МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5) $f(a) = f(a \cdot 1) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(1) = f(\frac{a}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a}) = 0 \Rightarrow f(a) = -F(\frac{1}{a})$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(y) > F(x)$

$f(2) = 0$ (т.к. 2 - простое)
$f(3) = 0$ (т.к. 3 - простое)
$f(4) = f(2) + f(2) = 0$
$f(5) = 1$
$f(6) = f(2) + f(3) = 0$
$f(7) = 1$
$f(8) = 0$
$f(9) = 0$
$f(10) = 1$
$f(11) = 2$
$f(12) = 0$
$f(13) = 3$
$f(14) = 1$
$f(15) = 1$
$f(16) = 0$
$f(17) = 4$
$f(18) = 0$
$f(19) = 4$
$f(20) = 1$
$f(21) = 1$
$f(22) = 2$
$f(23) = 5$
$f(24) = 0$
$f(25) = 2$
$f(26) = 3$
$f(27) = 0$

кол-во арг., при кот. функция равна:

0 : 10 арг (2 не считаем, т.к. $x, y \geq 3$)

1: 7 арг

2: 3 арг

3: 2 арг

4: 2 арг

5 : 1 арг.

$f(y) > F(x)$:

$f(y) = 5 \Rightarrow$ 1вар. для y, 24 вар для $x \Rightarrow$ 24 пары

$f(y) = 4 \Rightarrow$ 2вар. для y, 22 вар. для $x \Rightarrow$ 44 пары

$f(y) = 3 \Rightarrow$ 2 вар для y, 20 вар. для $x \Rightarrow$ 40 пар

$f(y) = 2 \Rightarrow$ 3 вар для y, 17 вар для $x \Rightarrow$ 51 пара

$f(y) = 1 \Rightarrow$ 7 вар для y, 10 вар для $x \Rightarrow$ 70 пар

Всего: $24 + 44 + 40 + 51 + 70 = 129$ пар

Ответ: 129 пар

№2) $\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$

$(3y - 2x)^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$, при усл.: $y \geq \frac{2}{3}x$

$9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x + 3y - 2 = 0$

$9y^2 + (3 - 15x)y + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

$D = (3 - 15x)^2 - 36(4x^2 + 2x - 2) = 81x^2 - 162x + 81 = (9(x-1))^2$

$$y = \frac{15x - 3 \pm 9(x-1)}{18}$$

$$\left[\begin{aligned} y &= \tfrac{4}{3}x - \tfrac{2}{3} \\ y &= \tfrac{1}{3}x + \tfrac{1}{3} \end{aligned}\right.$$

$$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$$

$$3(x-1)^2 + 3\left(y - \tfrac{2}{3}\right)^2 - 3 - \tfrac{4}{3} = 4$$

$$(x-1)^2 + \left(y - \tfrac{2}{3}\right)^2 = \tfrac{25}{9}$$

$$(x-1)^2 + \left(\tfrac{4}{3}x - \tfrac{4}{3}\right)^2 = \tfrac{25}{9} \quad \text{или} \quad (x-1)^2 + \left(\tfrac{1}{3}x - \tfrac{1}{3}\right)^2 = \tfrac{25}{9}$$

$$(x-1)^2 + \tfrac{16}{9}(x-1)^2 = \tfrac{25}{9} \qquad \tfrac{10}{9}(x-1)^2 = \tfrac{25}{9}$$

$$(x-1)^2 = 1 \qquad (x-1)^2 = \tfrac{5}{2}$$

$$x - 1 = \pm\sqrt{\tfrac{5}{2}}$$

$$\left[\begin{aligned} x &= 2 \\ x &= 0 \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} x &= 1 - \sqrt{\tfrac{5}{2}} \\ x &= 1 + \sqrt{\tfrac{5}{2}} \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} x = 2 \\ y = \tfrac{4}{3}\cdot 2 - \tfrac{2}{3} = 2 \end{cases} \\ &\begin{cases} x = 0 \\ y = -\tfrac{2}{3} \end{cases} \text{ - не подх. под усл.} \end{aligned}\right. \qquad \left[\begin{aligned} &\begin{cases} x = 1 - \sqrt{\tfrac{5}{2}} \\ y = \dfrac{2 - \sqrt{\tfrac{5}{2}}}{3} \end{cases} \\ &\begin{cases} x = 1 + \sqrt{\tfrac{5}{2}} \\ y = \dfrac{2 + \sqrt{\tfrac{5}{2}}}{3} \end{cases} \text{ - не подх под усл.} \end{aligned}\right.$$

