МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

$\boxed{1}$ $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$

По формуле суммы синусов:

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta$$

Тогда получается система:

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$$\frac{-2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \quad \Rightarrow \quad \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

Из первого уравнения:

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \Rightarrow \quad \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\left[\begin{aligned} &2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos^2\alpha - \frac{4}{\sqrt{17}}\sin^2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ &2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} - \frac{4}{\sqrt{17}}\cos^2\alpha + \frac{4}{\sqrt{17}}\sin^2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &4\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 4\sin^2\alpha = -1 \\ &4\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha = -1 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &5\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha = 0 \\ &5\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0 \end{aligned}\right.$$

т.к. $tg\,\alpha$ определён : $\left[\begin{aligned} &5 + 2tg\,\alpha - 3tg^2\alpha = 0 \\ &5tg^2\alpha + 2tg\,\alpha - 3 = 0 \end{aligned}\right.$

Корни первого уравнения: $tg\,\alpha = -1$ и $tg\,\alpha = \frac{5}{3}$

Корни второго уравнения: $tg\,\alpha = -1$ и $tg\,\alpha = 0{,}6$

Т.к. значений $tg\,\alpha$ не меньше 3-х, то все подходят:

Ответ: $\left\{-1; \frac{5}{3}; 0{,}6\right\}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y-6x\geq 0 \\ xy-6x-y+6=y^2+36x^2-12xy \\ (3x-3)^2+(y-6)^2-9-36=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1) & 6x\leq y \\ (2) & 36x^2-(13y-6)x+(y^2+y-6)=0 \\ (3) & 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

Решим (2) относительно x:

$$36x^2-(13y-6)x+(y^2+y-6)=0$$

$$D=(5y-30)^2$$

$$x=\frac{13y-6\pm(5y-30)}{2\cdot 36}$$

$4x=y-2$ или $9x=y+3$

$y=4x+2$ $\qquad$ $y=9x-3$

При $y=4x+2$:

$$9(x-1)^2+(4x+2-6)^2=90$$

$$9(x-1)^2+16(x-1)^2=90$$

$$x-1=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{3\sqrt{10}}{5}+1, \quad y=6+\frac{12\sqrt{10}}{5} \quad (\text{не соотв. условию } y\geq 6x) \\ x=1-\frac{3\sqrt{10}}{5}, \quad y=6-\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{array}\right.$$

$\boxed{2}$ При $y = 9x - 3$:

$9(x-1)^2 + (9x-9)^2 = 90$

$90(x-1)^2 = 90$

$$\left[\begin{array}{l} x-1=1 \\ x-1=-1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} x=0, & y=-3 \quad (\text{не соотв. усл. } y \geq 6x) \\ x=2, & y=15 \end{array}\right.$$

Объединяя решения получим:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\dfrac{5-3\sqrt{10}}{5} \\ y=\dfrac{30-12\sqrt{10}}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{(2;15);\left(1-\dfrac{3\sqrt{10}}{5};6-\dfrac{12\sqrt{10}}{5}\right)\right\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{1.}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \longrightarrow$ $\cancel{\sin(4\alpha+4\beta)}$ $\sin(2\alpha+2\beta)$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} & \mid \div \cos 2\alpha\cos 2\beta \\ \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta = -\frac{2}{17} \end{cases}$$

$\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + \cos 2\alpha(2\sin 2\beta\cos 2\beta) = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha\cos^2 2\beta - \sin 2\alpha\sin^2 2\beta + 2\cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$ $\quad (\div \cos 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta$

$$\begin{cases} tg 2\alpha - tg 2\alpha\, tg^2 2\beta + 2 tg 2\beta = -\frac{2}{17\cos 2\alpha\cos^2 2\beta} \\ tg 2\alpha + tg 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}\cos 2\alpha\cos 2\beta} \end{cases}$$

$tg^2 2\alpha + tg^2 2\beta + 2 tg 2\alpha\, tg 2\beta = \frac{1}{17\cos^2 2\alpha\cos^2 2\beta}$

$tg 2\alpha - tg 2\alpha\, tg^2 2\beta + 2 tg 2\beta = -\frac{2}{17\cos^2 2\alpha\cos^2 2\beta}$

$\frac{(tg 2\alpha + tg 2\beta)^2}{tg 2\alpha(1-tg^2 2\beta)+2tg 2\beta} = -\frac{\cos 2\alpha}{2\cos^2 2\alpha}$

$tg 2\alpha(1-tg^2 2\beta) + 2tg 2\beta = -2\cos 2\alpha(tg 2\alpha + tg 2\beta)^2$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin(2\alpha+2\beta-2\beta) =$

$= \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta - \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta$

