МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}; \\ x^2+36y^2-12x-36y=45; \end{cases} \quad ОДЗ: x \geq 12y.$$

$$\begin{cases} (x-12y)^2=2xy-12y-x+6, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-26xy+144y^2+12y+x-6=0, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x-18y+3)(x-8y-2)=0, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45; \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=18y-3, \\ 324y^2-108y+9+36y^2-216y+36-36y-45=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x=8y+2, \\ 64y^2+32y+4+36y^2-96y-24-36y-45=0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=18y-3, \\ 360y^2-360y=0; \end{cases} \\ \begin{cases} x=8y+2, \\ 100y^2-100y-65=0; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=18y-3, \\ y(y-1)=0; \end{cases} (1) \\ \begin{cases} x=8y+2, \\ 20y^2-20y-13=0; \end{cases} (2) \end{array}\right. \quad D=400+13\cdot20\cdot4=400+1040=1440; \sqrt{D}=12\sqrt{10}.$$

(1): $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=18\cdot0-3=-3; \\ y=0; \end{cases} - \quad -3\geq12\cdot0=0 \text{ — неверно, т.е. не удов. ОДЗ.} \\ \begin{cases} x=18\cdot1-3=15, \\ y=1; \end{cases} - \quad 15\geq12\cdot1=12 \text{ — верно, т.е. уд. ОДЗ и явл. решением.} \end{array}\right.$

№2

(2):

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = 8y+2, \\ y = \dfrac{20+12\sqrt{10}}{40}; \end{cases} \\ \begin{cases} x = 8y+2, \\ y = \dfrac{20-12\sqrt{10}}{40}; \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{ll}\begin{cases} x = \dfrac{40+24\sqrt{10}}{10}+2, \\ y = \dfrac{5+3\sqrt{10}}{10}; \end{cases} & (а) \\ \begin{cases} x = \dfrac{40-24\sqrt{10}}{10}+2, \\ y = \dfrac{5-3\sqrt{10}}{10}; \end{cases} & (б). \end{array}\right.$$

Проверим удовлетворяют ли ОДЗ найденные ответы:

(а) $4+\frac{24}{\sqrt{10}}+2 \geqslant 12\left(0,5+\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = 6+\frac{36}{\sqrt{10}}$;

$6+\frac{24}{\sqrt{10}} \geqslant 6+\frac{36}{\sqrt{10}}$;

$-\frac{12}{\sqrt{10}} \geqslant 0$ – неверно, т.е. не подходит.

(б): $4-\frac{24}{\sqrt{10}}+2 \geqslant 12\left(0,5-\frac{3}{\sqrt{10}}\right) = 6-\frac{36}{\sqrt{10}}$;

$6-\frac{24}{\sqrt{10}} \geqslant 6-\frac{36}{\sqrt{10}}$;

$\frac{12}{\sqrt{10}} \geqslant 0$ – верно, т.е. подходит и $\begin{cases} x = 6-\frac{24}{\sqrt{10}}, \\ y = 0,5-\frac{3}{\sqrt{10}}; \end{cases}$ – решение

Ответ: $\left\{(15;1);\left(6-\frac{24}{\sqrt{10}};\ 0,5-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)\right\}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

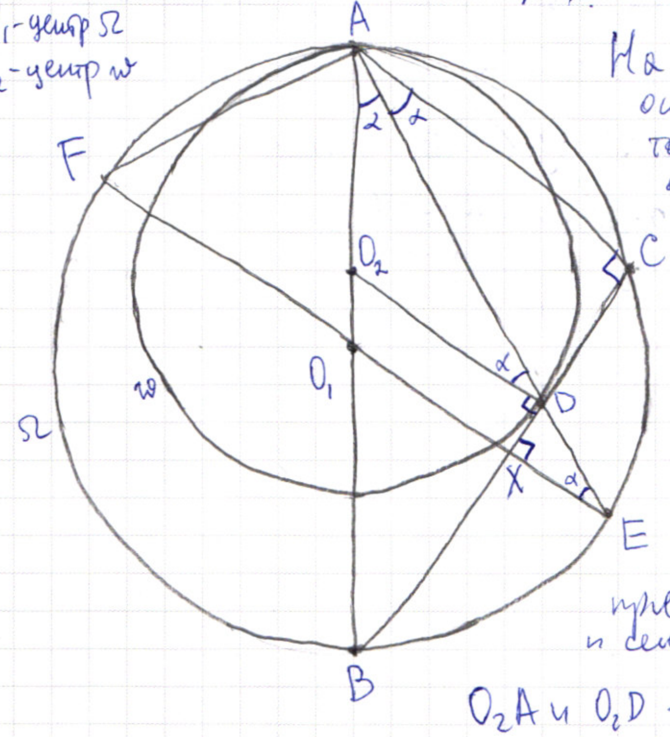
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

O_1 - центр Ω

O_2 - центр ω



На прямой, содержащей точку касания окружностей и центр одной из них также будет лежать и центр второй окружности, т.е. A, O_2, O_1, B на одной прямой.