Ответ: $(2; 2)$; $\left(1 - \sqrt{\tfrac{5}{2}}; \dfrac{2 - \sqrt{\tfrac{5}{2}}}{3}\right)$

№6) $f(x) = \dfrac{4x-3}{2x-2}$ - гипербола

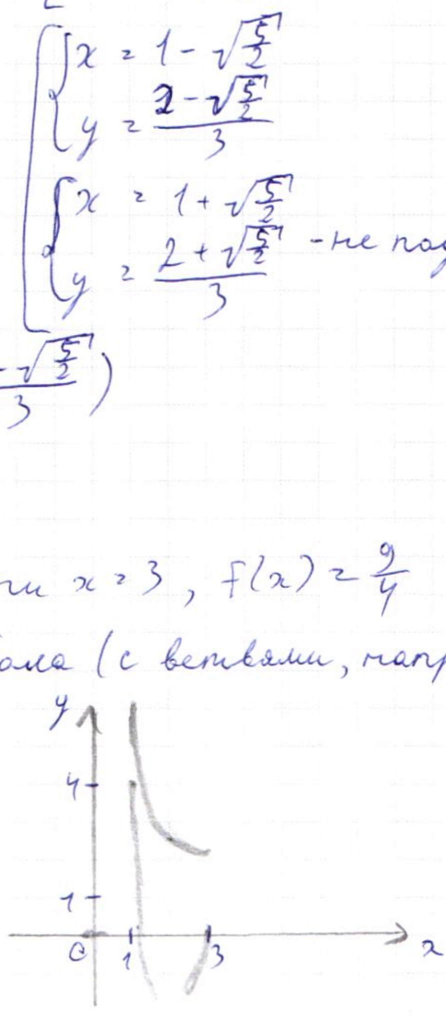
при $x \to 1$, $f(x) \to \infty$, при $x = 3$, $f(x) = \frac{9}{4}$

$g(x) = 8x^2 - 34x + 30$ - парабола (с ветвями, напр. вверх)

$g(1) = 4$, $g(3) = 0$

$ax + b$ - прямая.

она должна быть выше параболы и ниже гиперболы на луче $x \in (1; 3]$.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Рассмотрим прямую, проходящую через точки $(1; 4)$ и $(3; 0)$. По графику видно, что эта прямая будет выше параболы (при $x \in (1; 3)$), а в т. $x = 3$ будет её пересекать

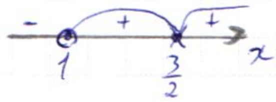
$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-4}{-4}$$

$$y = -2x + 6$$

$$-2x + 6 \le \frac{4x-3}{2x-2}$$

$$\frac{4x-3+(2x-6)(2x-2)}{2x-2} \ge 0$$

$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{(x-1)} \ge 0$$



Такая прямая удовлетворяет условию на пром. $x \in (1; +\infty)$

При этом она касается гиперболы в т. $x = \frac{3}{2}$.

Это единственная прямая, удовлетворяющая усл., т.к. при её пар. переносе вверх или вниз или изм. угла наклона, на ~~[illegible]~~ определённом промежутке внутри $(1; 3]$ она будет лежать выше гиперболы или ниже параболы.

Ответ: $(-2; 6)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

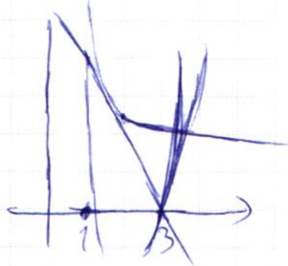
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(y)=2 \Rightarrow y = 11/22/25 \quad x - 17$ шт $\Rightarrow$ $17 \cdot 3 = 51$ $\quad$ 51 пара

$f(y)=1 \Rightarrow y$ ~~28~~ -7 шт, $x - 10$ шт $\Rightarrow 70$ пар

Отв: $24+44+40+51+70 =$ ~~108+123=231~~ ~~пара~~ $108+121=129$



$D = 100 - 72 = 28$

$x = \frac{10 \pm 2\sqrt{7}}{8} =$

$x = \frac{5+\sqrt{7}}{4}$

$x = \frac{5-\sqrt{7}}{4}$

$a=-2,\ b=6$

$-2x+6 \geq 8x^2 - 34x + 30$

$8x^2 - 32x + 24 \leq 0$

$x^2 - 4x + 3 \leq 0$

$\begin{cases} x=3 \\ x=1 \end{cases}$

$+ \quad 1 \quad - \quad 3 \quad +$

$-2x+6 \geq \frac{4x-3}{2x-2}$

~~$-4x^2+12x+2x-12 \geq 4$~~

$\frac{-4x^2+12x-2x-12-4x+3}{2x-2} \geq 0$

$\frac{4x^2-10x+9}{2(x-1)} \geq 0$

$\frac{2\left(x-\frac{5+\sqrt{7}}{4}\right)\left(x-\frac{5-\sqrt{7}}{4}\right)}{(x-1)} \geq 0$

