# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина $A$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $AD$. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра $BC$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

$u=x-2$

$v=y-1$ $\qquad u-2v=x-2y$

$$\begin{cases} u-2v=\sqrt{uv} \quad (1) \\ u^2+9v^2=25 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $u-2v=\sqrt{uv}$

$u^2-4uv+4v^2=uv, \quad uv\geq 0$

$u^2-5uv+4v^2=0$

$u(u-v)-4v(u-v)=0$

$(u-v)(u-4v)=0$

$$\left[\begin{array}{l} u=v \quad (I) \\ u=4v \quad (II) \end{array}\right.$$

(2) при $u=v$

$v^2+\cancel{3}9v^2=25$

$10v^2=25$

$v=\pm\frac{5}{\sqrt{10}} \longrightarrow u=\pm\frac{5}{\sqrt{10}}$

$v=\pm\frac{\sqrt{10}}{2} \longrightarrow u=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$ $\longrightarrow$ см стр. 2

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(2) при $u = 4v$ Задание 2 – продолжение

$16v^2 + 9v^2 = 25$

$25v^2 = 25$

$v = \pm 1 \rightarrow u = \pm 4$

1. $u = \frac{\sqrt{10}}{2} \rightarrow x - 2 = \frac{\sqrt{10}}{2} \rightarrow x = \frac{\sqrt{10}+4}{2}$

$v = \frac{\sqrt{10}}{2} \rightarrow y - 1 = \frac{\sqrt{10}}{2} \rightarrow y = \frac{\sqrt{10}+2}{2}$, $uv \geq 0$ – решение

2. $u = -\frac{\sqrt{10}}{2} \rightarrow x - 2 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \rightarrow x = \frac{4-\sqrt{10}}{2} \geq 0$

$v = -\frac{\sqrt{10}}{2} \rightarrow y - 1 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \rightarrow y = \frac{2-\sqrt{10}}{2} < 0$, $uv \geq 0$ – решение

3. $u = 4 \rightarrow x - 2 = 4 \rightarrow x = 6$

$v = 1 \rightarrow y - 1 = 1 \rightarrow y = 2$, $uv \geq 0$ – решение

4. $u = -4 \rightarrow x - 2 = -4 \rightarrow x = -2$

$v = -1 \rightarrow y - 1 = -1 \rightarrow y = 0$, $uv \geq 0$ – решение

Ответ: $(-2; 0)$, $(6; 2)$, $\left(\frac{\sqrt{10}+4}{2}; \frac{\sqrt{10}+2}{2}\right)$, $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}; \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$

Задание 1

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$$\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$$

$$-\frac{1}{\sqrt5}\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \to \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha + \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta = -\frac{4}{5}$$

$$\cancel{-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}}$$

$$\left[\begin{array}{l}\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5}\\ \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{5}\end{array}\right.$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} \pm \frac{2}{5}$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha + 0 = -\frac{4}{5}\\ \sin 2\alpha - \frac{4}{5} = -\frac{4}{5}\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \quad (1)\\ \sin 2\alpha = 0 \quad (2)\end{array}\right.$$

$$(2)\quad \sin 2\alpha = 0 \to \sin\alpha = 0 \to \operatorname{tg}\alpha = 0$$

$$(1)\quad \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{5}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2}{5} \quad \Big|: \cos^2\alpha \neq 0 \text{ по усл.}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{5}(\operatorname{tg}^2\alpha+1)$$

$$2\operatorname{tg}^2\alpha + 5\operatorname{tg}\alpha + 2 = 0$$

$$D = 25 - 16 = 9 = 3^2$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{-5\pm3}{4} = \left[\begin{array}{l}-2\\ -\frac{1}{2}\end{array}\right.$$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \operatorname{tg}\alpha = -2 \\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$$

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha \in \{0; -\frac{1}{2}; -2\}$.

