МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{8}{17}$ $\quad$ $/:2$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos(\cancel{\pm}2\beta) = -\frac{4}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos2\beta = -\frac{4}{17}$

$\cos2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$, тогда $\sin2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin2\alpha\cos2\beta + \sin2\beta\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos2\alpha\frac{(-1)}{\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $/\cdot\sqrt{17}$

$8\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 = -1$

$\cancel{4s}$ $8\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -2 + 2\cos^2\alpha = -2\sin^2\alpha$ $\quad$ $/2$

$\sin\alpha(4\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\sin\alpha = 0$ $\quad$ $4\cos\alpha + \sin\alpha = 0$

$tg\alpha = 0$ $\quad$ $tg\alpha = \cancel{-\frac{1}{4}}$ -4

2) $\sin2\beta = +\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos2\alpha\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{(-1)}{\sqrt{17}}$ $\quad$ $/\cdot\sqrt{17}$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$ $\quad$ $/:2.$

$4\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$ $\quad$ $/:\cos^2\alpha$ ($\cos^2\alpha \neq 0$, тк $tg\alpha$ - определен)

$4tg\alpha + 1 = 0 \Rightarrow tg\alpha = -\frac{1}{4}$

Ответ: ~~Oz~~; $-4; -\frac{1}{4}; 0.$

№2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \quad /:3 \end{cases}$$

$$\cancel{x^2-2x+1+y^2-\frac{4}{3}y+\frac{2}{3}=4\frac{4}{3}}$$

$$\begin{cases} 3y\cancel{4}-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ x^2+y^2-2x-\frac{4}{3}y=\frac{4}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ (x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{3}+1+\frac{4}{9}=\frac{25}{9} \end{cases}$$ – окружность с центром в $\left(1;\frac{2}{3}\right)$ и радиусом $\frac{5}{3}$

~~Рассмотрим~~ $(x-1)(3y-2)\geq 0.$

Значит $\begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq \frac{2}{3} \end{cases}$ или $\begin{cases} x\leq 1 \\ y\leq \frac{2}{3}. \end{cases}$

Рассмотрим $3xy-2x-3y+2$

$(3xy-2x-3y+2)'_x=3y-2$ ~~иииии~~ x.

~~y' ≠ ≠ $3y-2=0$~~, пр $3y-2=0$

$y=\frac{2}{3}.$

$(3xy-2x-3y+2)'_y=3x-3$, $3x-3=0$

$x=1$

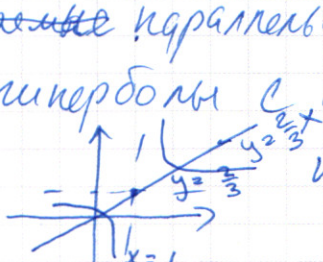
Рассмотрим $\begin{cases} 3y-2x=a \\ \sqrt{3xy-2x-3y+2}=a \end{cases}$ $\Rightarrow y=\frac{2}{3}x+\frac{a}{3}$ (I)

$\Rightarrow y=\frac{2}{3}+\frac{a^2}{3(x-1)}$

при $a=0$: $x=1$; $y=\frac{2}{3}$ ~~нашим методом подбора~~.

(I) – графиками являются ~~прямые~~ параллельные прямые

(II) – графиками являются гиперболы с ассимптотами $x=1$; $y=\frac{2}{3}$. Получается



при каждом значение a кроме $a=0$ имеется 2 пары $(x;y)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$ | $\log_4 x$ — возраст ф-ия

ОДЗ: $x^2+6x \geq 0$

$x \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty)$

Замена $x^2+6x = t$ $t>0$

$3^{\log_4 t} + t \geq |t|^{\log_4 5}$

$t \geq |t|^{\log_4 5} - |t|^{\log_4 3}$

т.к $|t|>0$, и $\log_4 5 > \log_3 5$, то $t^{\log_4 5} > t^{\log_4 3} \Rightarrow$

$t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3} > 0 \Rightarrow t \geq 0$ $t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3} > 0 \Rightarrow |t| = t$.