Т.к. BC касается ω в точке D, то радиус $O_2D \perp BC$.

Т.к. $O_2D \perp BC$ и $FE \perp BC$, то

$O_2D \parallel FE$.

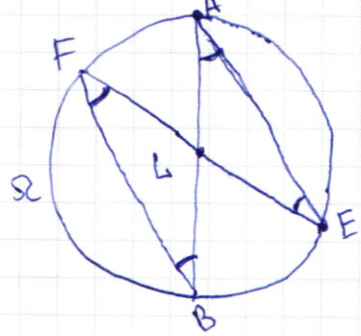
$\angle AEF = \angle ADO_2$, как углы соответственные при параллельных прямых O_2D и FE и секущей AE.

O_2A и O_2D - радиусы ω, т.е. $\triangle O_2AD$ - р/б с осн. AD.

$\angle DAO_2 = \angle ADO_2$, как углы при основании р/б $\triangle O_2AD$.

$\angle AEF = \angle ADO_2 = \angle DAO_2 = \angle EAL$, где L - пересечение AB и FE.

Получаем следующий рисунок ←.



$\angle AEL = \angle AEF = \angle EAL$, т.е. $\triangle LAE$ р/б, т.к. два его угла равны. т.е. $AL = LE$.

$\angle EFB = \angle EAB$, т.к. опираются на одну дугу BE Ω.

$\angle ABF = \angle AEF$, т.к. опираются на одну дугу AF Ω.

$\angle ABF = \angle AEF = \angle EAB = \angle EFB$, т.е. в $\triangle LFB$ $\angle LFB = \angle LBF$, т.е. $\triangle LFB$ р/б.

т.е. $FL = LB$. $AB = AL + LB = LE + FL = FE$, т.е. $FE = AB =$ диаметр Ω, т.е. FE диаметр. Т.е. проходит через центр O_1, как и AB, т.е. их точка пересечения L совпадает с O_1. Т.е. $F - O_1 - E$ на одной прямой.

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$;

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$;

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$; $\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{5}{25}} = \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$;

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{5}} \pm \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$;

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) \pm 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta + \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha\left(1+\frac{1}{5}-\frac{2}{5}\right) \pm \cos 2\alpha \cdot \frac{2\cdot 1\cdot 2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}} =$

$= \frac{4}{5}\sin 2\alpha \pm \frac{4}{5}\cos 2\alpha = -\frac{2}{5}$;

1 сл) $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$;

$$\begin{cases} \sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1; & (1) \\ 2\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -2; & (2) \end{cases}$$

(2) − (1): $\sin 2\alpha = -1$;

$2\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$;

$\alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$;

$tg\left(\frac{3\pi}{4}+\pi k\right) = tg\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -1$;

2 сл) $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$;

$$\begin{cases} \sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1, & (1) \\ 2\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -2, & (2) \end{cases}$$

(2) − (1): $\sin 2\alpha = -1$; далее аналогично с 1 сл.

Ответ: $\{-1\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$\angle ACB = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр AB окружности Ω.

Т.е. $AC \perp BC$, т.е. $AC \parallel O_2D \parallel FE$, т.к. они все $\perp BC$.

~~Т.к.~~ X – точка пересечения BC и FE.

Т.к. $O_1X \parallel AC$ (стороне $\triangle ABC$) и проходит через середину другой стороны AB (O_1 - середина диаметра), то O_1X средняя линия в $\triangle ABC$ и делит BC также пополам ($BX = XC$).

$BC = BD + CD = \frac{15}{2} + \frac{17}{2} = \frac{32}{2} = 16$; $BX = XC = \frac{1}{2}BC = 8$.

Т.к. $O_2D \parallel AC$, то $\triangle BO_2D \sim \triangle BAC$, т.е.

$\frac{BO_2}{AB} = \frac{BD}{BC} = \frac{\frac{17}{2}}{16} = \frac{17}{32}$; $BO_2 = AB - AO_2 = 2R - r$, где R - радиус Ω, r - радиус ω.

$AB = 2R$.