Задача 6

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$$

$y = \frac{12x+11}{4x+3} = \frac{2}{4x+3} + 3$ — гипербола с асимптотами $y = 3$ и $x = -\frac{3}{4}$

~~при~~ $y = -8x^2 - 30x - 17$ - парабола ветвями вниз

для параболы: при $x = -\frac{11}{4}$ $y = -8\cdot\frac{121}{16} + \frac{11\cdot 30}{4} - 17 = 5$

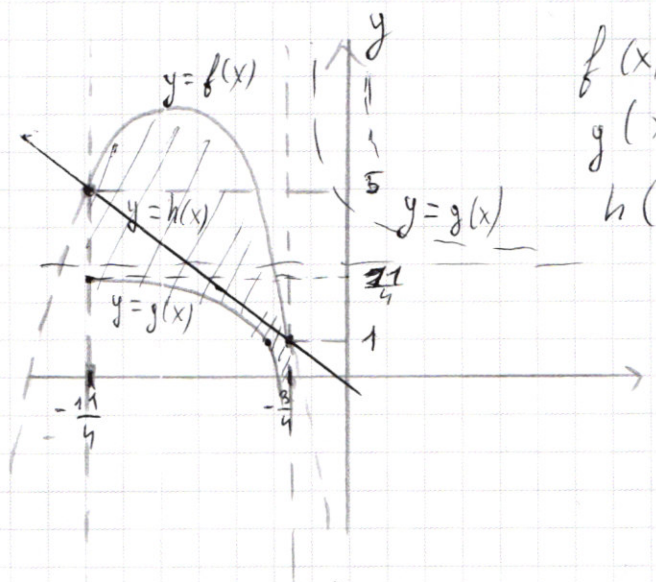
при $x = -\frac{3}{4}$ $y = -8\cdot\frac{9}{16} + \frac{30\cdot 3}{4} - 17 = 1$

для гиперболы: при $x = -\frac{11}{4}$ $y = \frac{2}{-8} + 3 = 2\frac{3}{4} < 5$

при $x = -\frac{3}{4}$ $y$ стремится $-\infty$, при этом $y = 3$ - асимптота.

для $y = 1$ $1 = \frac{2}{4x+3} + 3 \to x = -1$, что левее $x = -\frac{3}{4}$, функция монотонна

Тогда гипербола на всем промежутке $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ ниже параболы, а значит $\frac{12x+11}{4x+3} < -8x^2 - 30x - 17$




$f(x) = -8x^2 - 30x - 17$

$g(x) = \frac{12x+11}{4x+3}$

$h(x) = ax + b$

В заштрихованной области могут быть прямые $y = h(x)$

$$\begin{cases} h(-\frac{11}{4}) \leq 5 \\ h(-\frac{11}{4}) \geq 2\frac{3}{4} \\ h(-\frac{3}{4}) \leq 1 \\ h(x) \geq g(x) \end{cases}$$

$\cancel{\frac{11}{4} \leq h(-\frac{11}{4}) \leq 5}$

$\longrightarrow \begin{cases} h(-\frac{11}{4}) \leq 5 \\ h(-\frac{3}{4}) \leq 1 \\ h(x) \geq g(x) \end{cases}$

(1) прямая $y = ax + b$ может вращаться вокруг $(-\frac{11}{4}; 5)$ пока не станет касательной к $y = g(x)$, ~~то~~ то же самое вокруг $(-\frac{3}{4}; 1)$, ~~также может двигаться прямая, параллельная прямой, пересекающей $y = f(x)$ на концах расс~~

(1) $y = ax + b$

$$\begin{cases} 5 = a \cdot -\frac{11}{4} + b \\ 1 = a \cdot -\frac{3}{4} + b \end{cases} \rightarrow b = 1 + \frac{3}{4}a$$

$5 = -\frac{11}{4}a + 1 + \frac{3}{4}a$

$4 = -2a \rightarrow a = -2 \rightarrow b = -\frac{1}{2}$

$y = -2x - \frac{1}{2}$ — прямая, пересекающая параболу в концах рассматриваемого отрезка $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

$-2x - \frac{1}{2} = \frac{12x+11}{4x+3}$ — проверим пересечение $h(x)$ и $g(x)$

$\frac{8x^2 + 20x + 11 + \frac{3}{2}}{4x+3} = 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$8x^2+20x+11+\frac{3}{2}=0$