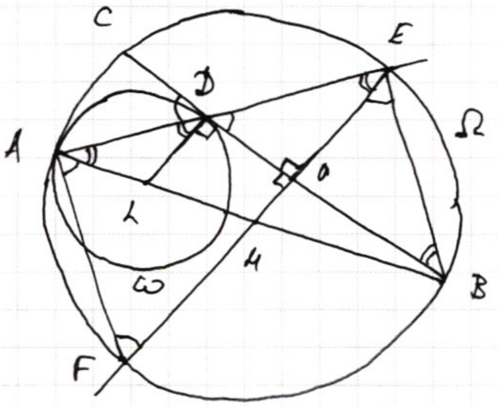
$\frac{-2}{\sqrt{17}}\sin 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\beta = \frac{\sqrt{17}}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos^2\beta =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4



1. Пусть $\angle DAL = \alpha$, а $\angle CDA = \beta$. По св кас.: $DL \perp CD \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ$
2. DL и EH параллельны как 2 прямые, перпендикулярные BC.
3. $\angle AEH = \alpha$ как соотв.
4. $\angle AEB = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр AB, тогда $\angle BEO = 90^\circ - \alpha = \beta$.
5. По т. о сумме углов треуг: $\angle EBO = 90^\circ - \beta = \alpha$
6. Как вписанный, $\angle AFE = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup CE) = \frac{1}{2}\cup AC + \frac{1}{2}\cup CE = \frac{2}{2}\angle CBE + \frac{2}{2}\angle ABC$

   $\angle AFE = \angle ABC + \angle CBE = \alpha + \angle ABC$
7. По т. о сумме угл. треуг: $\angle ABC = 90^\circ - \angle OHB = 90^\circ - \angle DLH$, т.к. $\angle DLH$ и $\angle OHB$ соответственные.
8. $\angle DLH = 2\alpha$ как внешний для $\triangle ADL \Rightarrow \angle ABC = 90^\circ - 2\alpha$
9. $\angle AFE = \alpha + 90^\circ - 2\alpha = 90^\circ - \alpha = \beta$
10. По т. о сумме углов $\triangle$: $\angle FAE = 180^\circ - (\alpha + \beta) = 90^\circ$
11. EF – диаметр, т.к. вписанный угол, опирающийся на EF равен 90°.
12. Т.к. все диаметры пересекаются в центре окр., то H – центр Ω.
13. По свойству хорд, т.к. $CB \perp EF$ и EF – диаметр, то $CO = OB$.
14. Обозначим OD за x. Тогда $CO = OB \Leftrightarrow CD + x = BD - x \Rightarrow x = \frac{13-12}{2} = \frac{1}{2}$

15. Из $\triangle ODE$ и $\triangle OEB$: $\left.\begin{array}{l} OE = OD\, tg\beta \\ OE = \dfrac{OB}{tg\beta} \end{array}\right\} \Rightarrow OE^2 = OD \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot \frac{25}{2} = \frac{25}{4}$

$OE = \frac{5}{2} = 2{,}5$

$tg\beta = \frac{OE}{OD} = \frac{2{,}5}{(\frac{1}{2})} = 5 \Rightarrow \beta = \angle AFE = arctg\, 5$

16. Из $\triangle OEB$: $EB = \frac{OE}{\cos\beta} = \frac{2{,}5}{\sqrt{\frac{1}{1+tg^2\beta}}} = 2{,}5 \cdot \sqrt{1+25} = 2{,}5\sqrt{26}$

17. Из $\triangle AEB$: $AB = \frac{OE}{\sin\alpha} = \frac{OE}{\cos\beta} = 2{,}5\sqrt{26} \cdot \sqrt{26} = 2{,}5 \cdot 26 = 65$

18. Т.к. AB - диаметр, то радиус $R = \frac{1}{2}AB = \frac{65}{2}$

18. Из подобия $\triangle ADL$ и $\triangle AEH$: $\frac{AD}{AE} = \frac{r}{R} \Rightarrow r = R \cdot \frac{AD}{AE}$

19. По т. Пифагора: $AE = \sqrt{65^2 - 26 \cdot \frac{25}{2}} = \sqrt{65^2 - 5 \cdot 65} = \sqrt{60 \cdot 65}$

20. Аналогично: $DE = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{25}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{26} \Rightarrow AD = AE - OE = 10\sqrt{39} - \frac{1}{2}\sqrt{26}$

21. $r = \frac{65}{2} \cdot \frac{\sqrt{13}\,(10\sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{2})}{10\sqrt{13} \cdot \sqrt{3}} = \frac{65}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{20}\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

22. По т. о площади треуг: $S_{AFE} = \frac{1}{2} EF \cdot AE \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{39} \cdot 65 \cdot \cos\beta =$