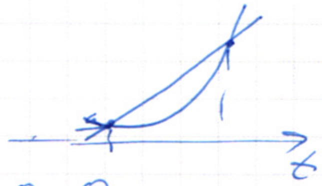
$f(t) = t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3}$

$f'(t) = \log_4 5 \cdot t^{\log_4 \frac{5}{4}} - \log_4 3 \cdot t^{\log_4 \frac{3}{4}}$

$f'(t) > 0$, т.к $\log_4 5 > \log_4 3$ и $\log_4 \frac{5}{4} > \log_4 \frac{3}{4}$

$f''(t) = \log_4 5 \cdot \log_4 \frac{5}{4} t^{\log_4 \frac{5}{16}} - \log_4 3 \cdot \log_4 \frac{3}{4} \cdot t^{\log_4 \frac{3}{16}}$

$f''(t) \Rightarrow$ ф-ия вогнута вниз, тогда максимально кол-во решений $t = t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3}$ — 2, т.к

получается , найдем такие t, методом подбора

$t=0$ $0 = 0-0$

~~$t=1$ $1 = 1-1$~~ $t=16$ $16 = 16^{\log_4 5} - 16^{\log_4 3} =$

$= 5^{\log_4 16} - 3^{\log_4 16} = 5^2 - 3^2 = 16$, тогда

$\begin{cases} t \geq 0 \\ t \leq 16 \end{cases}$ Обратная замена

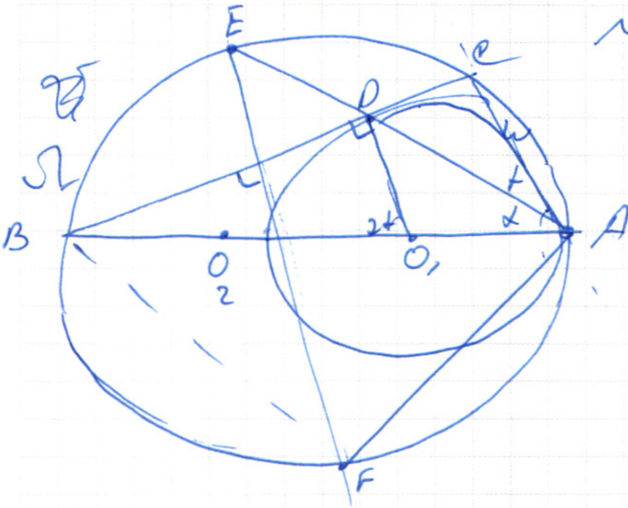
$\begin{cases} x^2+6x \geq 0 \\ x^2+6x-16 \leq 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x(x+6) \geq 0 \\ (x-2)(x+8) \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; 0] \cup [6; +\infty) \\ x \in [-8; 2] \end{cases}$$

~~$x \in$~~ Ответ: $x \in (-\infty; 0]$

№4



Решение: $CD = \frac{5}{2}$ $BD = \frac{13}{2}$

Пусть O_1 - центр ω

O_2 - центр Ω

$O_1 \in AB$, тк тA - точка касания Ω и ω, а $O_2 A \in AB$ - тк AB - диаметр.