$16x^2+40x+25=0$

$(4x+5)^2=0$

$x=-\frac{5}{4}$ – одна точка пересечения; ~~$y=h(x)$~~ -

$y=-2x-\frac{1}{2}$ – касательная к $y=g(x)$; $-\frac{11}{4}<-\frac{5}{4}<-\frac{3}{4}$

Тогда есть только одна пара $(a;b)$, удовл. неравенству $g(x)\le ax+b\le f(x)$, это пара $(-2;-\frac{1}{2})$, т.к. при движении вниз точки пересечения прямой $y=h(x)$

~~Ответ: $(-2;-\frac{1}{2})$~~

границ промежутка ($x=-\frac{11}{4}$ и $x=-\frac{3}{4}$) прямая $y=h(x)$ будет пересекать гиперболу $y=g(x)$ больше 2 раз в границах рассматриваемого промежутка, ~~он сложена прямо~~ то есть положение прямой $y=h(x)$ единственно.

Ответ: $(-2;-\frac{1}{2})$

Задача 3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\ge|x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$ → модуль раскрывается с плюсом

$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$$

$t = x^2+18x, \; t>0$

$$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}$$

$\log_{12}t = 4$

$$5^4 + 12^4 \geq 13^4$$

$$\cancel{5^{24} + 2\cdot 12^4\cdot 5^4 + (12^2)^4 \geq 13^{24}}$$

$$\cancel{5^{24} + 2\cdot 12^4\cdot 5^4 + 13^{24} - 5^{24} \geq 13^{24}}$$

$$\cancel{5^{24} + 2\cdot 12^4\cdot 5^4 + (13^2-5^2)^4 \geq 13^{24}}$$

$$5^4 + \left(\sqrt{13^2-5^2}\right)^4 \geq 13^4 \quad \Big| \text{возв. в квадрат, т.к. обе стороны} > 0$$

$$\cancel{5^{4\cdot 2}} + 2\cdot 5^4\cdot 12^4 + \cancel{13^{24}} - \cancel{5^{24}} \geq \cancel{13^{24}}$$

$$2\cdot 5^4\cdot 12^4 \geq 0$$

неравенство верно при любых и →

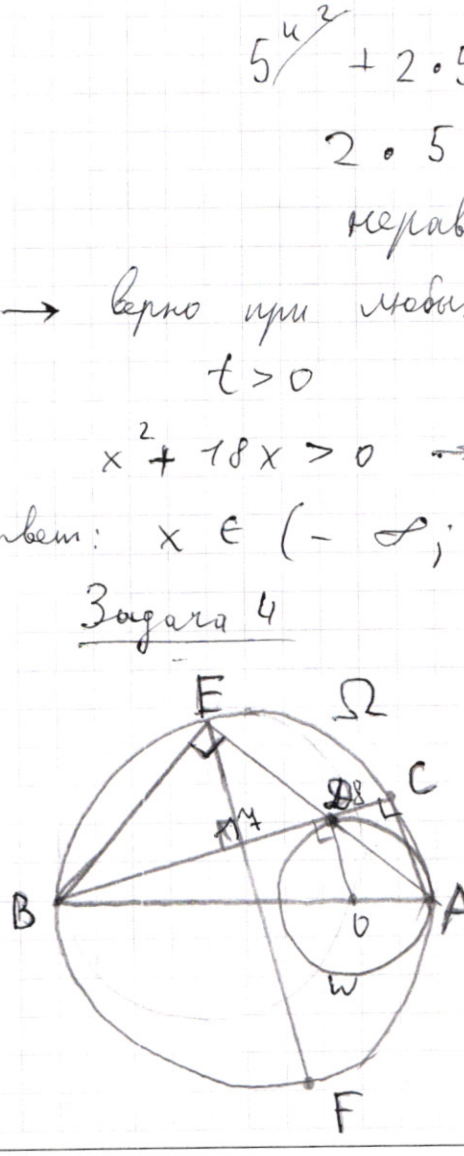
→ верно при любых $t$ на ОДЗ:

$t>0$

$x^2+18x>0 \to x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

Ответ: $x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

Задача 4




$BD = 17, \; CD = 8$

$EF \perp BC$, $BC$ - касат. к $\omega$

$AB$ - диаметр $\Omega$

$\angle AFE = ?, \quad R_\Omega = ?$

$R_\omega = ?, \quad S_{\triangle AEF} = ?$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Пусть $AB = x$. $\angle BCA = \angle BEA = 90^\circ$ — опираются на $AB$

$\angle BDO = 90^\circ$ по усл, где т. $O$ — центр. $\omega$

$\triangle BED \sim \triangle ACD$ по 2 углам (прямой и верт.)

$$\frac{ED}{CD} = \frac{BD}{AD} \to AD = \frac{17}{8} ED = \frac{17}{8}(AE - AD)$$

$$8AD = 17(AE - AD) \to AD = \frac{17}{25} AE \to ED = \frac{8}{25} AE$$

$$AD = \sqrt{CD^2 + AC^2}, \quad AC = \sqrt{x^2 - 25^2}$$

$$AD = \sqrt{64 - 625 + x^2} = \cancel{\sqrt{39 + x^2}} \quad \sqrt{x^2 - 561}$$

$$\cancel{AE = \sqrt{39 + x^2}\,\frac{25}{17}}, \quad \cancel{ED = \frac{8}{17}\sqrt{39 + x^2}} \qquad AE = \sqrt{x^2 - 561}\,\frac{25}{17}$$

$$ED = \frac{8}{17}\sqrt{x^2 - 561}$$

$$- \begin{cases} BD^2 - ED^2 = BE^2 \\ AB^2 = AE^2 + BE^2 \end{cases}$$

$$17^2 - ED^2 - AB^2 = -AE^2$$

$$\cancel{17^2 - \frac{64}{17^2}(x^2 + 39) - x^2 = -(39 + x^2)\frac{625}{17^2}}$$

$$\cancel{17^2 - x^2 = \frac{-625 + 64}{17^2}(39 + x^2)}$$

$$\cancel{17^2 - x^2 = -\frac{33}{17}(39 + x^2)}$$

$$\cancel{17^3 - 17x^2 + 33x^2 - 33 \cdot 39 = 0}$$

$$\cancel{16x^2 = 1287 -}$$

$$289 - \frac{64}{289}(x^2 - 561) - x^2 = -(x^2 - 561)\frac{625}{289}$$

$$289 - x^2 = -\frac{561}{289}(x^2 - 561)$$

$$289 - x^2 + \frac{33}{17}x^2 = 33 \cdot 33$$

$$16x^2 = 1089 \cdot 17 - 289 \cdot 17$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) $-\frac{1}{\sqrt5} = \sin 2\alpha \frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha \frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\frac{\log_5(t)}{\log_5 12}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} = \sin\left(2\alpha \pm \arccos\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\cancel{2\alpha + \arccos\left(\frac{2}{\sqrt5}\right) + 2\pi k} =$

$\cancel{\sin^2(\alpha+\beta)} =$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13} - 18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18)} + x^2 + 18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12} 13}$

12, 13, 5

$t = x^2 + 18x$

$\log_{12} t = 4$

$5^{\log_{12}(t)} + t \geq |t|^{\log_{12} 13}$

$t \geq 0$

$t^{\log_{12} 5} + t \geq |t|^{\log_{12} 13}$

$t = 12^4$

$t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$5^4 + 12^4 \geq 13^4$

$\cancel{t\left(t^{\log_{12}5 - 1} + 1 - t^{\log_{12}13 - 1}\right) \geq 0}$

$5^{24} + 60^4 + 12^{24} \geq 13^{24}$

$t^{\log_{12}5 - 1} - t^{\log_{12}13 - 1} + 1 \geq 0$

$13^{24} = 12^{24} + 5^{24}$

$\cancel{\log_{12}}($

$60^4 \geq 0$

$\cancel{5^4}(1 +$

$\log_{12} t$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cancel{\cos(\alpha+\beta)}\ \sin(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{\sqrt{5}}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} \pm \frac{2}{25} + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$-8\cdot\frac{121}{16} + \frac{30\cdot 11}{4} - 17 = \cancel{-\frac{4}{25}}$ $\sin 2\alpha = -\frac{16}{25}$

