{a}{2} \geq 1 \text{ и } < \text{ при } \frac{a}{2} < 1$$

$$t/(3^{t-1} + 4^{t-1} - 5^{t-1}) \geq 0 \quad (3^2 + 4^2)^{\frac{a}{2}} \vee 3^a + 4^a \quad x^2 + 6x - 4 = 0$$

$$3^{t-1} + 4^{t-1} - 5^{t-1} \geq 0 \quad \text{но обобщенное неравенство дает действие.}$$

$$3^t + 4^t - 5^t \geq 0 \quad \text{при } t \in [0; 2] \Leftrightarrow y \in [1; 16]$$

$$x^2 + 6x = x(x+6) \in [1; 16] \quad -6 \leq x \leq 0 \quad \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{5} \quad \frac{7}{12} \sqrt{5} \approx 3.5 \sqrt{12}$$

$$2 + 3 \cdot 13 = 41$$

$$-14 + 11y - 7 \\ -3y^2 + 4y + 7$$

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

$$\frac{D}{4} = 9 - 3y^2 + 12y + 12 = -9y^2 + 12y + 21$$

$$3(x-1)^2 + 3y^2 - 4y - 7 = 0$$

$$\sqrt{\frac{1}{3}(13x - 3(3y - 2))} = 3y - 2x \quad (3y-2)^2 \quad 3y^2 - 2.2y + \frac{4}{3} =$$

$$\sqrt{(x-1)(3y-2)} = 3y - 2x \quad (3y-2)^2 = 9y^2 + 4 - 12y \quad 4 + \frac{4}{3} = \frac{25}{3}$$

$$x=1, y = \frac{2}{3} \quad (1; \frac{2}{3})$$

$$2 - 3x^2$$

$$2(3y - 2x)^2 + \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \left(x - 1 + y - \frac{2}{3}\right)^2$$

$$3(x-1)^2 + (3y - \frac{2}{\sqrt{3}})^2 = \frac{25}{3}$$

$$7x^2 + 17y^2 - 10xy + \frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y = 0. \quad (x-1)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \left(\frac{5}{3}\right)^2$$

$$21x^2 + 51y^2 - 30xy + 4x + 4y = 0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$81 \cdot 9 = 729 + 4 \cdot 29 = 845$$

$$\begin{array}{r} 820 - 4 \\ \hline 169 \\ \begin{array}{r} 16 \\ - 34 \\ \hline 30 \\ \begin{array}{r} 30 \\ \hline 45 \end{array} \end{array} \end{array}$$

$$169 = 13^2$$

$$13^2 \cdot 5$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f(abc) = f(ab) + f(c) = f(a+b+c)$$

$$f(p_1^{x_1} \cdots p_n^{x_n}) = d_1 f(p_1) + \dots + d_n f(p_n) = d_1 \left[\frac{p_1}{4} \right] + \dots + \left[\frac{p_n}{4} \right] d_n$$

$$f(1) = 0$$

$$f\left(\frac{x}{y} \cdot y\right) = f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y).$$

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, R - p_i$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 64 \\ \hline 116 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 29 \\ \times 6 \\ \hline 174 \end{array}$$

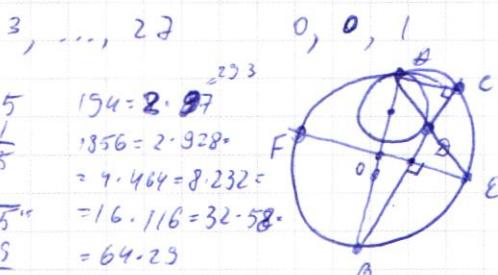
$$\begin{array}{r} 154+2 \\ 18 \quad 197 \\ \hline 19 \quad 129 \end{array}$$

$$0, 0, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5 - \left[\frac{p_i}{4} \right]$$

$$\begin{array}{r} 124 \\ \hline 1856 \end{array}$$

$$144 = 12^2 = 3^2 \cdot 2^4$$

$$\begin{array}{r} 2^2 \cdot 23 \\ \hline 9 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 25 \\ \times 31 \\ \hline 75 \\ 75 \\ \hline 154 = 2 \cdot 77 \\ 1856 = 2 \cdot 928 \\ = 4 \cdot 464 = 8 \cdot 232 \\ = 16 \cdot 116 = 32 \cdot 58 \\ = 64 \cdot 29 \\ \hline 1856 \end{array}$$

