МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 2.

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases} \Rightarrow$$

~~$x \geq 12y \Rightarrow \begin{cases} (x-12y)^2 = 2xy - 12y - x + 6 \\ (x-6)^2 + 9(4y-1)^2 = 90 \end{cases} \Rightarrow$~~

~~$\Rightarrow \begin{cases} \\ 4y - 1 = \sqrt{10 - \frac{(x-6)^2}{9}} \end{cases}$~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

№1

(1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; (2) $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

(1) $\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{2\sqrt5}$; или (1) $\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

(2) : $\sin 2\alpha(\cos 4\beta + 1) + \sin 4\beta \cos 2\alpha = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin 2\alpha (2\cos^2 2\beta) + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 2\beta(\underbrace{\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha}_{(1)}) = -\frac{1}{5} \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow \cos 2\beta\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{5} \Leftrightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\beta = \left[\begin{array}{l} \arccos(\frac{1}{\sqrt5}) + 2\pi k, k\in\mathbb{Z} \\ -\arccos(\frac{1}{\sqrt5}) + 2\pi k, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$ (*)

Подставим 2β в (1):

(1): $2\alpha + 2\beta = \left[\begin{array}{l} \arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}) + 2\pi k \\ \pi - \arcsin(-\frac{1}{\sqrt5}) + 2\pi k \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha = \left[\begin{array}{l} \text{I}\ -(\arcsin(\frac{1}{\sqrt5}) + \arccos(\frac{1}{\sqrt5})) \\ \text{II}\ \pi + \arcsin(\frac{1}{\sqrt5}) - \arccos(\frac{1}{\sqrt5}) \\ \text{III}\ -(\arcsin(\frac{1}{\sqrt5})) + \arccos(\frac{1}{\sqrt5}) \\ \text{IV}\ \pi + \underbrace{\arcsin(\frac{1}{\sqrt5}) + \arccos(\frac{1}{\sqrt5})}_{\frac{\pi}{2}} \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\alpha = \left[\begin{array}{l} -\frac{\pi}{2}\ \text{I} \\ \frac{3\pi}{2}\ \text{IV} \\ \arccos(\frac{1}{\sqrt5}) - \arcsin(\frac{1}{\sqrt5})\ \text{III} \\ \pi - (\arccos(\frac{1}{\sqrt5}) - \arcsin(\frac{1}{\sqrt5}))\ \text{II} \end{array}\right. \Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow \quad \alpha = \left[\begin{array}{ll} -\frac{\pi}{4} & \text{I} \\ \frac{3\pi}{4} & \text{IV} \\ \frac{1}{2}\left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)\right) & \text{III} \\ \frac{1}{2}\left(\pi - \left(\arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)\right) & \text{II} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\alpha = \left[\begin{array}{ll} -1 & \text{I} \\ \operatorname{tg}(\text{III}) \\ \operatorname{tg}(\text{II}) \end{array}\right.$$

III:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\arccos\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)}{2}\right) =$$

$$= \left[\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin(\alpha/2)}{\cos(\alpha/2)} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \pm\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\right] =$$

$$= \pm\left(\frac{\sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt5}\right)\cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right) - \frac{1}{5}}{1+\cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt5}}\right) =$$

$$= \pm\left(\frac{\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} - \frac{1}{5}}{1+\frac{2}{5}+\frac{2}{5}}\right) = \pm\left(\frac{\frac{3}{5}}{\frac{9}{5}}\right) = \pm\frac{1}{3}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\not\!\! (\mathrm{II})$: $tg(\mathrm{II}) = \cancel{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - (\mathrm{III})\right) = ctg(\mathrm{III}) = \pm 3$, т.о.

Ответ: $\{\cancel{\pm...}\{-1; \pm\frac{1}{3}; \pm 3\}$.

N 3.