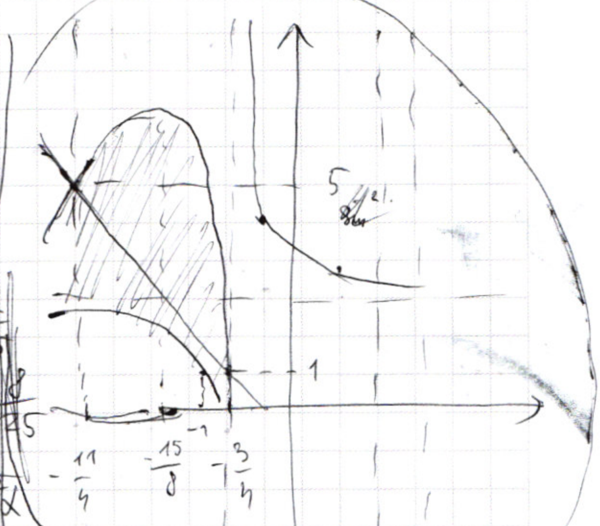
$= -\frac{121}{2} + \frac{330}{4} - 17 =$

$= \frac{330 - 242 - 68}{4} = 5$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2}{5}\\ \sin\alpha\cos\alpha = -\frac{8}{25}\end{array}\right.$

$\left(\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{5\cos^2\alpha}\\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{8}{25\cos^2\alpha}\end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = -\frac{2}{5}(\operatorname{tg}^2\alpha+1)\\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{8}{25}(\operatorname{tg}^2\alpha+1)\end{array}\right.$




