МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = 20, \\ y + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = -44. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{5x} x^4} \leqslant \log_{125x} \frac{1}{x^2}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12531.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$, $AP = 13$, $NC = 26$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x-y) = -9\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \\ \cos(x-2y) - \sqrt{3}\sin(x-2y) = 20\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2} \leqslant ax + b \leqslant -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right]$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, грани ABB_1A_1 и BB_1C_1C которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых C_1D_1 и CC_1, плоскости BB_1C_1, а также плоскости ABB_1 в точке A. Эта сфера повторно пересекает отрезок AC_1 в точке M. Найдите $\angle ABC$ и объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AM = 3$, $C_1M = 2$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$$-\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = 20 \\ y + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = -44 \end{cases}$$ Вычтем из первого уравнения второе

$7x - y = 64 \Leftrightarrow$ ~~$y = 7x - 64$ — подставим в первое уравнение:~~

~~$7x + \sqrt[3]{49x^2 - (7x-64)^2} = 20 \Leftrightarrow 7x + \sqrt[3]{(7x)^2 - (7x-64)^2} = 20 \Leftrightarrow$~~

~~$\Leftrightarrow 7x + \sqrt[3]{64(14x-64)} = 20$~~ $\Leftrightarrow x = \frac{64+y}{7}$ — подставим во второе уравнение: $y + \sqrt[3]{49 \cdot \frac{(64+y)^2}{49} - y^2} = -44 \Leftrightarrow y + \sqrt[3]{64^2 + 2 \cdot 64 y} = -44 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sqrt[3]{64(64+2y)} = -(y+44)$, пусть $t = y+44$, тогда уравнение преобразуется в виде: $\sqrt[3]{2 \cdot 64(t-12)} = -t \Leftrightarrow t^3 + 2 \cdot 64 t - 24 \cdot 64 = 0$

~~Заметим, что $t = 8$ — корень: $8^3 + 2 \cdot 64 \cdot 8 - 24 \cdot 64 = 8 \cdot 64 + 16 \cdot 64 - 24 \cdot 64 = 0$.~~

Разделим обе части на $64 \cdot 8$: $\frac{1}{8} \cdot \left(\frac{t}{4}\right)^3 + \left(\frac{t}{4}\right) - 3 = 0$,

пусть $z = \frac{t}{4}$: $\frac{1}{8} \cdot z^3 + z - 3 = 0 \,|\cdot 8 \Leftrightarrow z^3 + 8z - 24 = 0$.

Заметим, что $z = 2$ — корень: $8 + 16 - 24 = 0$. Тогда из следствия Теоремы Безу, можно без остатка поделить $z^3 + 2z - 24$ на $z - 2$:

$$\begin{array}{r|l} z^3 + 8z - 24 & z - 2 \\ \hline -\;z^3 - 2z^2 \quad\quad & z^2 + 2z + 12 \\ 2z^2 + 8z \quad & \\ -\;2z^2 - 4z \quad & \\ 12z - 24 & \\ -\;12z - 24 & \\ 0 & \end{array}$$

Таким образом: ~~$t^3 + 2 \cdot 64 t$~~ $z^3 + 8z - 24 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (z-2)(\underbrace{z^2 + 2z + 12}_{D<0}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z = 2$ $(z^2 + 2z + 12 > 0$, т.к. $D < 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow t = 8 \Rightarrow y = -36 \Rightarrow x = \frac{28}{7} = 4$

Ответ: $x = 4$; $y = -36$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2

$$\sqrt{\log_{5x} x^4} \le \log_{125x}\frac{1}{x^2}$$

ОДЗ: $\begin{cases} 5x>0 \\ 5x\ne 1 \\ x^4>0 \\ 125x\ne 1 \\ 125x>0 \\ \frac{1}{x^2}>0 \\ \log_{5x}x^4 \geqslant 0 \\ \log_{125x}\frac{1}{x^2}\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\ne\frac{1}{5} \\ x>0 \\ x\ne\frac{1}{125} \\ x>0 \\ x\ne 0 \\ x\in[-1;\frac{1}{5}]\cup[1;+\infty) \\ x\in[-1;0)\cup[\frac{1}{125};1] \end{cases}$

