МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 5 ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = 44, \\ y - \sqrt[3]{y^2 - 16x^2} = -20. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x} x^4} \leqslant \log_{9x} \frac{1}{x^2}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12345.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{12}{5}$, $AP = \frac{13}{2}$, $NC = 13$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x+y) = 9\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right), \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{275}{4} + 25x - x^2} \leqslant ax + b \leqslant -\frac{x^2}{3} + \frac{5x}{3} + \frac{45}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{5}{2}; \frac{7}{2}\right]$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, грани $ABCD$ и CDD_1C_1 которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых B_1C_1 и C_1D_1, плоскости CDD_1, а также плоскости ABC в точке A. Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M. Найдите $\angle BB_1C_1$ и объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AM = 5$, $C_1M = 3$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $$\begin{cases} 4x - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = 44 \quad (I) \\ y - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = -20 \quad (II) \end{cases}$$

$(I) - (II)$:

$4x - y = 64; \Rightarrow y = 4x - 64$

(I): $4x - \sqrt[3]{(4x-64)^2 - 16x^2} = 44$

$4x - \sqrt[3]{16x^2 - 64\cdot 8x + 64^2 - 16x^2} = 44$

$4x - 4\sqrt{64-8x} = 44$

$x - \sqrt{64-8x} = 11$;

$f(x) = x + \sqrt{8x-64} = 11$

$f(x)$ возрастает на ОДЗ, так как является суммой двух монотонно возрастающих функций.

Следовательно, уравнение имеет не более одного решения

$x = 9$ – решение $\quad 9 + \sqrt{8\cdot 9 - 64} = 11$ $\oplus$

$y = 4x - 64 = 36 - 64 = -28$

Подставляя пару $\begin{matrix} x=9 \\ y=-28 \end{matrix}$ в исходную систему получаем решение

$$\begin{cases} 4\cdot 9 - \sqrt[3]{28^2 - 16\cdot 9^2} = 44 \quad \oplus \\ -28 - \sqrt[3]{28^2 - 16\cdot 9^2} = -20 \quad \oplus \end{cases}$$

Ответ: $\begin{cases} x = 9 \\ y = -28 \end{cases}$

3. $\overline{a_1a_2a_3a_4a_5a_6a_7}$ - семизначное число. $(a_1 \neq 0)$

Если наибольшая степень 10 в последовательности ≤ 3, то сумма 3 не более чем трехзначных чисел не может равняться 12345

если наибольшая степень 10 в последовательности ≥ 7, то сумма остатков будет больше исходного числа. и не может равняться 12345.

Так как наибольшая степень 10 в последовательности ≥ 4, то каждый остаток от деления оканчивается на $\overline{a_6a_7}$

Значит: $3\,\overline{a_6a_7} \underset{100}{\equiv} 45$; НОД$(3;100)=1$

$\overline{a_6a_7} \underset{100}{\equiv} 15$; $\overline{a_6a_7} < 100 \Rightarrow \overline{a_6a_7} = 15$; $a_6=1$ $a_7=5$

При суммировании трёх остатков перехода в разряд сотен не происходит.

Так как цифра в разряде сотен у суммы нечётная, то наименьшая степень 10 в последовательности ≥ 3, и $a_5=1$

$3\,\overline{a_5a_6a_7} \underset{1000}{\equiv} 345$; $\overline{a_5a_6a_7} \underset{1000}{\equiv} 115 \Rightarrow \overline{a_5a_6a_7} = 115$

I) если степени 10 это 10^5; 10^4; 10^3; то

$\overline{a_3a_4a_5a_6a_7} + \overline{a_4a_5a_6a_7} + \overline{a_5a_6a_7} = 12345$

$\overline{a_3a_4} \cdot 1000 + \overline{a_4} \cdot 1000 + 3\,\overline{a_5a_6a_7} = 12 \cdot 1000 + 345$

$\overline{a_3a_4} + \overline{a_4} = 12$; $\left[\begin{array}{l} a_3=0; \quad a_4=6 \\ a_3=1; \quad a_4=1 \end{array}\right.$