$- \quad \frac{5-\sqrt{7}}{4} \quad + \quad 1 \quad - \quad \frac{5+\sqrt{7}}{4} \quad + \quad x$

~~$\frac{5+\sqrt{7}}{4} - 3 = \frac{\sqrt{7}-7}{4} \geq 0 \Rightarrow$~~

~~$x \in \left(1; \frac{5+\sqrt{7}}{4}\right]$~~

$-2x+6 \geq \frac{4x-3}{2x-2}$

$D = 144 - 144 = 0 \quad x = \frac{12}{8}$

~~$x = \frac{12 \pm 6\sqrt{2}}{8}$~~

$\frac{4x-3+(2x-6)(2x-2)}{2x-2} \geq 0$

$\frac{4x-3+4x^2-12x-4x+12}{2(x-1)} \geq 0$

$\frac{4x^2-12x+9}{2(x-1)} \geq 0$

$- \quad 1 \quad + \quad \frac{3}{2} \quad +$

$\frac{4\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{2(x-1)} \geq 0$

Отв: $(-2;6)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3y-2x=3y-2\\3y-2x=x-1\end{cases}\\3y-2x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\3y=3x-1\end{cases}\\y=\frac{2}{3}x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=1\\y=\frac{2}{3}\end{cases}\\y=\frac{2}{3}x\end{array}\right. \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x$$

$x=1$

$(3y-2x)^2=(3y-2)(x-1)$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$9y^2+(3-15x)y+4x^2+2x-2=0$

$D=(3-15x)^2-36(4x^2+2x-2)=$

$=9-90x+225x^2-144x^2-72x+72=$

$=81x^2-162x+81=81(x^2-2x+1)=$

$=(9(x-1))^2$

$y=\frac{15x-3\pm 9(x-1)}{18}$

$\left[\begin{array}{l}y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}\\y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}\end{array}\right.$

$(x-1)^2+\left(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$

$(x-1)^2+\frac{1}{9}(x-1)^2=\frac{25}{9}$

$(x-1)^2=\frac{5}{2}$

$x-1=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$x=1\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$(x-1)^2+\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$

$\frac{5}{3}(x-1)^2=\frac{25}{9}$

$(x-1)^2=\frac{5}{3}$

$x-1=\pm\sqrt{\frac{5}{3}}$

$\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{\frac{5}{3}}+1\\x=1-\sqrt{\frac{5}{3}}\end{array}\right.$

$(x-1)^2+\left(\frac{4}{3}x-\frac{4}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$

$\frac{7}{3}(x-1)^2=\frac{25}{9}$

$(x-1)^2=\frac{25}{21}$

$x-1=\pm\frac{5}{\sqrt{21}}$

$x=1\pm\frac{5\sqrt{21}}{21}$

$(x-1)^2+\frac{16}{9}(x-1)^2=\frac{25}{9}$

$(x-1)^2=1$

$x-1=\pm 1$

$\left[\begin{array}{l}x=2\\x=0\end{array}\right.$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$3^{\log_4(x^2+6x)}\geq(x^2+6x)^{\log_4 5}-(x^2+6x)$

$3^{\log_4(x^2+6x)}\geq(x^2+6x)\left((x^2+6x)^{\log_4\frac{5}{4}}-1\right)$

ОДЗ: $x^2+6x>0$

$\left[\begin{array}{l}x>0\\x<-6\end{array}\right.$

~~Отв: $x=0$, $x=2$, $x=1\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$~~

$\frac{x-1}{2}=\frac{y-4}{-4}$ $y=-2x+6$

$-2(x-1)=y-4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4(x^2+6x)} \geq (x^2+6x)\left((x^2+6x)^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1\right)$