$(\frac{1}{125};\frac{1}{5})\cup(\frac{1}{5};1]$

$\Leftrightarrow x\in \cancel{(0;\frac{1}{125})\cup(\frac{1}{125};\frac{1}{5})\cup} \cancel{\cup[1;+\infty)}$

$\sqrt{\log_{5x}x^4}\le\log_{125x}\frac{1}{x^2} \Leftrightarrow 2\sqrt{\log_{5x}x}\le -2\log_{125x}x \Leftrightarrow$

$x\ne 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{\log_{5x}x}\le-\log_{125x}x \Leftrightarrow \log^2_{125x}x-\log_{5x}x\geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{\log_x 125x}\right)^2-\frac{1}{\log_x 5x}\geqslant 0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3\log_x 5+1}\right)^2-\frac{1}{\log_x 5+1}\geqslant 0$

Пусть $t=\log_x 5+1$, тогда неравенство преобразуется в виде:

$\frac{1}{(3t-2)^2}-\frac{1}{t}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{t-(3t-2)^2}{t(3t-2)^2}\geqslant 0 \Leftrightarrow \frac{-9t^2+13t-4}{t(3t-2)^2}\geqslant 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{9t^2-13t+4}{(3t-2)^2t}\le 0$ ~~$\Leftrightarrow \frac{\left(t-\frac{-11+\sqrt{165}}{18}\right)\left(t-\frac{-11-\sqrt{165}}{18}\right)}{t(3t-2)^2}\le 0$~~

~~$-\quad+\quad-\quad+\quad+$; $\frac{-11-\sqrt{165}}{18}$, 0, $\frac{-11+\sqrt{165}}{18}$, $\frac{2}{3}$, t~~ ~~$\Rightarrow t\in(-\infty;\frac{-11-\sqrt{165}}{18}]\cup(0;\frac{-11+\sqrt{165}}{18}]$~~

$\Leftrightarrow \frac{(t-1)(t-\frac{4}{9})}{(3t-2)^2t}\le 0$

~~$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_x 5+1\le\frac{-11-\sqrt{165}}{18} \\ 0<\log_x 5+1\le\frac{-11+\sqrt{165}}{18}\end{array}\right.$~~

$+\quad-\quad+\quad-\quad+$; 0, $\frac{4}{9}$, $\frac{2}{3}$, 1, t $\quad t\in(0;\frac{4}{9}]\cup(\frac{2}{3};1]$

$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_x 5+1>0 \\ \log_x 5+1\le\frac{4}{9}\end{cases} \\ \begin{cases}\log_x 5+1>\frac{2}{3} \\ \log_x 5+1\le 1\end{cases}\end{array}\right.$ → уже это выходим за пределы ОДЗ, поэтому

$x\in(\frac{1}{125};\frac{1}{5})\cup(\frac{1}{5};1]$ — ответ (не забываем $x=1$)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3

$\overline{abcdefg}$ – семизначное число. Заметим, что 12531 – пятизначное число, т.к. $a \neq 0$ => степени ≥ 7 у 10 быть не может, поэтому есть вариант $10^4, 10^5, 10^6$ или $10^3, 10^4, 10^5$; варианта $10^2, 10^3, 10^4$ уже нет, т.к. остаток при делении на 10^4 равен $\overline{defg} \leq 9999$, остаток на 10^3: $\overline{efg} \leq 999$, остаток на 10^2: $\overline{fg} \leq 99$, $9999 + 999 + 99 < 12531$ (очевидно, что ещё меньшие степени брать нельзя). Рассмотрим 2 возможных случая:

1) $\overline{defg} + \overline{cdefg} + \overline{bcdefg} = 12531$, понятно, что если $b \neq 0$, то левая часть больше правой ($\overline{bcdefg}$ станет шестизначным), поэтому $b = 0$: $\overline{defg} + 2 \cdot 10^4 c + 2 \cdot \overline{defg} = 12531$, если $c \neq 0$, то $2 \cdot 10^4 c > 12531$ => $3 \cdot \overline{defg} = 12531$ => $\overline{defg} = 4177$

Таким образом, 7-изначное число имеет вид: $\overline{a004177}$, на позицию „a" подойдёт 9 вариантов (любая цифра, кроме 0)