$= 5\sqrt{39} \cdot 65 \left(\sqrt{26}\right)^{-1} = \frac{5 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{13} \cdot 65}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{13}} = 325\sqrt{\frac{3}{2}}$

Ответ: $\angle AFE = arctg\, 5$

$R = \frac{65}{2}$

$r = \frac{65}{2}\left(1 - 0{,}05 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

$S_{AFE} = 325\sqrt{\frac{3}{2}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

ОДЗ: $26x-x^2>0$

$x^2-26x<0$

На ОДЗ выражение x^2-26x всегда отрицательно, т.е. можно снять модуль:

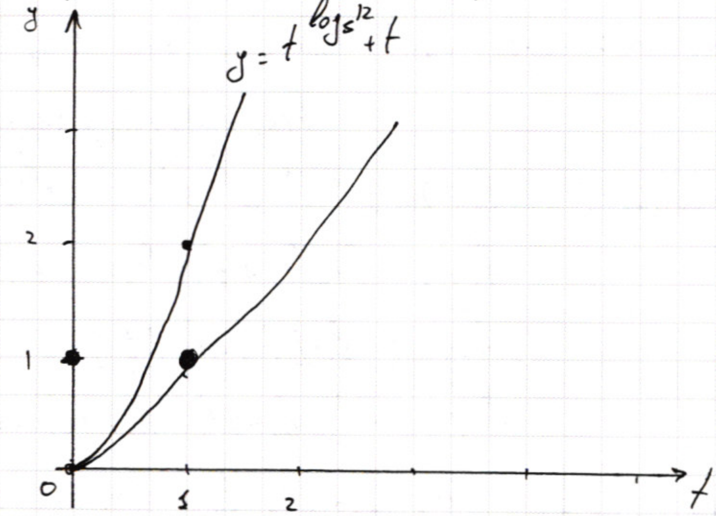
$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2 \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

Пусть $26x-x^2=t$, тогда неравенство имеет вид

$$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}, \text{ где } t>0.$$

Так как $\log_5 12>1$, то ф. $y=t^{\log_5 12}$ – возрастающая на всей области определения.

Ф. $y=t^{\log_5 12}+t$ – возрастающая, как сумма возрастающих функций.



Из графика $t\in(0;+\infty)$

$26x-x^2>0$

$x(26-x)>0$ (м. интерв.)

$-\quad +\quad -$

$0 \quad 26 \quad x$

Ответ: $(0;26)$

$\boxed{5}$ $f(ab)=f(a)+f(b)$

$a, b \in \mathbb{R}$, $a>0$, $b>0$

$f(p)=[\frac{p}{4}]$

Пусть число x раскладывается на следующие простые множители (т.к. x - натуральное от 4 до 28 : $x = 2^{a_1}\cdot 3^{a_2}\cdot 5^{a_3}\cdot 7^{a_4}\cdot 11^{a_5}\cdot 13^{a_6}\cdot 17^{a_7}\cdot 19^{a_8}\cdot 23^{a_9}$

Аналогично : $y = 2^{b_1}\cdot 3^{b_2}\cdot 5^{b_3}\cdot 7^{b_4}\cdot 11^{b_5}\cdot 13^{b_6}\cdot 17^{b_7}\cdot 19^{b_8}\cdot 23^{b_9}$

По условию: $f(ab)=f(a)+f(b)$, значит

$f(\frac{x}{y}) = f(x)+f(y^{-1})$. ОДЗ сохраняется, т.к. x и y - натуральные.

Для любого x найдётся представление его в виде произведения ~~натуральных~~ простых чисел, по осн. теор. арифметики, поэтому:

$f(x) = f(2^{a_1}\cdot 3^{a_2}\cdot \ldots \cdot 23^{a_9})$

$f(x) = f(2^{a_1})+f(3^{a_2})+f(5^{a_3})+\ldots+f(23^{a_9})$

$f(x) = a_1\cdot f(2)+a_2\cdot f(3)+\ldots+a_9\cdot f(23)$, тогда:

$f(x) = a_1\cdot[\frac{2}{4}]+a_2\cdot[\frac{3}{4}]+a_3[\frac{5}{4}]+a_4\cdot[\frac{7}{4}]+a_5\cdot[\frac{11}{4}]+a_6\cdot[\frac{13}{4}]+a_7[\frac{17}{4}]+a_8[\frac{19}{4}]+a_9[\frac{23}{4}]$

$f(x) = 0\cdot a_1+0\cdot a_2+a_3\cdot 1+1\cdot a_4+2\cdot a_5+3\cdot a_6+4\cdot a_7+4\cdot a_8+5\cdot a_9$