$3^{\log_4(x^2+6x)}$

$-8\sin^2(2a+2\beta) = \sin(2a+4\beta) + \sin 2a$

$4\cos 4(a+\beta) - 1 = \sin(2a+4\beta) + \sin 2a$

$\cancel{4(\cos 4a \cos 4\beta - \sin 4a \sin 4\beta) - 1 = \sin 2a \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2a + \sin 2a}$

$3^{\log_4 x} \cdot 3^{\log_4 x+6} \geq (x(x+6))^{\log_4 5} - x(x+6)$

$\log_4 3 \cdot \log_4(x^2+6x) \geq \cancel{\log_4(x^2+6)\cdot \log_4 5}\ \log_4(x^2+6x) + \log_4\left((x^2+6x)^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1\right)$

$\log_4\left((x^2+6x)^{\log_4 5} - (x^2+6x)\right)$

$\log_4(x^2+6x)(\log_4 3 - 1) \geq \log_4\left((x^2+6x)^{\log_4 5 - 1} - 1\right)$

$\cancel{\log_4(x^2+6x) \geq \log_4 1}$

$\log_4\left(3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2+6x\right) \geq \log_4 5 \cdot \log_4(x^2+6x)$

$\log_5\left(3^{\log_4(x^2+6x)} + x^2+6x\right) \geq \log_4(x^2+6x)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$\sin 2(a+b) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$~~ $\quad$ ~~$\sin 2(a+2b) + \sin 2a = -\frac{8}{17}$~~

~~$2\sin(a+b)\cos(a+b) = 2\sin a\cos b = \sin b \cdot 2a$~~

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

— окр. с ц. $(1; \frac{2}{3})$ и

ОДЗ: $3xy - 2x - 3y + 2 \geq 0$

$$\begin{cases} (3y-2x)^2 = 3xy - 2x - 3y + 2 \\ 3y - 2x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2 \\ 3y - 2x \geq 0 \end{cases}$$

$9y^2 - 15xy + 4x^2 + 2x + 3y - 2 = 0$

$3y(3y - 5x + 1) + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

~~$(2x + \frac{1}{2})^2 - 2\frac{1}{4}$~~

~~$2\sqrt{3}x = 4$~~

~~$x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$~~

~~$3x^2 - 6x + 3y^2 - 4y - 4 = 0$~~

~~$(\sqrt{3}x - \sqrt{3})^2 + (\sqrt{3}y - \frac{2\sqrt{3}}{3})^2 - 4 - 3 - \frac{4}{3} = 0$~~

~~$\sqrt{3}(x-1)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{25}{3}$~~

~~$(x-1)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{25\sqrt{3}}{9}$~~

~~$x^2 - 2x + 1 + y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = \frac{25\sqrt{3}}{9}$~~

~~$3x^2 - 6x + 3 + 3y^2 - 4y + \frac{4}{3} = \frac{25\sqrt{3}}{3}$~~

~~$3x^2 - 6x + 3y^2 - 4y = \frac{25\sqrt{3} + 13}{3}$~~

~~$3(x-1)^2 + 3(y - \frac{2}{3})^2 - 4 - 3 - \frac{4}{3}$~~

~~$(x-1)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{25}{9}$~~

~~$x^2 - 2x + 1 + y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9} = \frac{25}{9}$~~

~~$3x^2 - 6x + 3y^2 - 4y + 3 + \frac{4}{3} = \frac{25}{3}$~~

~~$4x^2 + (2 - 15y)x + 9y^2 + 3y - 2 = 0$~~

~~$D = (2-15y)^2 - 16(y - \frac{1}{3})(y + \frac{2}{3}) \cdot 9 =$~~

~~$= 4 - 60y + 225y^2 - 144y^2 - 48y + 32 =$~~

$= 81y^2 - 108y + 36 = 9(9y^2 - 12y + 4)$

$x = \frac{15y - 2 \pm 3\sqrt{9y^2 - 12y + 4}}{8}$

$D = 9 + 72 = 81$ $\quad$ $D = 144 - 72 = 72$

~~$y = \frac{-3 \pm 9}{18}$~~

~~$y = \frac{1}{3}$~~

~~$y = -\frac{2}{3}$~~

$y = \frac{12 \pm 6\sqrt{2}}{18}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$(3y-2x)^2=3xy-2x-3y+2$, при усл. $3y-2x\geq 0$