Проведем O_1D $O_1D \perp BC$ тк тD - точка касания

$\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$ ($\angle BDO_1 = 90^\circ = \angle BCA = 90^\circ$ - тк опирается на диаметр, $\angle B$ - общий)

$$\frac{BD}{BC} = \frac{DO_1}{CA} = \frac{O_1B}{AB} = \frac{13}{2\cdot\left(\frac{13}{2}+\frac{5}{2}\right)} = \frac{13}{18}$$

пусть $O_1A = O_1D = x$ - радиус ω

$O_2B = O_2A = y$ - радиус Ω, получается

$$\frac{O_1B}{AB} = \frac{2y-x}{2y} = \frac{13}{18} \Rightarrow 1 - \frac{x}{2y} = \frac{13}{18}$$

$$\frac{x}{\cancel{2y}} = \frac{5}{9}y \Rightarrow y = \frac{9}{5}x$$

$$CA = \frac{18}{13}\cdot DO_1 = \frac{18}{13}x = \frac{18\cdot 5}{13\cdot 9}y = \frac{10}{13}y$$

По теореме Пифагора для $\triangle BCA$.

$BA^2 = BC^2 + CA^2$

$$4y^2 = 81 + \frac{100}{169}y^2 \Rightarrow y^2\left(\frac{4\cdot169-100}{169}\right) = 81$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y^2\left(\cancel{2-1}\frac{(26-10)(26+10)}{13^2}\right)=81$

$y^2=\frac{9^2\cdot 13^2}{4^2\cdot 6^2}\Rightarrow y=\frac{9\cdot 13}{4\cdot 6}=\frac{39}{8}$

$x=\frac{5}{9}\cdot\frac{3\cdot 13}{8}=\frac{65}{24}$

Пусть $\angle DAB=\alpha$, тогда $\angle DO_1B=2\alpha$ - как центральный угол, опирающийся на туже дугу окружности ω

$DO_1 \parallel CA$ тк $\angle BDO_1+\angle BCA=90^\circ+90^\circ=180^\circ$, тогда

$\angle DO_1B=\angle CAB \Rightarrow \angle EAC=2\alpha-\alpha=\alpha$

$\angle BFA=90^\circ$ - тк опирается на диаметр, ~~тогда~~

$\angle BFE=\angle EAB=\alpha$ - тк опираются на одну дугу

$\angle BFA=90-\alpha$

Из $\triangle BCA$: $\cos\angle BAC=\cos 2\alpha=\frac{CA}{AB}=\frac{\frac{10}{13}y}{2y}=\frac{10}{26}=\frac{5}{13}$

$1-2\sin^2\alpha=\cancel{\frac{10}{26}}=\frac{5}{13}$

$\sin^2\alpha=\frac{4}{13}\Rightarrow \sin\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}=\cos\left(90-\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$

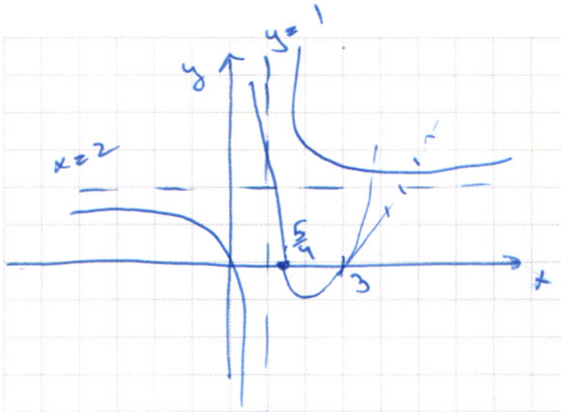
тогда $\angle EAB=\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$.

Ответ: $x=\frac{65}{24}$ $y=\frac{39}{8}$ $\angle EAB=\arccos\frac{2}{\sqrt{13}}$

№6

$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$

$2+\frac{1}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8\left(x-\frac{5}{4}\right)(x-3)$



$f(x) = 2 + \frac{1}{2x \mp 2}$ – имеет ассимптоты $x = 2$ $y = 1$

$g(x) = 8x^2 - 34x + 30$ $\quad g(1) = 8 - 34 + 30 = 4$ ~~[illegible]~~

$f(x) \neq g(x)$ при $x \in (1; 3]$. ,тк

$2 + \frac{1}{2x-2} = 8x^2 - 34x + 30$

$\cancel{1 = 8x^2 - 34x}$ $\quad \frac{4x-3}{2x-2} = 8\left(x - \frac{5}{4}\right)(x-3)$