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cancel{10x + \ldots 3^{\log_3 x} |x^2 - 10x| \geqslant x^2 - 10x + (3^{\log_3 5})^{\log_3(10x-x^2)}}$$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 - 10x + \left(3^{\log_3 5}\right)^{\log_3(10x - x^2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 - 10x + (10x - x^2)^{\log_3 5}.$$

ОДЗ: $(10x - x^2) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 10 \\ x > 0 \end{cases}$

$$(10x - x^2)^{\log_3 4} \geqslant x^2 - 10x + (10x - x^2)^{\log_3 5}$$

$\exists\, 10x - x^2 = t > 0$, Тогда: $\cancel{(\ldots)}$

$$t^{\log_3 4} \geqslant t^{\log_3 5} - t \Leftrightarrow t^{\log_3 4} \geqslant t(t^{\log_3 5 - 1} - 1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^{(\log_3 4) - 1} \geqslant t^{\log_3 5 - 1} - 1 \Leftrightarrow \cancel{\ldots}$$

$$\Leftrightarrow 1 \geqslant t^{((\log_3 4) - 1)}\left(t^{\log_3 5 - \log_3 4} - 1\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \geqslant \log_3 4 - 1 + \log_t\left(t^{\log_3 \frac{5}{4}} - 1\right) \ldots$$

~~Единств~~ корень

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4 (II) : $tg(\mathrm{II}) = tg\left(\frac{\mathrm{II}}{2} - \mathrm{III}\right) = ctg(\mathrm{III}) = \pm 3$, т.о.

Ответ: $\{-1; \pm\frac{1}{3}; \pm 3\}$.

№3

$$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (0;10)$

$$(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2-10x + \left(3^{\log_3 5}\right)^{\log_3(10x-x^2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2-10x + (10x-x^2)^{\log_3 5}.$$

З $10x-x^2 = t$, $t>0$, тогда

$$t^{\log_3 4} \geq -t + t^{\log_3 5}$$

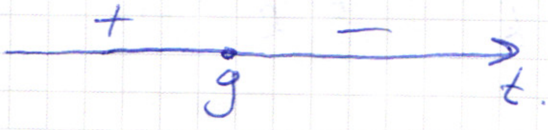
Р.у. $t^{\log_3 4} + t = t^{\log_3 5}$ - 1 корень.

$t=9 \Rightarrow 9^{\log_3 4} + 9 = 9^{\log_3 5} \Leftrightarrow \underline{4^2+3^2=5^2}$

т.о. $t=9$ - корень.

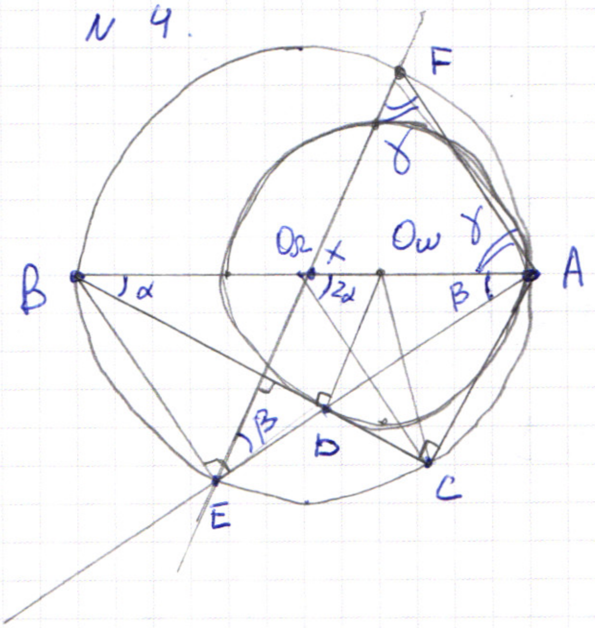
$$10x - x^2 \leq 9 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 9 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq 9 \end{array}\right. \\ x \in (0;10) \end{cases}$$



Ответ: $(0;1] \cup [9;10)$

N 4.



$X = EF \cap AB$

$CD = \frac{15}{2}$ $BD = \frac{17}{2}$

① $\sphericalangle \triangle BO_\omega D$ и $\triangle CO_\omega D$

Они прямоуг. с $\angle D = 90^\circ$.