Числа вида: $\overline{a_1a_2\,06115}$ и $\overline{a_1a_2\,11115}$

II) если степени 10 это 10^6; 10^5; 10^4; то

$\overline{a_2a_3a_4} + \overline{a_3a_4} + \overline{a_4} = 12 \Rightarrow a_2 = 0$

$2\,\overline{a_3a_4} + \overline{a_4} = 12 \Rightarrow a_3 = 0$

$3\,\overline{a_4} = 12 \Rightarrow a_4 = 4$

Числа вида: $a_1\,004115$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. Заметим, что множества чисел вида: ① $\overline{a_1a_2 06115}$; ② $\overline{a_1a_2 11111}$; ③ $\overline{a_1 004115}$ не пересекаются, значит общее кол-во чисел равно сумме чисел каждого вида.

$a_1 \in \{1; 2; ...; 9\}$; $a_2 \in \{0; 1; ...; 9\}$
9 цифр; 10 цифр

Чисел вида ① — 90

Чисел вида ② — 90

Чисел вида ③ — 9

$90+90+9=189$

Ответ: 189

2. $\sqrt{\log_{3x} x^4} \le \log_{9x} \frac{1}{x^2}$;

ОДЗ: $x > 0$; $x \ne \frac{1}{3}$; $x \ne \frac{1}{9}$

$\log_{3x} x^4 \ge 0$ (II)

$2\sqrt{\frac{\ln x}{\ln x + \ln 3}} \le -2\frac{\ln x}{\ln x + \ln 9}$; $t = \ln x$

$\sqrt{\frac{t}{t+\ln 3}} \le \frac{-t}{t+2\ln 3}$

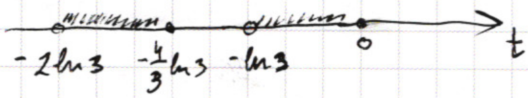
$\frac{t}{t+\ln 3} \le \frac{t^2}{(t+2\ln 3)^2}$; $\frac{-t}{t+2\ln 3} \ge 0$ (I)

$\frac{t^2(t+\ln 3) - t(t+2\ln 3)^2}{(t+\ln 3)(t+2\ln 3)} \ge 0$

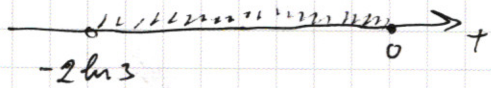
$t\frac{t^2 + t\cdot\ln 3 - t^2 - 4\ln 3 t - 4\ln^2 3}{(t+\ln 3)(t+2\ln 3)} \ge 0$;

$\cancel{t(t-5+(\ln 3+1))}$ $\frac{t(-3t-4\ln 3)}{(t+\ln 3)(t+2\ln 3)} \ge 0$

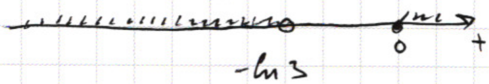
$\frac{t(t+\frac{4}{3}\ln 3)}{(t+\ln 3)(t+2\ln 3)} \le 0$



(I): $\frac{t}{t+2\ln 3} \le 0$



(II) $4\frac{\ln x}{\ln x + \ln 3} \ge 0$



$\frac{t}{t+\ln 3} \ge 0$

$\Rightarrow$ $t \in \left(-2\ln 3; -\frac{4}{3}\ln 3\right]$; $x = e^t$

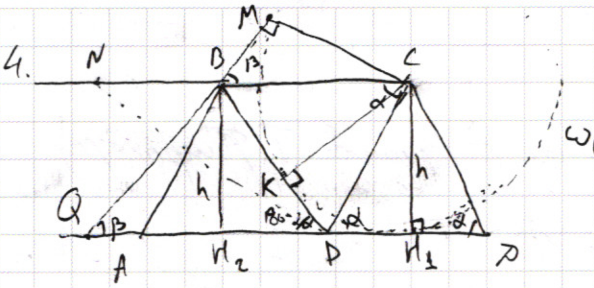
$x \in \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{\sqrt[3]{81}}\right]$; $x \in \left(\frac{1}{9}; \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}\right]$