$f(x) = a_3+a_4+2a_5+3a_6+4a_7+4a_8+5a_9$

Аналогично : $f(y^{-1}) = f(2^{-b_1}\cdot 3^{-b_2}\cdot 5^{-b_3}\cdot \ldots \cdot 23^{-b_9})$

$f(y^{-1}) = f(2^{-b_1})+f(3^{-b_2})+\ldots+f(23^{-b_9})$

$f(y^{-1}) = -b_1\cdot[\frac{2}{4}]-b_2\cdot[\frac{3}{4}]-\ldots-b_9[\frac{23}{4}]$

$f(y^{-1}) = -b_3-b_4-2b_5-3b_6-4b_7-4b_8-5b_9$

Тогда $f(\frac{x}{y}) = (a_3-b_3)+(a_4-b_4)+2(a_5-b_5)+3(a_6-b_6)+4(a_7-b_7)+4(a_8-b_8)+$
$+5(a_9-b_9)$

$\boxed{6}$

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28 \quad , x \in \left[\frac{2}{3} ; 2\right]$$

Построим графики функций $y = \frac{8-6x}{3x-2}$

$g = 18x^2-51x+28$.

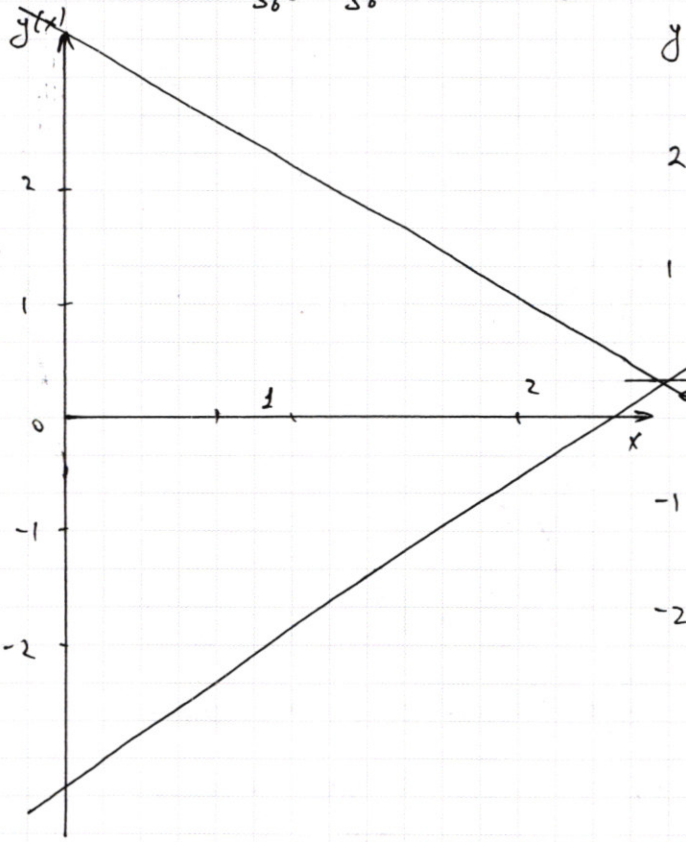
$$\frac{8-6x}{3x-2} = -2 + \frac{4}{3x-2} \Rightarrow y(x) - \text{гипербола}.$$

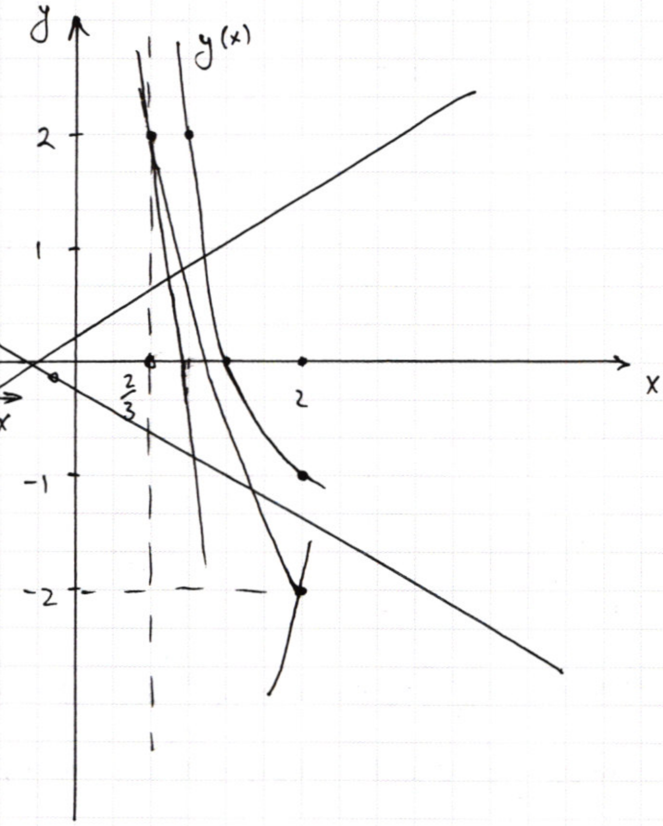
$g = 18x^2-51x+28$ (парабола, ветви вверх)