$\frac{2R - r}{2R} = \frac{17}{32}$; $64R - 32r = 34R$; $32r = 30R$; $\boxed{R = \frac{32}{30}r = \frac{16}{15}r}$;

В прямоугольном $\triangle BO_2D$: $BO_2 = 2R - r$; $O_2D = r$; $BD = \frac{17}{2}$;

$BO_2 = \frac{2\cdot 16}{15}r - r = \frac{32-15}{15}r = \frac{17}{15}r$; O_2B - гипотенуза.

$\left(\frac{17}{15}r\right)^2 = r^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2$;

$\frac{289 - 225}{225}r^2 = \frac{289}{4}$;

$r^2 = \frac{289\cdot 225}{4\cdot 64} = \frac{17^2\cdot 15^2}{16^2}$; $r = \frac{17\cdot 15}{16} = \frac{255}{16} = \underline{15\frac{15}{16}}$;

$R = \frac{16}{15}r = \frac{16\cdot 17\cdot 15}{15\cdot 16} = \underline{17}$;

$\angle EAC = \angle AEF = \alpha$, как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых AC и FE и секущей AE.

$\angle EAB = \angle AEF = \alpha$;

Т.е. $\angle CAB = \angle CAE + \angle EAB = \alpha + \alpha = 2\alpha$;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.

$\angle DO_2B = \angle CAB$, как соответствующие углы при параллельных прямых ~~FB~~ O_2D и AC и секущ. AB.

$\angle DO_2B = 2\alpha$;

$\sin \angle DO_2B = \frac{BD}{O_2B} = \frac{BD}{2R-r} = \frac{\frac{17}{2}}{2\cdot 17 - \frac{17\cdot 15}{16}} = \frac{1}{4-\frac{15}{8}} = \frac{8}{17}$;

$\angle DO_2B = \arcsin\frac{8}{17}$;

$\alpha = \frac{\angle DO_2B}{2} = \frac{\arcsin\frac{8}{17}}{2}$;

$\angle AEF = 180^\circ - \angle FAE - \angle AEF$, где $\angle AEF = \alpha$; $\angle FAE = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр FE.

$\angle AEF = 180^\circ - 90^\circ - \alpha = 90^\circ - \cancel{\arcsin\frac{8}{17}}\ \frac{\arcsin\frac{8}{17}}{2}$;

Т.к. $\triangle AEF$ прямоуг., то $S_{AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot AE$;

$AF = FE \cdot \sin\left(\frac{\arcsin\frac{8}{17}}{2}\right) = 2R\cdot\sin\left(\frac{\arcsin\frac{8}{17}}{2}\right) = 34\sin\left(\frac{\arcsin\frac{8}{17}}{2}\right)$.

$AE = FE\cdot\cos\left(\frac{\arcsin\frac{8}{17}}{2}\right) = 34\cos\left(\frac{\arcsin\frac{8}{17}}{2}\right)$.

$S_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot 34\cdot 34\cdot \sin\left(\frac{\arcsin\frac{8}{17}}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{\arcsin\frac{8}{17}}{2}\right) = 17^2\cdot\sin\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)$

$= 17^2\cdot\frac{8}{17} = 8\cdot 17 = 136$.

Ответ: $R = 17$; $r = 15\frac{15}{16}$;

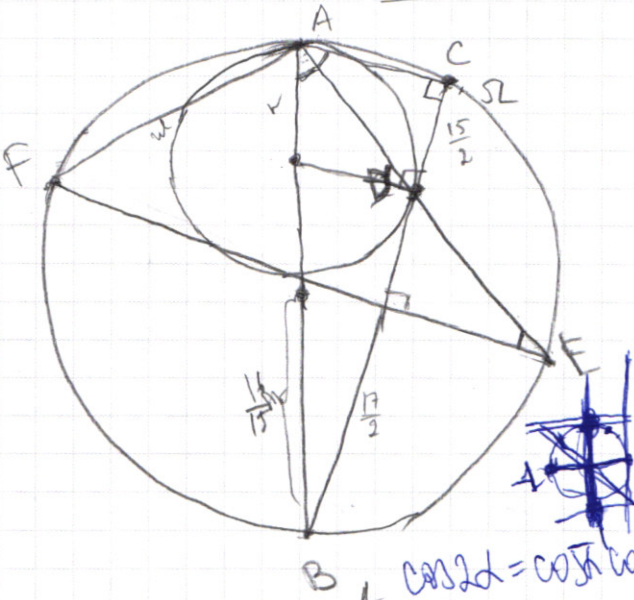
$\angle AEF = 90^\circ - \frac{\arcsin\frac{8}{17}}{2}$;