$x \in \left(\frac{1}{9}; \frac{\sqrt[3]{9}}{9}\right]$

Ответ: $x \in \left(\frac{1}{9}; \frac{\sqrt[3]{9}}{9}\right]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



Дано: $tg\,\angle NCP = \frac{12}{5}$

$AP = 13/2$; $NC = 13$

$\angle NCP = \alpha$; $tg\,\alpha = \frac{12}{5} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{13}$; $\sin\alpha = \frac{12}{13}$

$CP = NC \cdot \cos\alpha = 5$; $NP = NC \cdot \sin\alpha = 12$

$\angle CPD = \alpha$ (как накрестлежащий)

$CH_1 = CK = R$; CP – общая $\Rightarrow \triangle CPK = \triangle CPH_1$ (по гипотенузе и катету)

$\angle CPB = \alpha \Rightarrow \angle APB = 180 - 2\alpha$

$\sin\alpha = \frac{h}{5}$; $\Rightarrow h = \frac{60}{13}$; $PH_1 = 5 \cdot \cos\alpha = \frac{25}{13}$

$tg\,(180 - 2\alpha) = \frac{h}{PH_2}$;

$tg\,(180 - 2\alpha) = -tg\,2\alpha = -\frac{2tg\,\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{120}{119}$; $\Rightarrow PH_2 = \frac{60}{13} \cdot \frac{119}{120} = \frac{119}{26}$

$H_1H_2 = \frac{25}{13} + \frac{119}{26} = \frac{169}{2 \cdot 13} = \frac{13}{2} = BC$

$AP = H_1H_2 \Rightarrow AH_2 = PH_1 \Rightarrow PH_1 = DH_1 \Rightarrow \triangle PCD$ – равнобедр. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\angle ADC = \alpha = arctg\,\frac{12}{5}}$

$\angle BQD = \angle MBC = \beta$; $\sin\beta = \frac{60}{13} \cdot \frac{2}{13} = \frac{120}{169}$

$\triangle QBH_2 \sim \triangle BCM$ (по 2 углам) $\Rightarrow$ ~~$\frac{QB}{BC} = \frac{BH_2}{CM}$~~

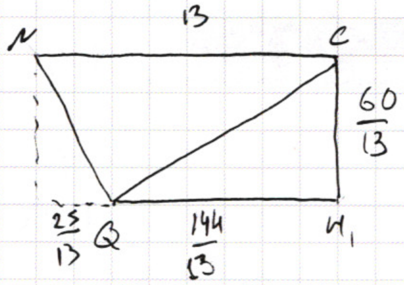
~~$QB = \frac{60}{13} \cdot \frac{13}{2}$~~ . $CM = BH_2 \Rightarrow \triangle QBH_2 = \triangle BCM \Rightarrow QB = BC$

$QH_2 = \sqrt{\left(\frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{60}{13}\right)^2} = \sqrt{\frac{169}{4} - \frac{3600}{169}} = \frac{119}{26}$.

$QD = 2 \cdot \frac{119}{26} + 2 \cdot \frac{25}{13} = 13$

$\underline{S_{NCDQ}} = \frac{BC + QD}{2} \cdot h = \frac{\frac{13}{2} + 13}{2} \cdot \frac{60}{13} = \frac{3}{4} \cdot 13 \cdot \frac{60}{13} = \underline{45}$

$QH_1 = QD - DH_1 = 13 - \frac{25}{13} = \frac{144}{13}$



$NC = 13$

$QC = \sqrt{\left(\frac{144}{13}\right)^2 + \left(\frac{60}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}\sqrt{169} = 12$

$QN = \sqrt{\left(\frac{25}{13}\right)^2 + \left(\frac{60}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}\sqrt{169} = 5$

$NQ^2 + QC^2 = NC^2 \Rightarrow \angle NQC = 90°$ (по обратной Т. Пифагора)