$D = 51^2 - 4 \cdot 18 \cdot 28 = 585$

$x_0 = \frac{51}{36}$

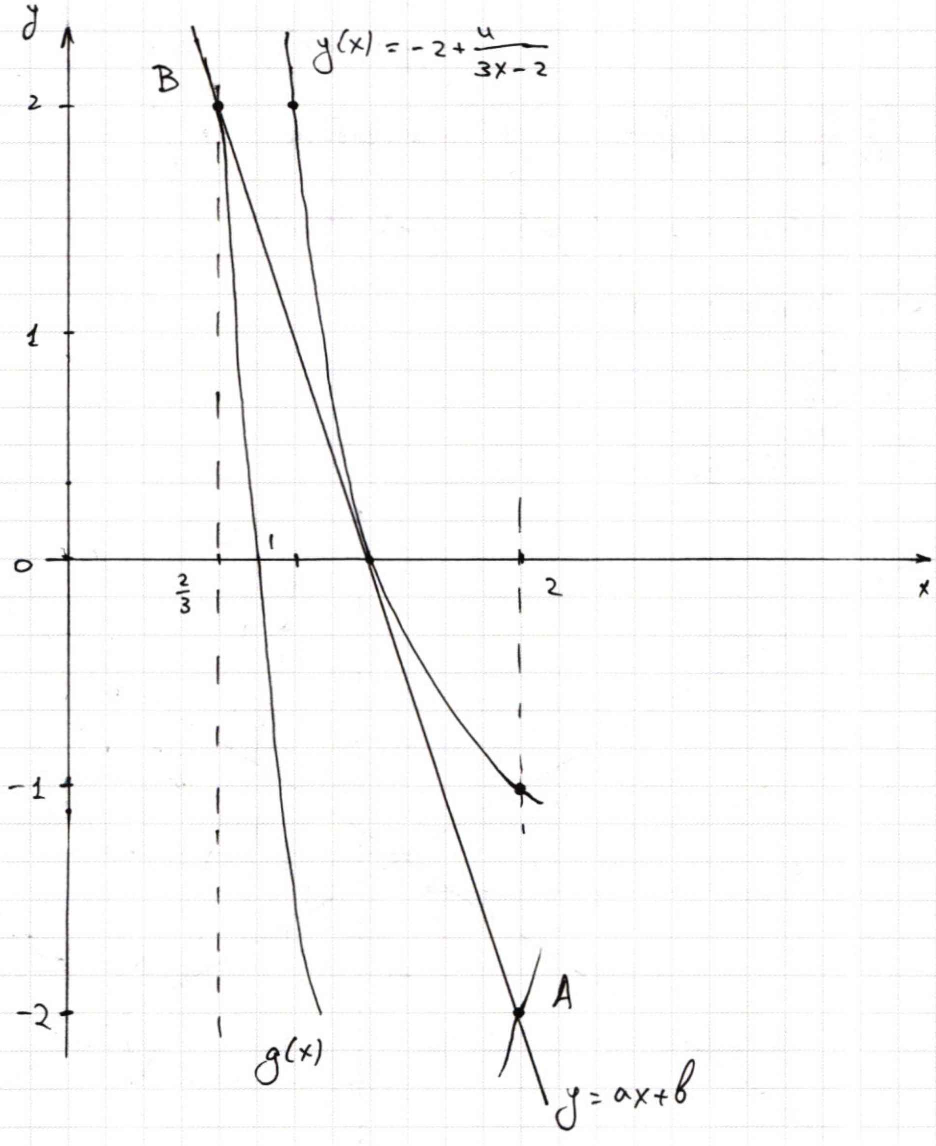
$y_0 = \frac{18 \cdot 51^2}{36^2} - \frac{51^2}{36} + 28 = -585$





ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6



Условие $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$ будет выполняться, если отрезок прямой $y = ax+b$, заключённый между $x = \frac{2}{3}$ и $x = 2$ будет находиться между графиками функций $g(x) = 18x^2-51x+28$ и $y(x) = \frac{8-6x}{3x-2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2)

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x-3)^2+(y-6)^2-9-36=45 \\ y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3x-3)^2+(y-6)^2=90 \\ y-6x\geq 0 \\ (y-6x)^2=xy-6x-y+6 \end{cases}$$