$BO_\omega = 2R_\Omega - R_\omega$
$O_\omega D = R_\omega$
$BD = \frac{17}{2}$
$\Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{17}{2}\right)^2 + R_\omega^2 = (2R_\Omega - R_\omega)^2 \; (1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4R_\Omega - 4R_\Omega R_\omega - \left(\frac{17}{2}\right)^2 = 0 \; (1)$$

② Пусть $\angle ABC = \alpha$, тогда $\angle AO_\Omega C = 2\alpha$ ~~вписанный~~ (общая $\cup AC$)

из $\triangle DO_\omega C$: $\left(\frac{15}{2}\right)^2 + R_\omega^2 = O_\omega C^2$ (2)

по т. cos-ов для $\triangle BO_\omega C$: $O_\omega C^2 = (2R_\Omega - R_\omega)^2 + \left(\frac{15+17}{2}\right)^2 -$

$- 2 \cdot 16 \cdot (2R_\Omega - R_\omega)\cos\alpha$ (3)

⊗

по т-cos-ов для $\triangle O_\Omega O_\omega C$: $O_\omega C^2 = R_\Omega^2 + (R_\Omega - R_\omega)^2 -$

$- 2R_\Omega (R_\Omega - R_\omega)\cos 2\alpha$. (4)

А теперь заметим, что $\triangle BO_\omega D \sim \triangle BAC$ (по 2 углам)

т.о. $\frac{BO_\omega}{BA} = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow \frac{2R_\Omega - R_\omega}{2R_\Omega} = \frac{17}{2 \cdot 16} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 - \frac{17}{32} = \frac{R_\omega}{2R_\Omega} \Leftrightarrow R_\Omega = \frac{16}{15} R_\omega$ (5)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\cancel{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{\cos\alpha+1}} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha+1}}$$

$$S_{AFE} = S_{AO_\Omega E} + S_{AO_\Omega F} = \frac{R_\Omega^2}{2}\left(\sin 2\gamma + \sin 2\beta\right) =$$

$$= \frac{17^2}{2}\left(\sin\left(\frac{\pi}{2} + \arccos\frac{8}{17}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos\frac{8}{17}\right)\right) =$$

$$= \frac{17^2}{2}\left(\cos\left(-\arccos\frac{8}{17}\right) + \cos\left(\arccos\frac{8}{17}\right)\right) =$$

$$\cancel{= \frac{17^2}{2}\left(2\cdot\frac{8}{17} \ldots \frac{8}{17} - 1\right)} =$$

$$\cancel{= \frac{17\cdot 32}{2} - 17^2 = 128}$$

$$= \frac{17^2}{2}\cdot\left(\frac{8}{17} + \frac{8}{17}\right) = \frac{16\cdot 17}{2} = 8\cdot 17 = \underline{136}$$

Ответ: $R_\omega = 17\cdot\frac{15}{16}$; $R_\Omega = 17$; $\angle AFE = \frac{\pi}{4} + \frac{\arccos\frac{8}{17}}{2}$

$\underline{S_{AEF} = 136}$

Подставим (5) в (1): $\left(\frac{17}{2}\right)^2 + R_\omega^2 = \left(\frac{32}{15}R_\omega - R_\omega\right)^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(\frac{17}{2}\right)^2 = \left(\left(\frac{17}{15}\right)^2 - 1\right) R_\omega^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R_\omega = \frac{17^2 \cdot 15}{2\sqrt{17^2-15^2}} = \frac{17 \cdot 15}{16} \Rightarrow R_\Omega = 17$

$\angle AFE$ - ?