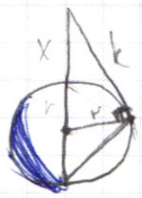
$S_{AEF} = 136$;

1 $\boxed{2}$ 3 4 5 6 7

$\frac{20}{25}=\frac{4}{5}$ $4\cdot 8=32$

$17+15=32$





$\frac{\frac{17}{2}}{2\cdot 16-\frac{17\cdot 15}{16}}$

$\frac{1}{4-\frac{30}{16}}=\frac{15}{8}$

$\frac{8}{32-15}=$

$\frac{2R}{r}=16$

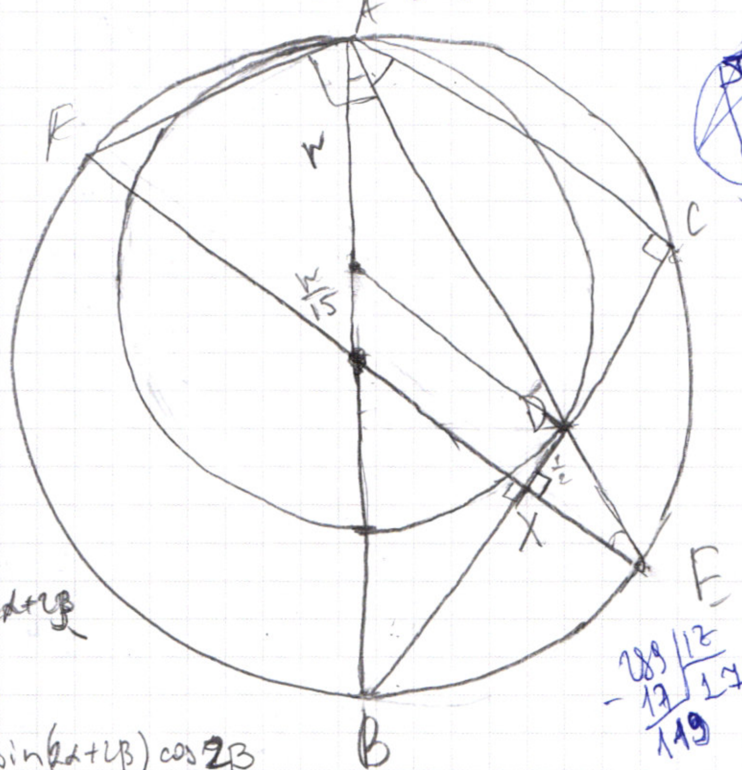
$2R=16r;$ $8r=R$

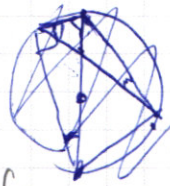
$\frac{1}{17}$

$\frac{2R}{2R-r}=\frac{\frac{32}{2}}{\frac{17}{2}}=\frac{32}{17}$

$\cos 2\alpha=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$ $34R=64R-32r;$ $\frac{-64}{34}{30}$

$32r=30R;$





$R=\frac{32}{30}r=\frac{16}{15}r$

$\sin\alpha=-1.$ $1+\frac{1}{5}-\frac{2}{5}=$

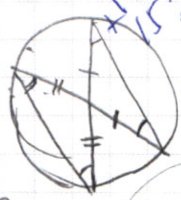
$BX=CX=\frac{1}{2}\cdot\frac{32}{2}=8.$ $1-\frac{1}{5}=$

$2R-r;$ $r\frac{5}{5}-\frac{1}{5}\cdot\frac{17}{2}=\frac{4}{5}$

$\frac{\sqrt{5}}{5}$ r^2- $64=4\cdot4\cdot4$

$\frac{289}{-225}{64}$ $256.$ $8\cdot 8$ $2\cdot 2\cdot 2\cdot 0$ $\frac{-255 \mid 15}{15 \mid 17}{105}{105}$

$\frac{17}{15}=32$ 64



$2\alpha+2\beta$

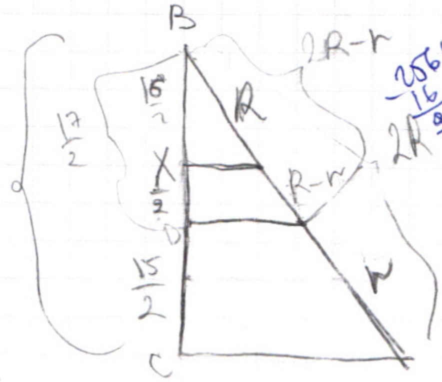
$-\frac{289 \mid 17}{17 \mid 17}{119}$ $\times\frac{17}{17}{119}{+17}{289}$ $\times\frac{17\times15}{15}{85}{+17}{255}$