$\cancel{12x}$

$\frac{3(4x+3)+2}{4x+3} = \frac{2}{4x+3} + 3$

$-3 = \frac{2}{4x+3}$

$-12x - 9 = 2$

$12x = -11$

$5^{\log_{12} t} + t \geq 13^{\log_2 t}$

$-\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$

$x = -\frac{11}{12}$

$\frac{-12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$

$5 = \frac{2}{4x+3}$

$4x+3 = 1$

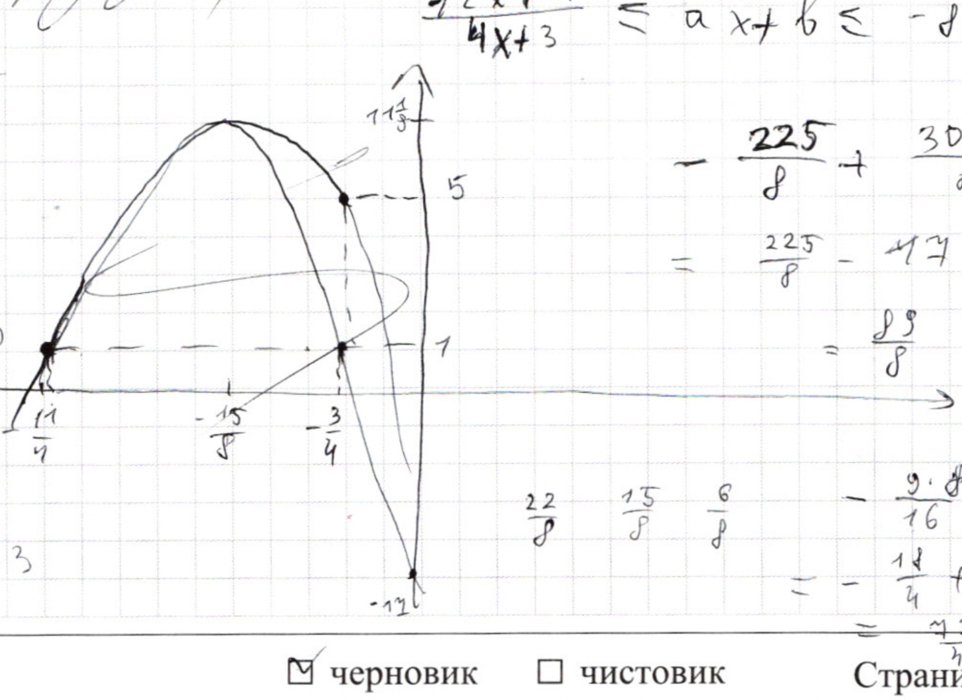
$x = -\frac{1}{2}$

$1 = \frac{2}{4x+3} + 3$

$-2 = \frac{2}{4x+3}$

$-1 = 4x+3$

$x = -1$




$-\frac{225}{8} + \frac{30\cdot 15}{8} - 17 =$

$= \frac{225}{8} - 17 = \frac{225-136}{8} =$

$= \frac{89}{8}$

$\begin{array}{r}225\\-136\\\hline 89\end{array}$

$\frac{22}{8}\quad\frac{15}{8}\quad\frac{6}{8}$

$-\frac{9\cdot 8}{16} + \frac{3\cdot 30}{4} - 17 =$

$= -\frac{18}{4} + \frac{90}{4} - 17 =$

$= \frac{72}{4} - 68 = 1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{y(x-2)-(x-2)} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$\sqrt{(y-1)(x-2)}$

$(x-2)^2+(3-3y)^2=25$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$u=x-2$

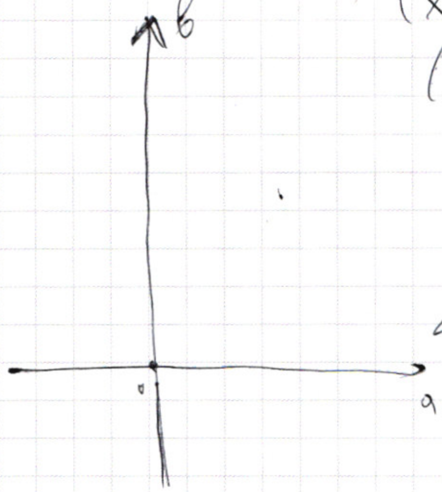
$v=y-1$

$u+2v=$

$=x-2+2y+2=$

$=x-2y$

$$\begin{cases} u^2+9v^2=25 \\ x-2y=\sqrt{uv} \\ \cancel{x^2-4xy+4y^2=4v} \end{cases}$$



$$\begin{cases} u+2v=\sqrt{uv} \\ u^2+9v^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2-4uv+4v^2=uv \\ u^2+9v^2=25 \end{cases}$$

$u^2-5uv+4v^2=0$

$u^2+9v^2=25$

$u^2-5uv+4v^2=0$

$D=25v^2-16v^2=9v^2=(3v)^2$

$u=\frac{5v\pm3v}{2}=\left[\begin{array}{l} v \\ 4v \end{array}\right.$

$$\begin{cases} (u-v)(u-4v)=0 \\ u^2+9v^2=25 \end{cases}$$

$\frac{2}{4x+3}=\frac{0-8}{16x^2+24x+9}$

$12x+11$

$\left(3+\frac{2}{4x+3}\right)'=-\frac{8}{16x^2+24x+9}$

$3+\frac{2}{4x+3}=ax+b=ax+5+\frac{11a}{4}$

$\cancel{ax+}\ -\frac{11}{4}a+$

$b=5+\frac{11}{4}a$

$\cancel{12x+11-4ax^2}-3ax-4bx-3b=0$

$-4ax^2-x(3a+4b-12)+11-3b=0$

$\cancel{4ax^2+x(3a+4b+12)-11+3b=0}$

$12x+11-4ax^2$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

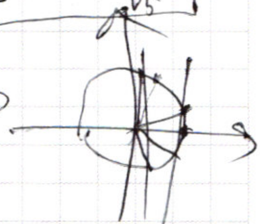
$2\sin(2(\alpha+\beta))\cos(2\beta) = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha + 2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$

$\boxed{\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}}$

$\boxed{\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}}$



$\cancel{\boxed{\cos(2\beta) = +\frac{1}{5\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{25}}}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{\frac{625-40}{625}} = \frac{\sqrt{585}}{25} =$

$\cancel{2\beta = \pm\arccos\left(\frac{2\sqrt{5}}{25}\right) + 2\pi k}$

$\cancel{\beta = \pm\frac{1}{2}\arccos}$

$\cancel{\sin 2\alpha \cos 2\beta} \quad \cancel{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cancel{\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta}$