(3) : $y^2+36x^2-12xy=xy-6x+6-y$

$36x^2-13xy+6x+y+y^2-6=0$

$36x^2-(13y-6)x+(y^2+y-6)=0$

$D=169y^2+36-13\cdot6\cdot2y-36\cdot4\cdot(y^2+y-6)=$

$=169y^2+36-13\cdot12y-144y^2-36\cdot4y+36\cdot24=$

$=25y^2-300y+36\cdot25=(5y-30)^2$

$x=\frac{13y-6\pm(5y-30)}{2\cdot36}$

$x=\frac{13y-6+5y-30}{2\cdot36}$ или $x=\frac{13y-6-5y+30}{2\cdot36}$

$x=\frac{18y-36}{2\cdot36}$ $\qquad x=\frac{8y+24}{2\cdot36}$

$4x=y-2$ $\qquad 18x=2y+6$

$y=4x+2$ $\qquad 9x=y+3$

$\qquad y=9x-3$

$-2+\frac{4}{3x-2}$

$f'(x)=\frac{4}{3}\cdot\ln\frac{1}{3x-2}$

$\frac{4}{3}\ln\frac{1}{3x_0-2}=$

$y=kx+b$

$-2=2k+b$

$kx_0+b=-2+\frac{4}{3x_0-2}$

$13\cdot12$: 26, 13, 156; $156+144=300$

$f'(x)=4\cdot\frac{-3}{3x-2}=-\frac{12}{3x_0-2}$

$3kx_0-2k=-12$

$kx_0+b=-2+\frac{4}{3x_0-2}$

1) $(3x-3)^2+(4x+2-6)^2=90$

$9(x-1)^2+16(x-1)^2=90$

$25(x-1)^2=90$

$(x-1)^2=\frac{90}{25}$

$\left[\begin{array}{l} x-1=\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ x-1=\frac{-3\sqrt{10}}{5} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{3\sqrt{10}}{5}+1 \Rightarrow y=4\left(\frac{3\sqrt{10}}{5}+1\right)+2=6+\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ x=1-\frac{3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow y=4\left(1-\frac{3\sqrt{10}}{5}\right)+2=6-\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{array}\right.$

$\frac{18\cdot 4^2}{9}-\frac{51\cdot 2}{3}+28=$

$=8-34+28=$

$36-34=2$

Условие $y\geq 6x$ выполн. при

$-2+\frac{4}{3x-2}=ax+b$

$6x=\frac{18\sqrt{10}}{5}+6$

$6-\frac{18\sqrt{10}}{5}$

$f(y)=$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(2^{a_1-b_1}\cdot 3^{a_2-b_2}\cdot 5^{a_3-b_3}\cdot\ldots\cdot 23^{a_9-b_9}\right)=$

$\cancel{2(a_1-b_1+}\quad a_3-b_3+a_4-b_4+2(\ldots\ldots)\quad <0$

~~Если~~

$\frac{8-6x}{3x-2}=18x^2-51x+28$

$8-6x=(3x-2)(18x^2-51x+28)$

$8-6x=54x^3-36x^2-153x^2+102x+84x-56$

$54x^3-189x^2+192x-64=0$

$\frac{51\pm\sqrt{585}}{36}=\frac{51}{36}-\frac{\sqrt{585}}{36}=$

$=\frac{51}{36}-$

$54-189+192-64=$

$=\cancel{3-10+33}$

$18\cdot 4-51\cdot 2+28=$

$=40+32-102+28=$

-2

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

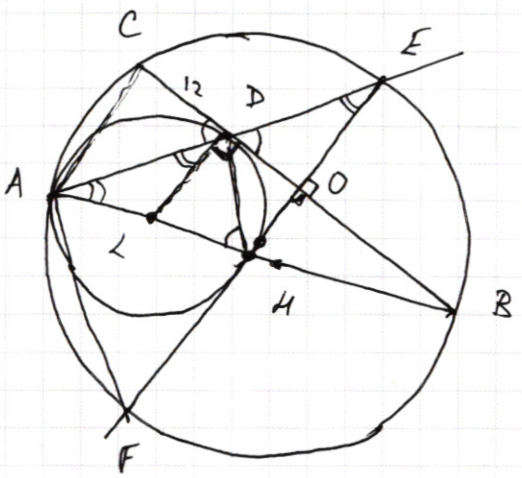
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$BD = 13$

$\angle AFE - ?$

$R_1 - ?\ R_2 - ?$

$S_{AFE} - ?$



1. По т. о хордах: $AD \cdot DE = 12 \cdot 13$

2. $\triangle ADH \sim \triangle EOD$: $\frac{OE}{AD} = \frac{OD}{DH} = \frac{ED}{AH}$