$4x - 3 = (8x - 10)(2x^2 - 8x + 6)$

$4x - 3 = 16x^3 - 64x^2 + 42x - 20x^2 + 80x - 60$

$16x^3 - 84x^2 + 118x + 57 = 0$

$h'(x) = 48x^2 - 168x + 118 = 0$

$24x^2 - 84x + 59 = 0$

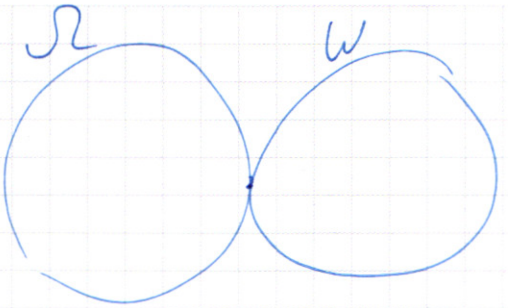
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

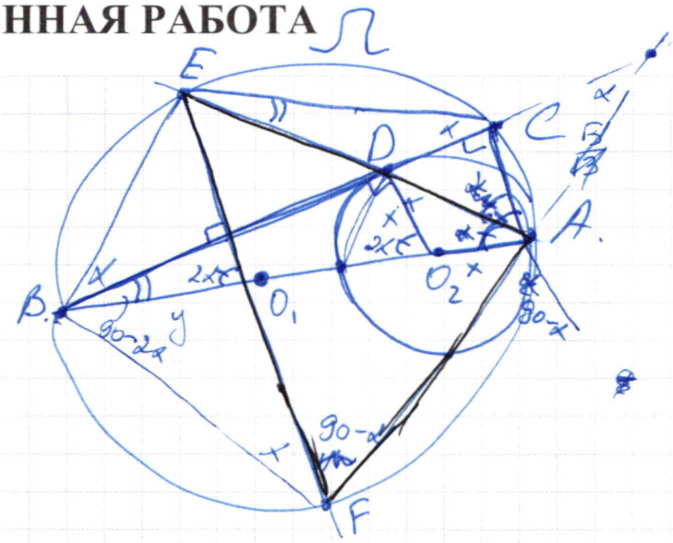
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$90 - \alpha$

∠AFE и радиусы

S AFE

$CD = \frac{5}{2}$ $BD = \frac{13}{2}$

2,5 6,5

9

$\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA$ $2y - x$

$\frac{13}{18} = \frac{BD}{BC} = \frac{\overset{x}{DO_2}}{CA} = \frac{O_2B}{AB}$ $CA = \frac{5}{13}x$

$\cancel{\frac{2y-x}{2y} = 2{,}6}$ 2yAx

$\cancel{1 - \frac{x}{2y} = 2{,}6}$

$\frac{x}{2y}$ $1 - \frac{x}{2y} = \frac{13}{18}$

$\boxed{CA = \frac{18}{13}x}$

$\boxed{\frac{x}{2y} = \frac{5}{9}}$

$x = \frac{5}{9}y$

$(2y)$ $4y^2 = \frac{100}{169}y^2 + 81$ $169 \cdot 4 = 676$

$\frac{576}{169}$ $\frac{(26-10)(26+10)}{13^2}y^2 = 81$

$26 \cdot 26 = 156 \ldots 52 \ldots 676$

$y^2 = \frac{9^2 13^2}{4^2 6^2} = \frac{3 \cdot 13}{4 \cdot 2}$

$\frac{39}{24}$

$x = \frac{5}{9} \cdot \frac{3 \cdot 13}{8} = \frac{65}{24}$

$\sin 2\alpha = \frac{36}{39}$

$CA = \frac{18}{13} \cdot \frac{65}{24} = \frac{5 \cdot 13}{3 \cdot 8} \cdot \frac{18 \cdot 3 \cdot 3}{13} = \frac{15}{4}$