$(3y-2x)^2=x(3y-2)-(3y-2)$ $\cancel{(3y-2x)(\frac{1}{x}-1)}=(3y-2)(x-1)$

$(3y-2x)^2=(x-1)(3y-2)$ $\cancel{\frac{(3y-2x)^2}{3y-2}=x-1}$

$(3y-2x)^2-(x-1)(3y-2)=0$ $\cancel{\frac{9y^2-12xy+4x^2}{3y-2}}$

$9y^2-12xy+4x^2-3xy+2x+3y-2=0$

$\cancel{9y^2+3y+4x^2+2x-15xy-2=0}$ $3x^2+3y^2-6x-4y-4=0$

$\cancel{(3y+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+(2x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}-15xy-2=0}$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-3y-2x+2$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2-9x^2-9y^2+18x+12y+12=0$

$-5x^2-15xy+20x+15y+10=0$

$5(x^2-3xy+4x+3y+2)=0$

$x^2+(4-3y)x+3y+2=0$

$D=(4-3y)^2-4(3y+2)=16-24y+9y^2-12y-8=9y^2-36y+8$

$36\cdot 36=216+108=1296$, $-288=1008$

$D=36^2-4\cdot 72$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$x^2+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-3^{\log_4(x^2+6x)}$

$\log_4 5>1 \Rightarrow |x^2+6x|^{\log_4 5}>x^2+6x$

$3^{\log_4(x^2+6x)}\geq(x^2+6x)^{\log_4 5}-(x^2+6x)$

з. н. $x^2+6x=t$

ОДЗ:

$x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$\left[\begin{array}{l}x>0\\x<-6\end{array}\right.$

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})<0$

$3^{\log_4 t}\geq t^{\log_4 5}-t$

$p\in\{3;5;7;11;13;17;19;23\}$

$f(p)\in\{0;1;1;2;3;4;4;5\}$

$f(a\cdot 1)=f(a)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(a)=-f(\frac{1}{a})$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$\cancel{f(0)=f(a)+f(0)=f(0)=-f(a)}$

$f(27)=f(3)+f(9)=0$

$f(5)=f(15)+f(\frac{1}{3})=1$

$\cancel{f(4)=f}$ $f(10)=f(5)+f(2)$

$f(\frac{1}{3})=0$

$f(15)=f(5)+f(3)=1$

$f(1)=f(a)+f(\frac{1}{a})=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$\frac{4x-3}{2x-2}$

$+ \quad \frac{3}{4} \quad - \quad 1 \quad +$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq 8x^2-34x+30$

$\cancel{\frac{4x-3-(2x-2)(8x^2-34x+30)}{2x-2} \geq 0}$

$\cancel{4x-3-16x^3+68x^2-60x+16x^2-68x+60 =}$

$\cancel{= -16x^3+84x^2-124x+57}$

$8x^2-34x+30 = 2(4x^2-17x+15)$

$D = 289-15\cdot16 = 289-$

$-240 = 49$

$x = \frac{17\pm7}{8}$

$x = \frac{5}{4}$

$x = 3$

$8x^2-34x+30 = 8(x-3)(x-\frac{5}{4})$

$+ \quad \frac{5}{4} \quad - \quad 3 \quad +$

$(3y-2x)^2 = (3y-2)(x-1)$ $\qquad x-1 = \frac{(3y-2x)^2}{3y-2}$ $\qquad 16x-34$ ~~...~~

$- \quad \frac{17}{8} \quad +$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$(x-1)^2 = \frac{25}{9}-(y-\frac{2}{3})^2$ ~~$= 16y^2+\frac{4}{3}y-\frac{4}{9}+\frac{25}{9}$~~

$\frac{(3y-2x)^4}{(3y-2)^2} = \frac{25}{9}-(y-\frac{2}{3})^2$

$\sin 2(a+b) = 2\sin(a+b)\cos(a+b) = 2(\sin a\cos b+\sin b\cos a)(\cos a\cos b-$
$-\sin a\sin b) = 2(\sin a\cos a\cos^2 b+\sin b\cos b\cos^2 a-\sin b\cos b\sin^2 a-$
$-\sin a\cos a\sin^2 b) = 2(\sin a\cos a(\cos^2 b-\sin^2 b)+\sin b\cos b(\cos^2 a-\sin^2 a)) =$
~~$= 2\cos$~~

$9y^2-15xy+4x^2+3y+2x-2=0$

$f(x) = \frac{4x-3}{2x-2}$

$f'(x) = \frac{4(2x-2)-2(4x-3)}{(2x-2)^2} = \frac{8x-8-8x+6}{4(x-1)^2} = -\frac{1}{2(x-1)^2}$