Ответ: $\angle ADC = \operatorname{arctg} \frac{12}{5}$

$\angle NQC = 90°$

$S_{NCDQ} = 45$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

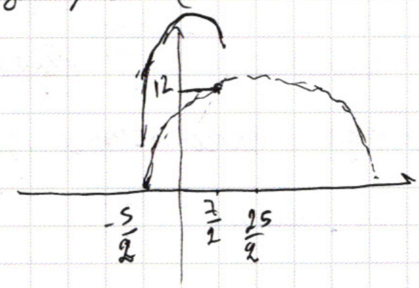
6. $\sqrt{\frac{275}{4}+25x-x^2}=y$ $=f(x)$

$y^2+\left(x-\frac{25}{2}\right)^2=15^2$ – окр. радиуса 15 с центром $\left(\frac{25}{2};\ 0\right)$

$f\left(-\frac{5}{2}\right)=\sqrt{\frac{275}{4}-\frac{250}{4}-\frac{25}{4}}=0$

$f\left(\frac{7}{2}\right)=\sqrt{\frac{275}{4}+\frac{350}{4}-\frac{49}{4}}=\sqrt{\frac{576}{4}}=\frac{24}{2}=12$

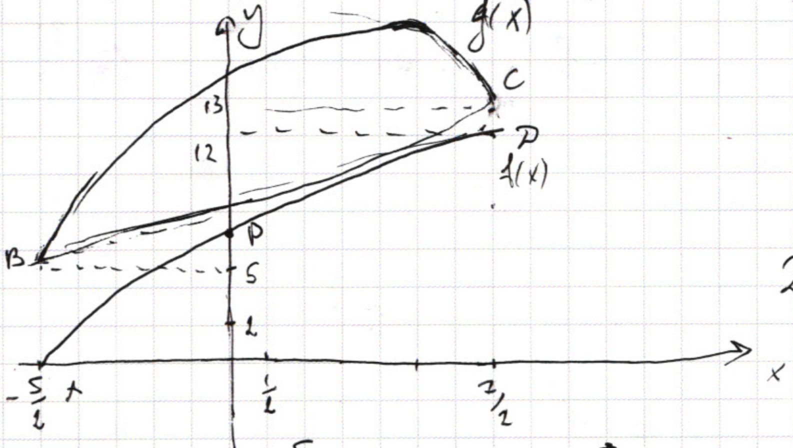
$f(0)=\sqrt{\frac{275}{4}}=\frac{5}{2}\sqrt{11}$



$g(x)=-\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{45}{4}$; $x_0=-\frac{5}{3}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{5}{2}$ – x вершины

$g\left(-\frac{5}{2}\right)=-\frac{25}{12}-\frac{50}{12}+\frac{135}{12}=5$

$g\left(\frac{7}{2}\right)=-\frac{49}{12}+\frac{70}{12}+\frac{135}{12}=\frac{156}{12}=13$



$A\left(-\frac{5}{2};\ 0\right)$

$B\left(-\frac{5}{2};\ 5\right)$

$C\left(\frac{7}{2};\ 13\right)$

$D\left(\frac{7}{2};\ 12\right)$

AC: $y=kx+b$; $-\frac{5}{2}k+b=0$; $b=\frac{5}{2}k$; $y=k\left(x+\frac{5}{2}\right)$

$13=6k$; $k=\frac{13}{6}$; $y=\frac{13}{6}\left(x+\frac{5}{2}\right)$; $y'(x)=\frac{13}{6}$

BD: $y=kx+b$; $\begin{cases}-\frac{5}{2}k+b=5\\ \frac{7}{2}k+b=12\end{cases}$ $\frac{12}{2}k=7$; $k=\frac{7}{6}$; $-\frac{35}{12}+b=5$

$b=\frac{60-35}{12}=\frac{25}{12}$

$y(x)=\frac{7}{6}x+\frac{25}{12}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$f'(x) = \frac{-2\left(x-\frac{25}{2}\right)}{2\sqrt{15^2-\left(x-\frac{25}{2}\right)^2}} \; ; \quad f'(0) = \frac{25}{2\cdot\frac{5}{2}\sqrt{11}} = \frac{5}{\sqrt{11}}$$

~~Найдем касательную к окружности из точки~~

BC:

$$f'\left(\frac{7}{2}\right) = \frac{9}{2\cdot 12} = \frac{3}{4} \; ; \quad f'\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{10}{5\sqrt{5}}$$

Заметим, что прямая BC касается окружности, заданой $y = f(x)$, тогда единственная прямая которая лежит между $y = f(x)$ и $y = g(x)$, это прямая BC.