2) $\overline{cdefg} + \overline{defg} + \overline{efg} = 12531$, если $c \neq 0$, то $2 \cdot 10^4 c > 20000 > 12531$ => $\overline{defg} + \overline{defg} + \overline{efg} = 12531$ (=) $2 \cdot 10^3 d + 3\overline{efg} = 12531$, $3\overline{efg} \leq 3 \cdot 999 = 2997$ => $d \geq 5$, с другой стороны при $d > 7$ $2 \cdot 10^3 d > 12531$ => $d = 5$ или $d = 6$. При $d = 5$: $3\overline{efg} = 2531$ => => $\overline{efg} \neq$ целому числу, т.к. $2531 \not\vdots 3$. При $d = 6$: $3\overline{efg} = 531$ => $\overline{efg} = 177$

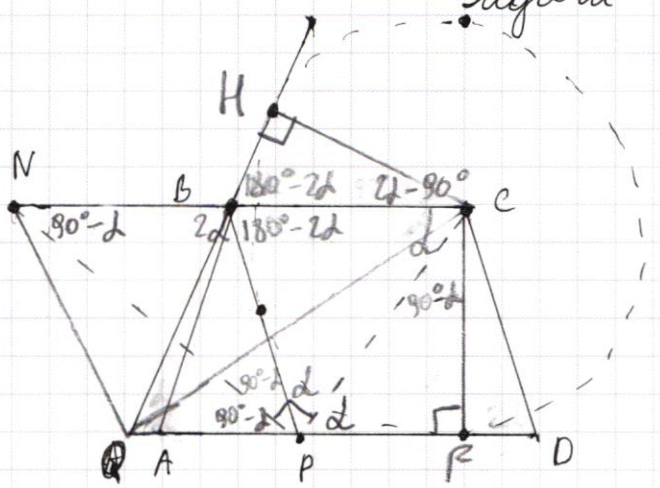
В данном случае 7-значное число имеет вид: $\overline{ab06177}$, на позицию „a" есть 9 вариантов, на позицию „b" 10 (уже все цифры)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Итого: $9 + 9 \cdot 10 = 99$. Ответ: 99

Задача 4.



$\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$

$AP = 13$, $NC = 26$

$\angle ADC - ?$; $\angle NQC - ?$; $NCDQ - ?$

Пусть $\angle NCP = \alpha$, в $\triangle NPC$ − прям. $\angle CNP = 90° - \alpha$, $ABCD$ − трап. $\Rightarrow$ $\Rightarrow AD \parallel BC$, при сек. NP $\angle CNP = \angle NPQ = 90° - \alpha$, при сек. CP $\angle NCP = \angle CPD = \alpha$
Т.к. PC − отрезок из точки пересечения кас. до центра окр. $\Rightarrow CP$ − биссект. $\angle BPD \Rightarrow \angle BPC = \angle CPD = \alpha \Rightarrow$ при сек. BP $\angle NBP = 2\alpha$.
BC − отрезок из точки пересечения кас. до центра окр. $\Rightarrow BC$ − биссект. $\angle HBP$ (H − основание радиуса $\perp$ кас QB) $\Rightarrow \angle HBC = \angle PBC = 180° - 2\alpha$.
В $\triangle HBC$ $\angle HCB = 90° - 180° + 2\alpha = 2\alpha - 90°$. $QHCF$ − впис. (CF − радиус $\perp QD$), т.к. $\angle QHC + \angle QFC = 180° \Rightarrow \angle BQD = 180° - 2\alpha$. QC − биссект. $\angle HQD \Rightarrow \angle HQC =$ $= \angle DQC = 90° - \frac{\alpha}{2}$. Заметим, что $\triangle NBP$ − равноб. и CBP − равноб. $\Rightarrow$ $\Rightarrow BP$ − мед. в $\triangle NPC \Rightarrow BP = \frac{1}{2} NC = 13 = AP \Rightarrow \triangle APB$ − равноб., т.к. $\angle APB = 180° - 2\alpha \Rightarrow \angle ABP = \angle BAP = \alpha$. Т.к. $ABCD$ − равноб. трап. $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle BAD = \angle ADC = \alpha \Rightarrow \angle ADC = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5