$\frac{15}{4}$ $\frac{15 \cdot 4}{4 \cdot 39}$

$1 - 2\sin^2\alpha =$

$\sin^2\alpha = \sqrt{\frac{7}{39}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

нв. $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ p - простое

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$3 \le y \le 27$

$3 \le x \le 27$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$\frac{1}{2}\left(y - \frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3}$

$y = \frac{6}{3} = 2$

$(2; 2)$

$6 - 2 = \sqrt{1 \cdot 4}$

240

$\cancel{30}$

$\frac{4x - 3}{2x - 2} = 2 + \frac{1}{2x-2}$

$-4+1$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$8x^2 - 34x + 30$ $\quad 8 \cdot 4 - 34 + 30$

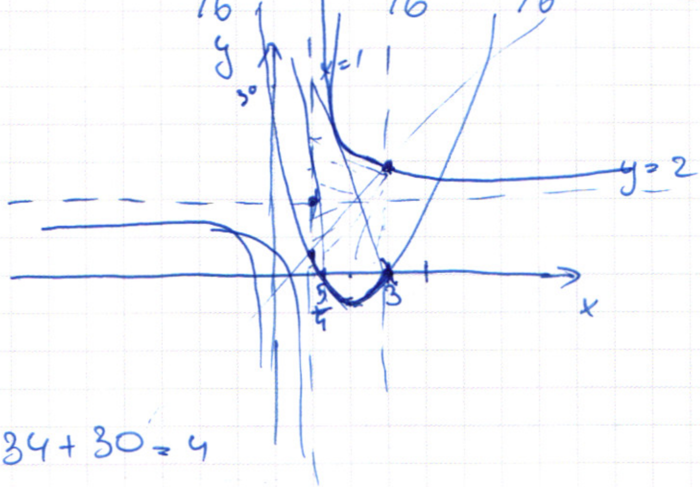
$\frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

$D = \cancel{34}\, 2^2 17^2 - 4 \cdot 2 \cdot 15 \cdot 2 \cdot 4$

$64 - 34 - 30$

$4(289 - 240) = 4 \cdot 49 = (2 \cdot 7)^2$

$\frac{34 \pm 14}{16} = \frac{48}{16}; \frac{20}{16} = 3; \frac{5}{4}$



$2 + \frac{1}{6-2} = 2,25$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$ax + b.$

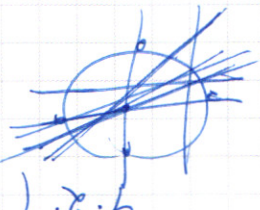
$8 - 34 + 30 = 4$

$8x^2 - 34x + 30$

$D = 4 \cdot 17^2 - 4 \cdot 8 \cdot 30$

$4(289 - 240) \quad (2 \cdot 7)^2$

$\frac{34 \pm 14}{16} = 3; \frac{5}{4}$



$\frac{2}{3} + \frac{a^2}{3(x-1)} = \frac{a}{3} + \frac{2}{3}x$

$2 + \frac{a^2}{x-1} = \frac{a}{1} + 2x \;/\cdot x-1$

$2 + a^2 = a + 2x$

$2x - 1 + a^2 = ax - a + 2x^2 - 2x$

$2x^2 - 4x - a^2 - a + 1$

$D = 2^2 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2(a^2 + a - 1)$

$4(4 + 2a^2 + 2a - 2$

$4 \cdot 2 \cdot (a^2 + a + 2)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$6x-6$ $\quad 6y-4$

$x=1$ $\quad y=\frac{2}{3}$

$x^2+y^2-2x-\frac{4}{3}y+1+\frac{4}{9}=\frac{4}{3}+1+\frac{4}{9}=\frac{49}{9}$ $\quad 9+12+4=\frac{25}{9}$