BC: $y = ax + b$

B: $x = -\frac{5}{2}$; $y = 5$

C: $x = \frac{7}{2}$; $y = 13$

$$\begin{cases} -\frac{5}{2}a + b = 5 \\ \frac{7}{2}a + b = 13 \end{cases} \Rightarrow \quad 6a = 8; \quad a = \frac{4}{3}$$

$$-\frac{5}{2}\cdot\frac{4}{3} + b = 5; \quad -10 + 3b = 15; \quad b = \frac{35}{3}$$

$$y = \frac{4}{3}x + \frac{35}{3}$$

Ответ: $\left(\frac{4}{3}; \frac{35}{3}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $\begin{cases} \sin(x+y) = 9\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) & (\mathrm{I}) \\ \cos(x+2y) - \sqrt{3}\sin(x+2y) = -16\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) & (\mathrm{II}) \end{cases}$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right) = \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

(I): $\sin(x+y) = 9\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

(II): $\frac{1}{2}\cos(x+2y) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+2y) = -\frac{16}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos(x+2y) - \cos\frac{\pi}{6}\cdot\sin(x+2y) = -8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin\left(x+2y-\frac{\pi}{6}\right) = 8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$x_1 = x+\frac{\pi}{6}$; $y_1 = y-\frac{\pi}{6}$

$x = x_1-\frac{\pi}{6}$; $y = y_1+\frac{\pi}{6}$

$\begin{cases} \sin(x_1+y_1) = 9\sin(x_1) & (\mathrm{I}) \\ \sin(x_1+2y_1) = 8\sin(x_1) & (\mathrm{II}) \end{cases}$

$\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y = \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\sin y}{\cos y} = \frac{\sin x\cdot\cos y - \sin y\cdot\cos x}{\cos x\cdot\cos y} = 2\frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)} =$

$= 2\cdot\frac{\sin\left(x_1-y_1-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos(x_1+y_1)+\cos\left(x_1-y_1-\frac{\pi}{3}\right)}$

$(\mathrm{I})-(\mathrm{II})$:

$\sin(x_1+y_1) - \sin(x_1+2y_1) = \sin x_1$

$\sin\left(x_1+\frac{3}{2}y_1\right) - \frac{1}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

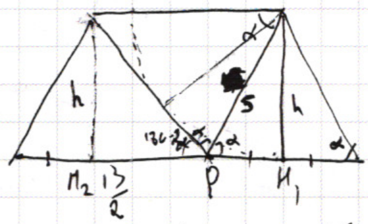
$$\frac{t}{\ln 3+t} \le \frac{t^2}{2\ln 3+t} \qquad \frac{t}{2\ln 3+t} \le 0$$

$\sin\alpha = \frac{12}{13}$; $\cos\alpha = \frac{5}{13}$

$tg\,\alpha = \frac{12}{5}$

3 6 9 12 15 18 21 24 27

$$\frac{t^2(\ln 3+t)-t(2\ln 3+t)}{(\ln 3+t)(2\ln 3+t)} \ge 0$$



$$t\left(\frac{t\ln 3+t^2-2\ln 3-t}{(\ln 3+t)(2\ln 3+t)}\right) \ge 0$$

$\sin\alpha = \frac{h}{5} = \frac{12}{13}$; $h = \frac{60}{13}$

$$t^2+t(\ln 3-1)-2\ln 3=0$$

$PH_1 = 5 \cdot \frac{12}{13}$

$$t = \frac{-\ln 3+1 \pm\sqrt{\ln^2 3-2\ln 3+1+8\ln 3}}{}$$

$PH_1 = 5\cdot\frac{5}{13} = \frac{25}{13}$

3. $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 a_6 a_7$

$M_1H_2 = \frac{25}{13}+\frac{119}{26} = \frac{169}{26} = \frac{13}{2}$

$PH_2 =$

$tg(180-2\alpha) = \frac{h}{PH_2}$

$-tg\,2\alpha = -\frac{2tg\,\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{-2\cdot\frac{12}{5}}{1-\frac{144}{25}} =$