$$\text{1. Архимеда}$$

$$CD = \frac{5}{2}, BD = \frac{13}{2}$$

$$AD - \text{бис.}$$

$$\frac{BD}{BC} = \frac{13}{5} = \frac{AB}{AC}; BC = 9.$$

$$S_{DFE} = \frac{1}{2} BC, 2R = BC \cdot R$$

$$AB = 81 + \frac{429}{9}$$

$$13 AC = 5 AB \quad 169 + 25 = 194$$

$$169 AC^2 = 25(81 - AC^2)$$

$$194 AC^2 = 1856 = 64 \cdot 29$$

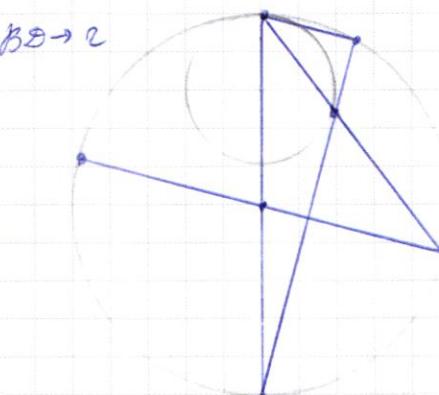
$$AC = \sqrt{\frac{64}{2 \cdot 3}} = \sqrt{\frac{32}{3}} = \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$AB = \frac{13}{5} \cdot \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{52\sqrt{2}}{5\sqrt{3}}$$

$$\angle ECB = \angle CAB = \frac{1}{2} \angle BAC$$

$$90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC$$

$$\sin(90^\circ - \frac{1}{2} \angle BAC) = \cos\left(\frac{1}{2} \angle BAC\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos(\angle BAC)}{2}}$$



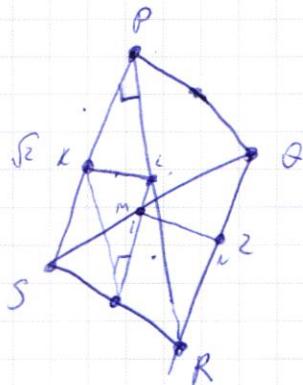
$$\left(\frac{9}{2R} \right)^2$$

$$\frac{81 \cdot 5^2 \cdot 97}{4 \cdot 52^2 \cdot 58}$$

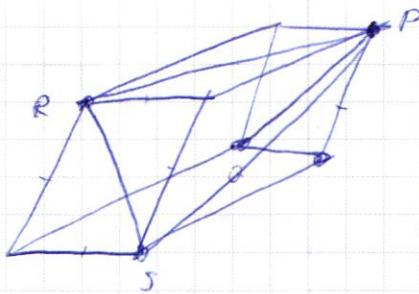
$$25AB^2 = (81 + AC^2) \cdot 13$$

$$\frac{BC}{2R} = \frac{s}{AB} = \frac{27}{13\sqrt{5}} \quad 845 - 729 = \frac{\sqrt{4 \cdot 29}}{13\sqrt{5}} + 1$$

$$27 \cdot 27 = 81 \cdot 9$$



$$\angle SPR = 90^\circ, \angle S$$



$$KL \parallel MN, KM \parallel LN$$

$$NE(KLM) \Rightarrow \exists \text{ two pr-ns.} \Rightarrow PQ \perp SR.$$

$$LN \perp SR, LN \perp KL$$

$$R = \frac{1}{2}n$$

$$\frac{4x-3-2ax^2-2bx+2ax+2b}{x-1} \geq 0$$

4-2ax-2b

$$x-1 > 0 \text{ при } x \in (1; 3].$$

$$8x^2 - 34x + 30 - ax - b \leq 0$$

$$\Delta = 34^2$$

$$-2ax^2 + (9+2a-2b)x - 2b - 3 \geq 0 \quad \frac{-2b-3}{-2a}$$

$$\frac{\Delta}{4} = (a+2)^2 + 4ab - 6a = (a-b)^2 - 10a - 4b \geq 0$$

$$4x-3 \quad 4x^2 - 17x + 15 \quad \frac{3}{4} - \frac{17 \cdot 3}{4} + 15 = 60$$

$$\Delta = j^2$$

$$\begin{cases} x = \frac{17+7}{8} = 3 \\ x = \frac{17-7}{8} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$4(x-3)(x-\frac{5}{4})$$

$$3a^2 + b^2 - (a^2 + ab)^2 = 9a^2 + b^2$$

$$ab = \frac{5}{a^2} \sqrt{5-a^2} = b \quad \frac{12}{5} \cdot \frac{4}{5}$$

$$-2x-71 - 2x-2+3y-28$$

$$ab = 4a^2 + b^2 - 4ab$$

$$4a^2 + b^2 - 5ab = 0$$

$$b=4 \quad \frac{5-\frac{5}{2}}{(\frac{5}{2})^2} = \frac{\frac{5}{2}}{\frac{25}{4}} = \frac{2}{5} \cdot b$$

чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

черновик

Страница № _____

(Нумеровать только чистовики)