$\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x\cdot\cos y}$

$$\begin{cases}\sin(x-y) = -8\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) & (1)\\ \cos(x-2y)-\sqrt{3}\sin(x-2y) = 20\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) & (2)\end{cases}$$

$\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = \cos x\cdot\cos\frac{\pi}{3}+\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = \sin x\cdot\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x$

$\cos(x-2y)-\sqrt{3}\sin(x-2y)\left(=20\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)\Big|:2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos(x-2y)-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x-2y) = \cos\left(x-2y+\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x-y-\frac{\pi}{6}\right)$

Разделим второе уравнение на 2 и сложим (1) и (2):

$\sin(x-y)+\sin\left(x-2y-\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right)$

$\sin(x-y)+\sin\left(x-2y-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = 0$

$\sin\left(x-2y-\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right) = 2\cos\frac{x-2y-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}+x}{2}\cdot\sin\frac{x-2y-\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{6}-x}{2} =$

$= 2\cos(x-y)\cdot\sin\left(-y-\frac{\pi}{6}\right)$

$\sin(x-y)+2\cos(x-y)\cdot\sin\left(-y-\frac{\pi}{6}\right) = 0$

Теперь сделаем аналогичную процедуру, только сведём всё к косинусам:

$\sin(x-y)+\cos\left(x-2y+\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$

$\sin(x-y)+\cos\left(x-2y+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = 0$

$\cos\left(x-2y+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) = -2\cdot\sin\frac{x-2y+\frac{\pi}{3}+x-\frac{\pi}{3}}{2}\cdot\sin\frac{x-2y+\frac{\pi}{3}-x+\frac{\pi}{3}}{2} =$

$= -2\sin(x-y)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-y\right) = 0$

$\sin(x-y)-2\sin(x-y)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}-y\right) = 0 \Leftrightarrow \sin(x-y)\left(1-2\sin\left(\frac{\pi}{3}-y\right)\right) = 0$

1) $\sin(x-y) = 0 \Leftrightarrow x-y = \pi n, n\in\mathbb{Z}$

2) $\sin\left(\frac{\pi}{3}-y\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\frac{\pi}{3}-y = \frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ \frac{\pi}{3}-y = \frac{5\pi}{6}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}y = \frac{\pi}{6}-2\pi n, n\in\mathbb{Z}\\ y = -\frac{\pi}{2}-2\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

В 1) случае $tg\,x = tg\,y$, т.к. период tg равен π ($x = y + \pi n, n \in \mathbb{Z}$)
Во 2) не подходит множество $y = -\frac{\pi}{2} - 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, т.к. в точке $-\frac{\pi}{2}$ на тригонометрическом круге $\cos = 0 \Rightarrow$ тангенс не сущ. Теперь если $y = \frac{\pi}{6} - 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$, $tg\,y = tg\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Зная соотношения x и y можно подставить, например, значение y в первое уравнение и найти x, тем самым найти и $tg\,x$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$-\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{49x^2-y^2} = 20 \\ y + \sqrt[3]{49x^2-y^2} = -44 \end{cases}$$

$(7x-7x+64)(7x+7x-64)$

$7x - y = 64 \Leftrightarrow y = 7x-64$

$7x + \sqrt[3]{49x^2-(7x-64)^2} = 7x + \sqrt[3]{49x^2-49x^2+14\cdot 64x - 64^2} = 20 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7x + \sqrt[3]{14\cdot 64x - 64^2} = 7x + 4\sqrt[3]{14\cdot 4x - 64} = 20$

$\log^2_{125x} x \geq \log_{5x} x$

$\dfrac{1}{(\log_x 125x)^2} - \dfrac{1}{\log_x 5x} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{(\log_x 125+1)^2} - \dfrac{1}{(\log_x 5+1)} \geq 0$

Пусть $t = \log_x 5+1$, тогда $\log_x 125+1 = 3t-2$

$\dfrac{1}{(3t-2)^2} - \dfrac{1}{t} \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{t-(3t-2)^2}{(3t-2)^2\cdot t} \geq 0$