$\searrow \; 1 \; \searrow \; 3$

$\Rightarrow$ на пром. $(1;3]$ $\min f(x) = f(3) =$ ~~$\lim_{x\to1} f(x) = \lim_{x\to1} \frac{1}{0} = \infty$~~ $= \frac{12-3}{6-2} = \frac{9}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

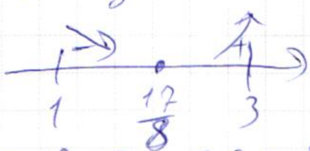
$g(x) = 8x^2 - 34x + 30$

$8 \cdot \frac{289}{64} - \frac{289 \cdot 2}{8} + 30 = 30 - \frac{289}{8}$

$= -\frac{49}{8}$

$g'(x) = 16x - 34$

$x = \frac{17}{8}$



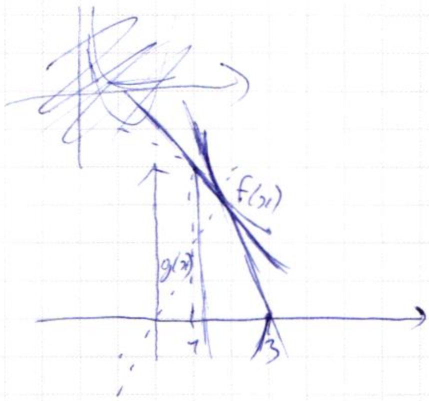
$g(1) = 8 - 34 + 30 = 4 \Rightarrow g(1) = \max g(x)$

$g(3) = 8 \cdot 9 - 34 \cdot 3 + 30 = 102 - 102 = 0$

$ax + b \in (a+b; 3a+b]$

$\frac{4x-3}{2x-2} \in [\frac{9}{4}; \infty)$

$8x^2 - 34x + 30 \in [-\frac{49}{8}; 4]$



$ax + b = \frac{4x-3}{2x-2}$

$\cancel{2ax^2 - 2ax + 2bx - 2b = 4x - 3}$

$ax + b$ - кас. к $f(x)$

$f'(x) = -\frac{1}{2(x-1)^2}$

$a = f'(x)$

$-\frac{x}{2(x-1)^2} + b \geq 8x^2 - 34x + 30$, $x \in (1; 3]$

$\frac{2b(x-1)^2 - x - 2(x-1)^2(8x^2 - 34x + 30)}{2(x-1)^2} \geq 0$

$\cancel{a \in [-\frac{1}{8}; -\infty)}$

$\begin{cases} a + b \leq 4 \\ 3a + b \geq 0 \end{cases}$ $\quad b \in (-\infty; 4\frac{1}{8}]$ $[4\frac{1}{8}; +\infty)$, $\quad b \in [\frac{3}{8}; +\infty)$

$b \in [\frac{3}{8}; 4\frac{1}{8}]$

$3a + 4\frac{1}{8} = 0$

$a = -\frac{11}{8}$

$a \in [-\frac{1}{8}; -\frac{11}{8}]$

$a \in (-\infty; -\frac{1}{8}]$

$\begin{cases} 3a + b \geq 0 \\ a + b \geq 4 \end{cases}$ $\quad b \in [\frac{3}{8}; +\infty)$, $\quad b \in [4\frac{1}{8}; +\infty)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y) < 0$

$f(y) > f(x)$

$f(y) = 5 \Rightarrow y = 23$, $x \in [3; 23) \cup (23; 27] \Rightarrow 24$ пар

$f(y) = 4 \Rightarrow y = 17/19$ $x \in [3; 17) \cup (17; 23) \cup (23; 27] \Rightarrow 48$ пар

$f(y) = 3 \Rightarrow y = 13/26$, x - 20шт $\Rightarrow 40$ пар

$f(2) = 0$	$f(11) = 2$	$f(21) = 1$
$f(3) = 0$	$f(12) = 0$	$f(22) = 2$
$f(4) = 0$	$f(13) = 3$	$f(23) = 5$
$f(5) = 1$	$f(14) = 1$	$f(24) = 0$
$f(6) = 0$	$f(15) = 1$	$f(25) = 2$
$f(7) = 1$	$f(16) = 0$	$f(26) = 3$
$f(8) = 0$	$f(17) = 4$	$f(27) = 0$
$f(9) = 0$	$f(18) = 0$	
$f(10) = 1$	$f(19) = 4$	
	$f(20) = 1$	

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)