$= \frac{2\cdot 12\cdot 5}{144-25} = \frac{120}{119}$

$PH_2 = \frac{60}{13}\cdot\frac{119}{120} = \frac{119}{26} = 4\frac{15}{26}$

$a_4a_5a_6a_7$
$+\ a_5a_6a_7$
a_6a_7
12345

$a_7 = 5$
$a_6 = 1$
$\varnothing$

169 · 169: 1521, 1014, 169 → 28561; 14400; 14161

119 · 119: 1071, 119, 119 → 14161

$\sin(x+y)\cos\left(y-\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(y-\frac{\pi}{6}\right)$

$3+4+5+5+$

$3+4+20+6=33$

$tg\,x - tg\,y =$

$$= \frac{\sin x\cdot\cos y - \cos x\cdot\sin y}{\cos x\cdot\cos y}$$

$$= 2\frac{\sin(x-y)}{\cos(x+y)+\cos(x-y)}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

6. $\sqrt{\frac{275}{4}+25x-x^2} \le ax+b \le -\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{45}{4}$ 225 280

$-\frac{3}{4}x+\frac{75}{8}=\frac{4}{3}x+\frac{35}{3}$

$\frac{25}{12}x=55$

$\frac{5}{12}x=11$

$x=\frac{12\cdot 11}{5}$

$x^2-2\frac{25}{2}x+\frac{625}{4}=\left(x-\frac{25}{2}\right)^2$

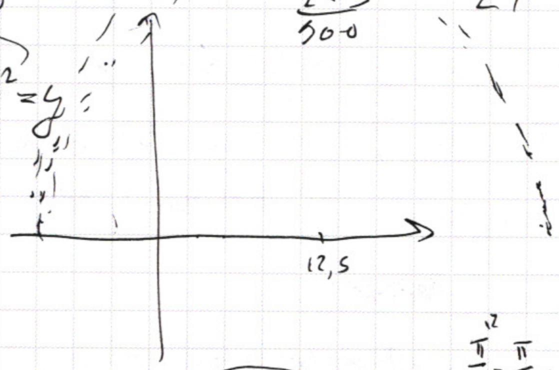
$25x-x^2=-\left(x-\frac{25}{2}\right)^2+\frac{625}{4}$

$\sqrt{\frac{275}{4}+25x-x^2}=\sqrt{\frac{30^2}{4}-\left(x-\frac{25}{2}\right)^2}=y$

$+\frac{625}{275}$
$\overline{900}$

$y^2+\left(x-\frac{25}{2}\right)^2=30^2$

$\sqrt{15^2-\left(x-\frac{25}{2}\right)^2}=y$



$-\frac{x^2}{3}+\frac{5x}{3}+\frac{45}{4}$

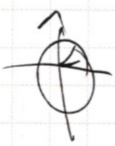
-135
$\underline{75}$
60

$-\frac{25}{4\cdot 3}-\frac{50}{12}+\frac{135}{12}=5$

$-\frac{5}{3}/-\frac{2}{3}=\frac{5}{2}$

$-\frac{25}{12}+\frac{50}{12}+\frac{135}{12}=\frac{110}{12}$

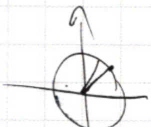
$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}=$
$=\frac{\pi}{2}$



$\begin{cases} \sin(x+y)=9\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right) \\ \frac{1}{2}\cos(x+2y)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x+2y)=-8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=$
$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)=$
$=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

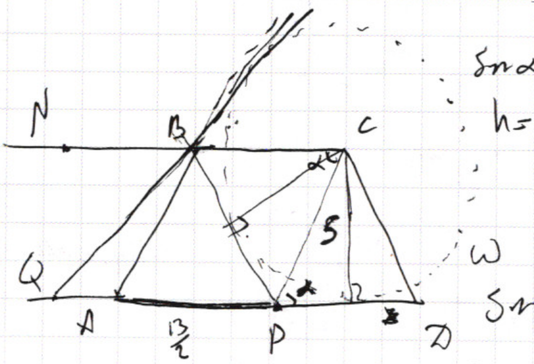
$\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos(x+2y)-\sin\frac{\pi}{3}\sin(x+2y)=-8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$