$\begin{array}{r} 16 \\ \cdot 9 \\ \hline 144 \end{array}$

$t-(9t^2-12t+4) = -9t^2-11t+4 = 0 \Leftrightarrow 9t^2+11t-4=0$

$D = 121+144 = 165$

$t_1 = \dfrac{-11+\sqrt{165}}{18}$; $t_2 = \dfrac{-11-\sqrt{165}}{18}$

$+ \quad - \quad + \quad - \quad +$

$\dfrac{-11-\sqrt{165}}{18} \quad 0 \quad \dfrac{-11+\sqrt{165}}{18} \quad \dfrac{2}{3}$

1)

2000
4000
6000

$3\cdot 999 = 2997$

$d \geq 5$

$\dfrac{\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{6}$ $\quad \dfrac{5\pi}{6} - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi-2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{\log_{5x} x^4} \le \log_{125x}\frac{1}{x^2}$

$(\log_{5x}x^4)^{\frac{1}{2}} \le \log_{125x} \cdot x^{-2}$

$\sqrt{4\log_{5x}x} \le -2\log_{125x} \cdot x$

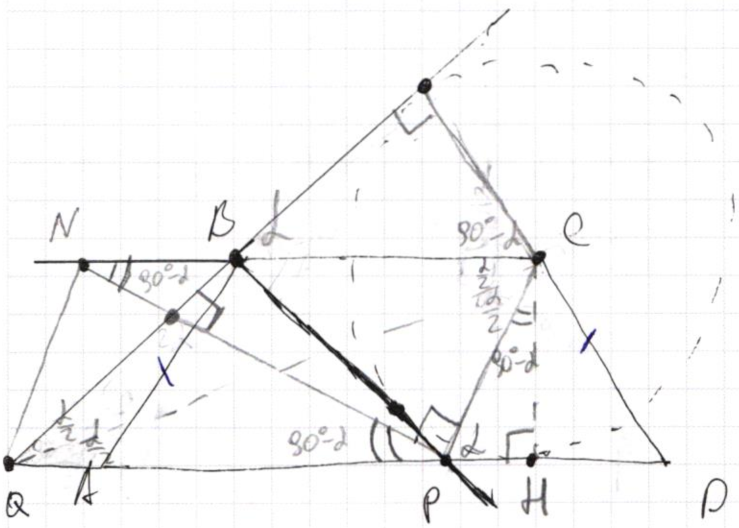
ОДЗ: $5x\ne 1,\ 5x>0,\ x^4>0,\ 125x\ne 1$

$125x>0,\ \frac{1}{x^2}>0,\ \log_{5x}x^4\ge 0$

$\sqrt{\log_{5x}x} \le -\log_{125x}x$

$\log_{125x}x<0$

$\log^2_{125x}x \ge \log_{5x}x$



$\angle ADC$ - ?

$\angle NQC$ - ?

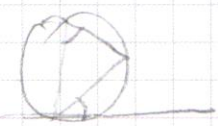
S_{NCDQ} - ?

$\angle NCP = \text{arctg}\,\frac{5}{12} = \alpha$

$AP = 13$

$NC = 26$

$\angle CQP = 180° - 90° + \alpha - 90° - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{2}$



$\cancel{\frac{90°-\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} + 90°-\alpha + 90°-\beta+\beta = 180°}$

$\cancel{\frac{90°-\beta}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha \Leftrightarrow 90-\beta = \alpha \Leftrightarrow \alpha+\beta = 90°}$

$\overline{abcdefg}$, 12531

$\overline{cdefg} + \overline{defg} + \overline{efg} = 10^4 c + 10^3 d + \overline{efg} + 10^3 d + \overline{efg} + \overline{efg}$ (1)

$\overline{bcdefg} + \overline{cdefg} + \overline{defg}$ (2)

(1) $c=1,\ 2\cdot 10^3 d + 3\cdot\overline{efg} = 2531 \Rightarrow 3\cdot\overline{efg} = 531 \Rightarrow$

$\Rightarrow \overline{efg} = 177$

..11177

9 10

(2) $10^5 \underset{0}{b} + 2\cdot\overline{cdefg} + \overline{defg}$

$2\cdot 10^4 \underset{0}{c} + 3\cdot\overline{defg} = 12531$

$3\cdot\overline{defg} = 12531 \Leftrightarrow \overline{defg} = 4177$

12531 | 3
-12 | 4177
05
-3
23
-21
21

.004177

9

Итого: $9\cdot 10 + 9 = 9\cdot 11 = 99$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(x-y) = -9\cos(x-\frac{\pi}{3})$