$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2$

$3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$3xy-2x-3y+2=0$

$3y(x-1)-2(x-1)=0$

$(x-1)(3y-2)=0$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$x\geq 1$, $y\geq\frac{2}{3}$ $\quad x\leq 1$, $y\leq\frac{2}{3}$

~~$3xy-2x-3y+2$~~

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y=2$

$15xy=2\cdot\frac{15}{2}xy$

$\frac{3\cdot 5}{2}$

$4x^2$

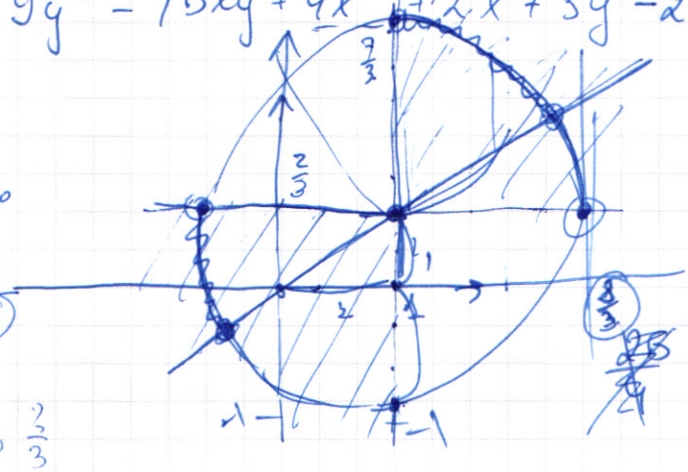
x^2+2x+1

$\frac{9}{4}y^2+2\cdot\frac{3}{2}y+1$

$3y=2x$

$y=2$

$y=\frac{2}{3}x$



81
-28
56

$3\frac{2}{3}$

$3xy-2x-3y+2$

$x'=3y-2$

$y'=3x-3$

$\frac{2}{3}$ $\quad y$ $\quad 1$

$3y$

$3y-2x\geq 0$

$y\geq\frac{2}{3}x$

$\frac{3\cdot 5}{2}$

$\frac{9}{4}$

$\frac{2\cdot 15}{2}$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y+2$

~~$3y(3y+1)$~~ $\quad 3y$

$3y-2x=a$

$y=\frac{2}{3}x+\frac{a}{3}$

$3xy-2x-3y+2=a^2$

$3y(x-1)=a^2+2x-2$

$y=\frac{a^2+2x-2}{3(x-1)}=\frac{2}{3}+\frac{a^2}{3(x-1)}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$x^2+6x = t$ $\quad t > 0$

$3^{\log_4 t} + t \geq |t|^{\log_4 5}$

$|t|^{\log_4 3}$ $\quad |t|^{\log_4 3}$

$4^x = 3 \quad |t|^x = 3^y$

$4^y = t$

$t \geq |t|^{\log_4 5} - |t|^{\log_4 3}$

$\log_4 5$ (>1) $\quad \log_4 3$ (<1)

$|t|^{\log_4 5}$

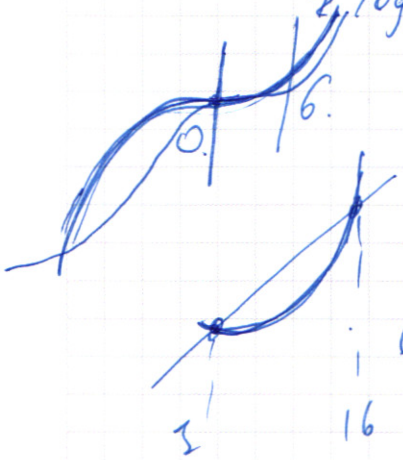
$\log_4 5 \cdot |t|^{\log_5 4 - 1} - \log_4 3 \cdot |t|^{\dots}$

$t^{\log_4 4}$

$t, \log_4 5 \cdot |t|^{\log_4 \frac{5}{4}} - \log_4 3 \; |t|^{\log_4 \frac{3}{4}} = 0.$