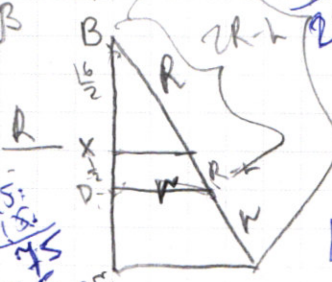
$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos 2\beta=$

$\frac{R}{2R-r}=\frac{1}{\frac{1}{2}}\frac{9}{}=18$ $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};$





$-2-(-1)=$ -1 4

~~$R=36R-18r$~~

$\frac{-136 \mid 8}{8 \mid 17}{56}$ $\frac{-256 \mid 16}{16 \mid 16}{96}$ $\times\frac{15}{15}{75}{+15}{225}$

$\frac{R}{2R-r}=\frac{16}{17},$ $17R=32R-16r;$

$17\cdot 2=34$ $15R=16r,$ $R=\frac{16}{15}r,$

$\times\frac{8}{17}{136}$

$\frac{2R-r}{2R}=\frac{17}{32},$ $R=\frac{32}{30}r$

$64R-32r=34R$ $32r=30R$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(10x - x^2) + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 = t, \quad t > 0.$ $\boxed{20y^2 - 10y + 13 = 0}$ $4^{\log_3 4} = 3.$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

бливатина

$[24, 3?]$ $x \geq 12y$ $400 + 1040 =$

$t = t^{\log_3 3}$

$a^{\log_b c} = b^{\log_c a}$ $144 + 36 = 180$ $1440 = 12^2 \cdot 10$

$(x - \ y)(x \ y)$ $5^{\log_3 t} = 3^{\log}$ $45 = 36 + 9$

t^k $5^{\log_3 t}$ $t^{\log_3 t} = 3$ $5^{\log_3 t} = 6 \cdot 2 \cdot 3$

$(x - 18y + 3)(x - 8y - 2) = 0$ $5^k = t^{\log_3 5}$ $6 \cdot 6$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$x^2 - 18xy - 2x - 8xy + 144y^2 + 16y + 3x -$

$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6,$ $144 - 36 = 108$

$+3ky - 2ly =$

$3k - 2l = 12,$ $(x-6)^2 + (6y-3)^2 = x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 =$

$(x - 12y)(x - 12y) = x^2 - 12xy - 12xy + 144y^2$

$(18y - 3)^2 = 324y^2 - 108y + 9$

$l : 3$

$k : 2$

$x^2 - 12x + 36y^2 - 36y = \underbrace{(x-6)^2 + (6y-3)^2}_{} - 45.$

$kl = 144$ $x^2 - 8xy - 2x - 18xy + 144y^2 + 36y + 3x - 24y - 6 =$

$l = \frac{144}{k}$ $\boxed{x^2 - 26xy + 144y^2 + 12y + x - 6 = 0}$ $12 = 5 \cdot 2 \cdot k$ $k = 1{,}2$

ничего не получится.

$3k^2 - 288 = 12k,$ $x^2 - 26xy + 169y^2 - 25y^2 + 12y + x - 6$ $\frac{5 - 3\sqrt{10}}{}$ $0{,}25x^2$

$k^2 - 4k - 96 = 0,$ $(x - 13y)^2 - (5y - 1{,}2)^2 + x - 1{,}44 = 0,$

$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y - 45 = 0,$

$16 + 384 = 400,$ $96 \times 4 = 384$ $\frac{4 + 20}{2} = 12$ $1{,}2 \times 1{,}2 = 1{,}44.$ 1440 $48 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$

$0{,}36x^2 - 26xy +$

$45 - 6 =$

$26 = 0{,}36 \cdot 2 \cdot k$ $\frac{4 - 20}{2} = -8$ $48 = 3 \cdot$

$-26xy + 108y^2 + 48y + 13x + 30 = 0$

$1 = 0{,}36 \cdot 2 \cdot k$ $18 \cdot 12 = 216$

$13x(1 - 2y) +$

$y^2 - y = 0,$ $1{,}44$ $108 = 27 \cdot 4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$

$-3 \cdot 8 + 2 \cdot 18 =$

$-8 - 18$ $y(y-1) = 0,$ $108 + 216 = 324$ $324 + 36 = 360$

$36 - 24 = 12$ $65 / 5 = 13$ $216 / 12 = 18$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)