$\cos(x-\frac{\pi}{3}) = \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{3} + \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

$\sin(x+\frac{\pi}{6}) = \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$

$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cdot \cos y}$

$(20-7x)^3 = 20^3 - 3\cdot 49x^2\cdot 20 - 3\cdot 20^2\cdot 7x + (7x)^3 =$

$= 400 - 49\cdot 60x^2 - 21\cdot 400x + 7^3x^3$

$x = \frac{64+y}{7}$

$y \neq \sqrt[3]{49\cdot\frac{(64+y)^2}{49} - y^2} = y + \sqrt[3]{64^2 + 2\cdot 64y + y^2 - y^2} = y + 4\sqrt[3]{2y+64}$

$-\underbrace{(y+44)}_{t} = 4\sqrt[3]{2\underbrace{(y+32)}_{t-12}}$

$-t^3 = 64\cdot 2(t-12) \Leftrightarrow t^3 + 64\cdot 2t - 64\cdot 24 = 0 \mid :64\cdot 8$

$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{t}{4}\right)^3 + 2\cdot\left(\frac{t}{4}\right) - \frac{22}{4}$

$t^3 + 2\cdot 64t - 24\cdot 64 \mid t-8$

$-t^3 - 8t^2 \mid t^2$

$\frac{1}{4}z^3 + 2z - \frac{24}{4} = 0 \mid \cdot 4$

$z^3 + 8z - 24 = 0$

$z = 2$ — корень

$z^3 + 8z - 24 \mid z-2$

$-z^3 - 2z^2 \mid z^2 + 2z + 12$

$2z^2 + 8z$

$2z^2 - 4z$

$12z - 24$

$\log_{5x} x^4 \geq 0$

$(5x-1)(x^4-1) \geq 0$

$(5x-1)(x^2-1)(x^2+1) \geq 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(5x-1)(x-1)(x+1) \geq 0$

$- \quad + \quad - \quad +$

$-1 \quad \frac{1}{5} \quad 1 \quad x$

$\log_{125x} \frac{1}{x^2} \geq 0$

$(125x-1)\left(\frac{1}{x^2}-1\right) \geq 0$

$\frac{(125x-1)(1-x)(1+x)}{x^2} \geq 0$

$- \quad + \quad - \quad + \quad -$

$-1 \quad 0 \quad \frac{1}{125} \quad 1$

$\left(\frac{1}{\log_x 125x}\right)^2$

$\log_x 5+1=t$

$t-(9t^2-12t+4)$

$121+144=165$

$\log_x 5 \leq \frac{-29-\sqrt{165}}{18}$

$5 \leq x^{\frac{-29-\sqrt{165}}{18}}$

$169-144=25$

$t_1 = \frac{13+5}{18}$

$0 < \log_x 5+1 \leq \frac{4}{9}$

$\log_x 5 > -1$

$\log_x 5 > \log_x x^{-1} \Leftrightarrow x^{-1} > 5$

$\log_x 5 \leq \frac{5}{9} \Leftrightarrow 5 \geq x^{\frac{5}{9}}$

5

16

$\frac{\times 9}{144}$

$\log_x 5 > -1$

$5 < \frac{1}{x}$

$5x < 1$

$x < \frac{1}{5}$

$\log_x 5 \leq \frac{5}{9}$

$5 \geq x^{\frac{5}{9}}$

$5 \geq \sqrt[9]{5x}$

$\sqrt[5]{5^9} \geq x$

$5 \cdot \sqrt[5]{5^4} \geq x$

$\log_x 5 > \frac{1}{3}$

$5 < \sqrt[3]{x}$

$x > 125$

$\log_x 5 \leq 0$

$\log_x 5+1 = \log_x 5x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\log_{5x} x}$

$\frac{1}{2}\cos(x-2y) - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(x-y) =$

$\sin\frac{\pi}{6} \quad \cos\frac{\pi}{6}$

$= \sin\left(x-2y-\frac{\pi}{6}\right)$

$\cos\left(x-2y+\frac{\pi}{3}\right)$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)