$AD \cdot DE = OE \cdot AH = 12 \cdot 13 = OE \cdot 2R_1$

$OE \cdot R_1 = 6 \cdot 13$

$\frac{\sqrt{15 \cdot 13}}{\sqrt{5 \cdot 13 \cdot 12{,}5}} = 2 \cdot 5\sqrt{13 \cdot 3}$

$AD^2 + DH^2 = 4R_1^2$

$\angle AFE = \alpha + 90 - 2\alpha =$

$= 90 - \alpha = \beta$

$\frac{AD}{DE}$

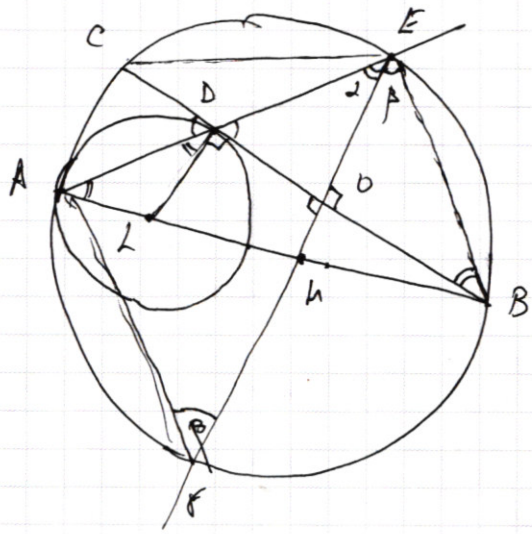
$\triangle ADL \sim \triangle AE$

$CO = OB$

$OD = x$

$12 + x = 13 - x$

$x = \frac{1}{2}$



$\left.\begin{array}{l} OE = \frac{1}{2}\,tg\beta \\ OE = 12{,}5 \cdot \frac{1}{tg\beta} \end{array}\right\} \Rightarrow OE^2 =$

$60 \cdot 65 = \sqrt{4 \cdot 15 \cdot 13 \cdot 5} =$

$= 2 \cdot 5\sqrt{39}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{1}$ $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$

1) $\frac{8-6x}{3x-2} = -2+\frac{4}{3x-2}$ – гипербола.

3) $18x^2-51x+28=y$

$D = 51^2-18\cdot 28\cdot 4 = 585 = 9\cdot 5\cdot 13$

$x = \frac{51\pm 3\sqrt{65}}{36}$

$\frac{8-6x}{3x-2}$; $-6x+8 \,|\, 3x-2$; $-6x+4$, -2; 4

$4\cdot 18-51\cdot 4+28 =$

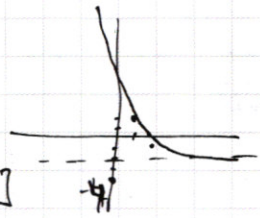
$=100-204$

$51\cdot 51$: 51, 255, 2601

$\frac{18\cdot 16}{9} - \frac{51\cdot 4}{3}+28 =$

$= 32-34-34+28$

$-2-6=-8$



Ф. $y=-2+\frac{4}{3x-2}$ – ~~возр~~ убыв. на $[\frac{2}{3};2]$

$18\cdot 28$: 144, 36, 504; $504\cdot 4 = 2016$

$2601-2016 = 585$

$585 \,|\, 3$; $195 \,|\, 3$; $65 \,|\, 5$; $13 \,|\, 13$

Ф. $y=18x^2-51x+28$

$x_0 = \frac{51}{36} = 1\frac{15}{36} = 1\frac{5}{12}$, $y_0 = \frac{18\cdot 51^2}{36^2} - \frac{51^2}{36}+28 = \frac{-51^2}{2\cdot 36}+28 =$