- (4) $\angle AFE = \angle ABE$

- ~~$AC = \sqrt{...+17^2-16^2} = \sqrt{33}$~~

- ~~т.о.~~ $\exists \angle BAE = \beta \Rightarrow \angle BO_\omega D = 2\beta$, но $\angle BO_\omega D$ и $\angle BXE$ - соответственные $\Rightarrow$ $\Rightarrow \angle BXE = 2\beta$

- $\angle BO_\Omega E = 2\beta$ (т.к. центральный угол опир. на $\cup BE$)

т.о. $X \equiv O_\Omega \Rightarrow AEF = d \Rightarrow \angle EAF = 90°$

$\exists \gamma = \angle O_\Omega FA = \angle O_\Omega AF$ (угл у основания р/б Δ)

~~т.о.~~ т.о. $\gamma + \beta = 90° \Rightarrow \gamma = 90° - \beta$

- из ΔBDO_ω: $2\beta + \alpha = 90° \Rightarrow \beta = 45° - \frac{\alpha}{2}$

- из ΔABC: $\cos\alpha = \frac{16}{34} = \left(= \frac{\cancel{2R_\Omega}}{BC}\right)\left(\frac{BC}{2R_\Omega}\right) = \frac{8}{17}$

$\Rightarrow \alpha = \arccos\frac{8}{17} \Rightarrow \beta = 45° - \frac{\arccos 8/17}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \gamma = 90° - 45° + \frac{\arccos 8/17}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \gamma = \frac{\pi}{4} + \frac{\arccos 8/17}{2}$ ~~рко~~ $= \angle AFE$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Р 4~~ $\cancel{t^{(1-\log_3 4)} = t^{\log_3 \frac{5}{4}} - 1 \Leftrightarrow}$

$\cancel{\Leftrightarrow t^{(\log_3 \frac{1}{4})} = t^{\log_3 \frac{5}{4}} - 1}$

N2.

$$\begin{cases} x-12y = \sqrt{2y(x-6)-(x-6)} \\ (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-6)^2 = (10-(2y-1)^2)9 \\ x-12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Rightarrow \exists\ x-6=a;\ 2y-1=b$, тогда

$$\begin{cases} a^2 = (10-b^2)9 \\ a-6b = \sqrt{ab} \end{cases} \Leftrightarrow_{a>6b} \begin{cases} a^2 = 9(10-b^2) \\ a^2-12ba+36b^2 = ab \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 = 9(10-b^2) \\ 90+27b^2 = 13ab \end{cases} \Rightarrow \Big\{ \cancel{\ldots}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 3\sqrt{10-b^2} \\ \cancel{a=}\ 9(10+3b^2) = 13b\cdot 3\sqrt{10-b^2}\ (*) \end{cases}$$

(*) $9b^2+30=13b\sqrt{10-b^2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9(9b^4+60b^2+100)=169b^2(10-b^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 81b^4+169b^4+540b^2-1690b^2+900=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 250b^4-1150b^2+900=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5b^4-23b^2+18=0$

$b^2=1 \Rightarrow b=\pm 1$

$b^2=\frac{18}{5} \Rightarrow b=\pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}=\frac{\pm 6}{\sqrt{10}}$

$a=3\sqrt{10-b^2}=\left[\begin{array}{l} 9,\ b=\pm 1 \\ \frac{24}{\sqrt{10}},\ b=\pm\frac{6}{\sqrt{10}} \end{array}\right.$, но $b=-1$ и $b=\frac{6}{\sqrt{10}}$

но $b=-1$ - не удов ОДЗ $(ab\geq 0)$
$b=-\frac{6}{\sqrt{10}}$

$b=\frac{6}{\sqrt{10}}$ - не удов ОВР $(a\geq 6b)$

Т.о. корень $a=9$; $b=1$

$x-6=a \Rightarrow x=15$

$2y-1=1 \Rightarrow y=1$

Ответ: $\{15; 1\}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$x \in [2;25]$
$y \in [2;25]$, где $x, y \in \mathbb{N}$.

$f(x/y) < 0 \Leftrightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow$ x, y - простые.

$\Leftrightarrow \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{1}{4y}\right] < 0$

$\forall y$ удов условию $\left[\frac{1}{4y}\right] = 0$ $\left[\frac{x}{4}\right] \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x, y$ не могут быть простыми вместе.