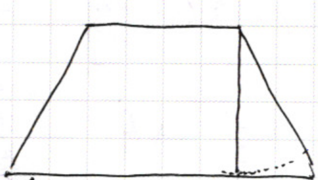
$\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{3}+x+2y\right)=-8\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \\ \sin(x+y)=9\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$

$\sin\alpha=\frac{12}{13}$

$h=\frac{12}{13}\cdot 5$



$\sin\alpha=$

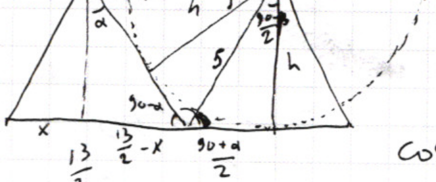


$\beta+\frac{90-\beta}{2}=\alpha;\ \beta-90=2\alpha$

$\alpha=\operatorname{arctg}\frac{12}{5}=\frac{NP}{CP}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{12}{5}\Rightarrow CP=5$

$NP=12$



$\left(\frac{13}{2}-x\right)^2+h^2=$

$\cos\frac{90-\alpha}{2}=\sqrt{\frac{\cos(90-\alpha)+1}{2}}=$

$\cos\frac{90-\alpha}{2}=\frac{h}{5};$

$=\sqrt{\frac{\sin\alpha+1}{2}}=$

$180-90+\alpha$

$\cos\frac{90-\beta}{2}=$

$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1;$

$b=\frac{75}{8}$

$-\frac{3}{4}x+b=y$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha$

$2\sin\alpha\cdot\cos\beta = \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \sin\alpha\cdot\sin\beta$

$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$

$2\sin\alpha\cdot\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$

$$tg(\alpha+\beta) = \frac{\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta} = \frac{tg\alpha \pm tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$$

1.

$4x - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = 44$

$y - \sqrt[3]{y^2-16x^2} = -20$

$4x - \sqrt[3]{64^2-2\cdot64\cdot4x} = 44$

$4x - \sqrt[3]{2^{12}-2^{9}x} = 44;$

$4x - 4\sqrt[3]{64-8x} = 44;$

Ответ: $(9;28)$

$4x - y = 64$

$y = 64-4x$

$y^2 = 64^2 - 2\cdot64\cdot4x + 16x^2$

$x - \sqrt[3]{64-8x} = 11$

$x + \sqrt[3]{8x-64} = 11$

$x = 9$

$y = 64 - 4x = 64 - 36 = \underline{28}$

$8x - 64 =$

$9 + \sqrt[3]{72-64} = 11$

$9+2=11$

$\frac{5}{2}\sqrt{11} \vee \frac{45}{4}$

$10\sqrt{11} \vee 45$

$$\begin{array}{r} -225 \\ 49 \\ \hline 226 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} +350 \\ \hline 576 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \times 24 \\ 24 \end{array}$$

2. $\sqrt{\log_{3x} x^4} \le \log_{9x} \frac{1}{x^2}$

$\ln x = t$ $\quad x \ne \frac{1}{3}$ $\quad x \ne \frac{1}{9}$

$x > 0$

$2\sqrt{\frac{\lg x}{\lg 3 + \lg x}} \le -2\frac{\lg x}{\lg 9 + \lg x}$

$\frac{t}{\ln 3 + t} \ge 0$

$2\sqrt{\frac{t}{\lg 3}}$ $\quad 2\sqrt{\frac{t}{\ln 3 + t}} \le -2\frac{t}{2\ln 3 + t}$

$-\frac{t}{2\ln 3 + t} \ge 0$

$\sqrt{\frac{t}{\ln 3 + t}} \le \frac{-t}{2\ln 3 + t};$

$\frac{t}{\ln 3 + t} \le \frac{t^2}{2\ln 3 + t}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)