$= -585$

Ф. $g(x)$ ~~возр~~ убыв. на $[\frac{2}{3};\frac{51}{36}]$

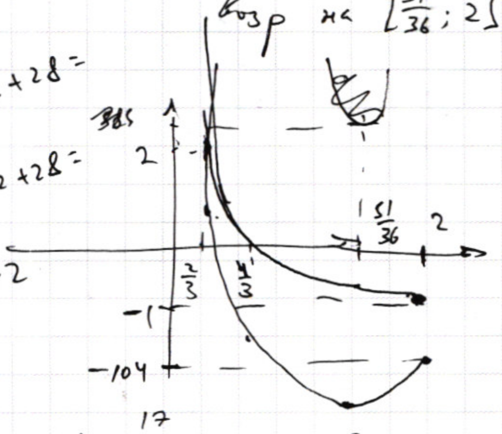
возр на $[\frac{51}{36};2]$

$28\cdot 2\cdot 36-51^2=585$

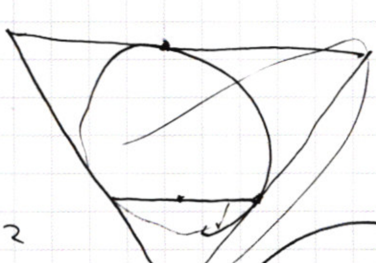
$18\cdot 4-51\cdot 2+28=$

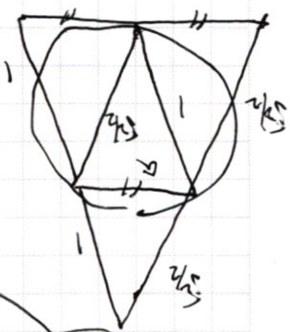
$=40+32-102+28=$

$=-62+60=-2$

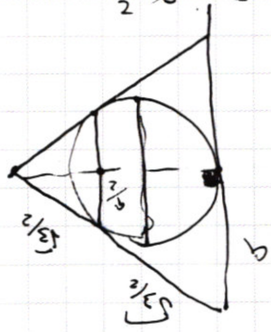


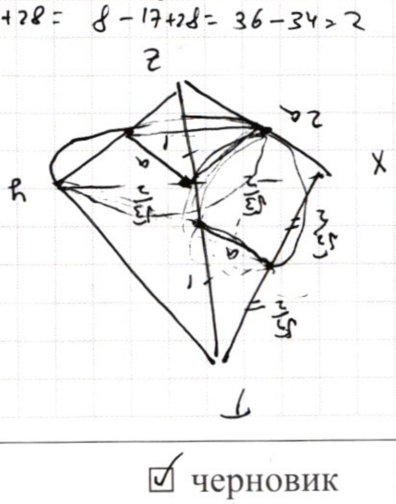
$E(18x^2-51x+28) =$ ~~585~~

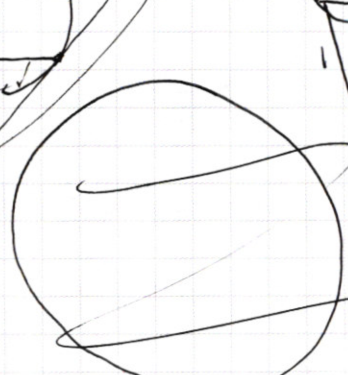




$\frac{18}{2}\cdot\frac{4}{9} - \frac{51\cdot 2}{3}+28 = 8-17+28 = 36-34=2$







☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3

$|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x - x^2 - 13^{\log_5(26x-x^2)} \geq 0$

$-x^2+26x>0$

$x^2<26x$

$(26x-x^2)^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$(26-x^2)=t$

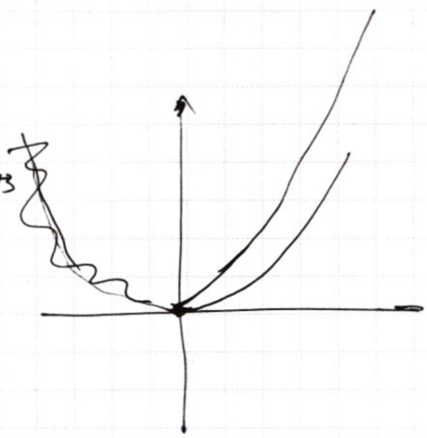
$t^{\log_5 12} + t^1 \geq 13^{\log_5 t}$ ~~$t \cdot 13$~~

~~$\log_t(t^{\log_5 12}+t) \geq \log_5 t \log_{t} 13$~~

~~$(t^{\log_5 12})' =$~~

$t^{\log_5 12} \approx t^{1,5}$

~~$13^{\log_5 t}$~~ $t^{\log_5 5}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\boxed{5}$

$a > 0$
$b > 0$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, p - простое

$x; y - N$

Пусть $x = 2^{a_1} \cdot 3^{a_2} \cdot 5^{a_3} \cdot 7^{a_4} \cdot 11^{a_5} \cdot 13^{a_6} \cdot 17^{a_7} \cdot 19^{a_8} \cdot 23^{a_9}$

$4 \le x \le 28$
$4 \le y \le 28$
$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$= f(2^{a_1}) + f(3^{a_2}) + f(5^{a_3}) + \ldots + f(23^{a_9}) + f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$= a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0 + a_3 \cdot 1 + a_4 \cdot 1 + a_5 \cdot 2 + a_6 \cdot 3 + a_7 \cdot 4 + a_8 \cdot 4 + a_9 \cdot 5 + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$= a_3 + a_4 + 2a_5 + 3a_6 + 4a_7 + 4a_8 + 5a_9 + f(2^{-a_1}) + f(3^{-a_2}) + f(5^{-a_3}) + \ldots$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(y^{-1}) =$