$f(1) = f(2) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$f\left(\frac{3}{2}\right) = f(3) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$f\left(\frac{5}{2}\right) = f(5) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

$f\left(\frac{7}{2}\right) = f(7) + f\left(\frac{1}{2}\right) = 1$

№6.

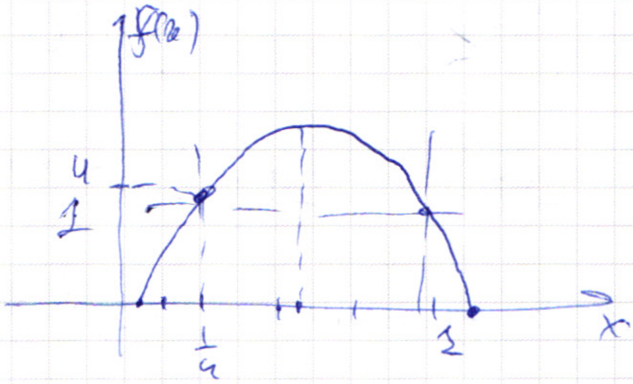
$$\underbrace{\frac{16(x-1)}{4(x-1)-1}}_{=g(x)} \le ax+b \le \underbrace{-32x^2+36x-3}_{=f(x)}$$

↓ $f(x)$ на $x\in[\frac{1}{4};1]$.

~~$x = f(x)$~~. $x_0 = \frac{-36}{-64} = \frac{9}{16} =$

$$x_{1,2} = \frac{-36 \pm \sqrt{36^2-12\cdot 32}}{-64} = \frac{9}{16} \pm \frac{4\sqrt{9^2-24}}{64} =$$

$$= \frac{9\pm\sqrt{57}}{16}$$



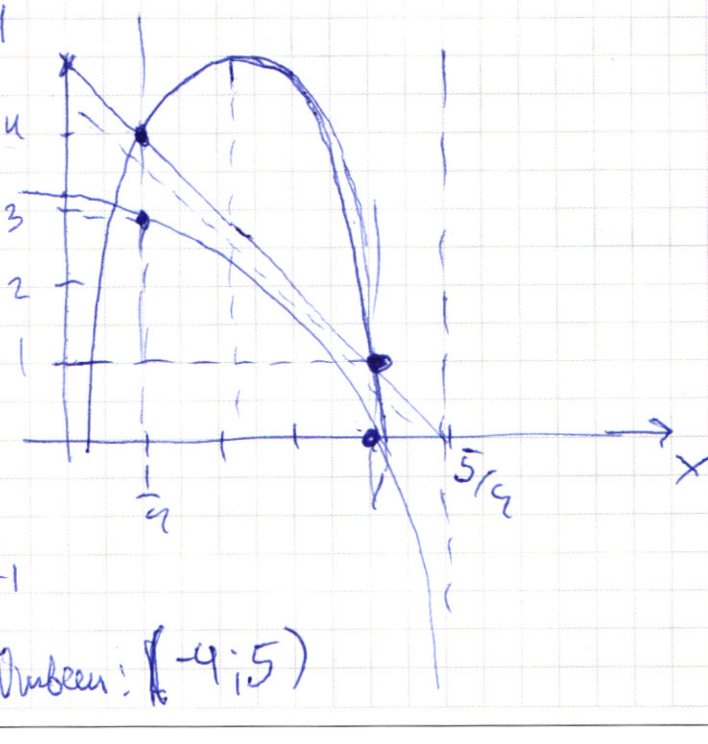
$f(1) = 1$

$f(\frac{1}{4}) = 4$

$ax+b = -4x+5$ – не имеет решений на $x\in[\frac{1}{4};1]$.

② ↓ $g(x) = \frac{16(x-1)}{4(x-1)-1}$

$g(\frac{1}{4}) = \frac{-12}{-4} = 3$



$$\left.\begin{array}{l} 3 \le \frac{a}{4}+b \le 4 \\ 0 \le a+b \le 1 \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} a \ge 12-4b \\ a \le 16-4b \\ a \ge -b \ge a-1 \\ a \le 1-b \end{array}$$

Ответ: $(-4;5)$