$t = 0$

$\log_4 5 \log_4 \frac{5}{4} |t|^{\log_4 \frac{5}{16}} - \log_4 3 \; |t|^{\log_4 \frac{3}{16}} = 0$



$1 > 1$

~~$4 = 5 - 3$~~ $\quad 16 \geq 5^2 - 3^2$

$16 = 16$

$-8 \quad 2$

$0 \quad 6$

$x^2+6x \geq \cancel{6}$ $\quad D = 36 + 4\cdot 6 = 36 + 24$

$x^2+6x \geq 16$ $\quad D = 36 + 4\cdot 16 = 36 + 64 = 100$ $\quad \frac{-6 \pm 10}{2} = -3 \pm 5 = 2, -8$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ ≥ 3

$\sin + \cos$

$1+\cos 2\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$ $\quad \cos^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cancel{1-\cos 2\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}}$ $\quad \cancel{\sin 2\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha}$

$\sin 2\alpha = 2\sin \cancel{\cos\alpha}\cdot\cancel{\cos\alpha}$ $\quad (1-\sin^2\alpha)$

$\frac{1-\cos^2 2\alpha}{\cos\alpha} = 2\sin\alpha$

$2\sin\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad \frac{1}{\cos\alpha} - \cos 2\alpha = 2\sin\alpha$

$\frac{1-\cos^2 2\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad /\cos\alpha$

$\frac{\sin}{tg\alpha} + \cos\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + 2\sin\beta\cos\beta$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} = 2(S\alpha C\beta + C\alpha S\alpha)(C\alpha C\beta - S\alpha S\beta)$

$2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2(\sin\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos\alpha)\cos$

$2\cdot \sin\alpha + \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\cancel{2}\sqrt{\frac{1+\cos(\alpha+\beta)}{\cancel{2}}}\sqrt{\frac{1+(\cos\alpha-\beta)}{\cancel{2}}}$

$(1+\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta)(1+\cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)$

$\cancel{1} + 2\cos\alpha\cos\beta + \cos^2\alpha\cos^2\beta + \cancel{\cos\alpha\cos\beta\cos} - \sin^2\alpha\sin^2\beta$

$(\cos\alpha+\cos\beta)^2 \quad -(\cancel{1}+\cos^2\alpha\cos^2\beta - \cos^2\alpha - \cos^2\beta)$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\cancel{2}\cdot 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} =$ $1-\cos$

$\cancel{4}$ $(1-\cos\alpha+\beta)(1+\cos\alpha-\beta) =$

$= (1-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)(1+\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$

$\cancel{1+2\sin^2\alpha\sin^2\beta-\cos^2\alpha\cos^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta}$

$-(\cancel{1+\sin^2\alpha\sin\beta}-\sin^2\alpha-\sin^2\beta)$

$\sin\alpha+\sin\beta$

$2\cdot\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = -\frac{8}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$+\frac{2}{\sqrt{17}}$ $\cos 2\beta = +\frac{8}{17}$ $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\sin 2\beta = 1-\frac{16}{17} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4\sin 2\alpha}{\cancel{\sqrt{17}}} \pm \frac{\cos 2\alpha}{\cancel{\sqrt{17}}} = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - \cancel{1} = \cancel{-1}$

$4\sin\alpha\cancel{\cos\alpha} = 2\cos^2\alpha$

$\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{1}{4}$

$8\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 = -1$

$8\cancel{\sin}\alpha\cos\alpha = \cancel{2\cos^2\alpha-2} - 2\sin^2\alpha$

-4

$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y = 4+3+\frac{4}{3} \end{cases}$

$\sqrt{3}^2x^2 - 2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}x + 3 =$

$\sqrt{3}^2y^2 - 2\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\cdot 2y + \frac{4}{3}$

$(\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2 + \left(\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{25}{3}$