$\cancel{\cos 2\beta = 1 - \cos 2\cos^2\beta - 1}$

$\cancel{\cos^2\beta \; 1}$

$\cancel{\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \frac{2\sqrt{5}}{25} + \cos 2\alpha \sin 2\beta} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{5} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{-2-\sqrt{5}}{5}}$

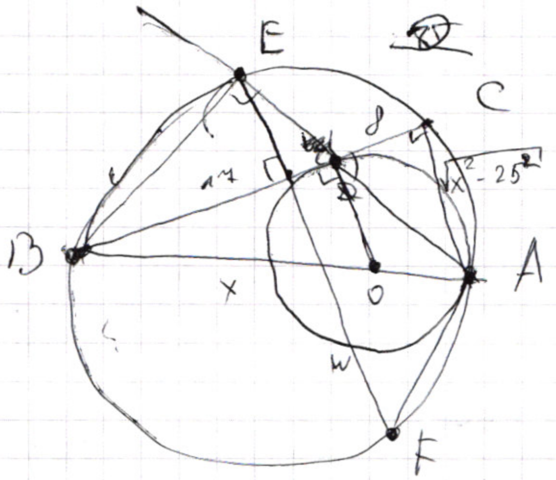
$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1 - \frac{20}{25}} = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$$\left[\begin{array}{l} \sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (1) \\ \sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \frac{2}{\sqrt{5}} - \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \quad (2) \end{array}\right.$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА




$BD = 17$

$CD = 8$

$D = x$

$AC = x^2 - 25$

$\frac{25}{17} = \frac{\sqrt{x^2-25}}{OD} \to OD = \frac{17\sqrt{x^2-25}}{25}$

$OD = OA$

$\begin{cases} 17^2 - ED^2 = BE^2 \\ x^2 = BE^2 + AE^2 \end{cases}$

$\frac{8}{ED} = \frac{17}{AD} \to AD = \frac{17}{8}\cdot(AE - AD)$

$AD = \sqrt{64 - 25 + x^2} = \sqrt{39 + x^2}$

$\frac{17}{8} AE =$

$17^2 - x^2 - ED^2 = +AE^2$

$17^2 - x^2 - ED\frac{64}{17^2}(39+x^2) = \frac{625}{17^2}(39+x^2)$

$\frac{17}{8} = \frac{AD}{AE-AD}$

$625 - 64 = 561$

$17^2 - x^2 = \frac{561}{17^2}(39+x^2)$

$17AE - 17AD = 8AD$

$17^2 - x^2 = \frac{33}{17}(39+x^2)$

$17AE = 25AD$

$561 : 17 = 33$

$AD = \frac{17}{25}AE$

$17^3 - 17x^2 = 33\cdot 39 + 33x^2$

$\sqrt{39+x^2} = \frac{17}{25}AE$

$625 - 64 = 561$

$50x^2 = -33\cdot 39 + 17^3$

$x^2 =$

$AE = \sqrt{39+x^2}\,\frac{25}{17}$

$68 : 17 = 4$

$ED = \frac{8}{25}AE$

$39 \times 33 = 117 + 1170 = 1287$

$17 \times 17 = 119 + 170 = 289$

$289 \times 17$

$ED = \frac{8}{17}\sqrt{39+x^2}$

$561 : 17 = 33$

$33 \times 33 = 99 + 990 = 1089$

$12x + 11 - 4ax^2 - 3ax - 20x - 11ax - 15 - \frac{33a}{4} = 0$

$4ax^2 + 8x + 14ax + 4 + \frac{33a}{4} = 0$

$2ax^2 + x(4 + 7a) + 2 + \frac{33a}{8} = 0$

$D = 16 + 56a + 49a^2 - 8a - \frac{33a}{2}$

$-a\frac{11}{4} + b \le 5$

$y = -2x - \frac{1}{2}$

$b \le 5 + \frac{11}{4}a$

$4+3a \quad 20+11a$

$-16 \quad 8a$

$-2 \quad a$

$-\frac{3}{4}a + b \le 1$

$b \le 1 + \frac{3}{4}a$

$\times\ 169$
$169$
$1521$
$1521$
$169$
$33631$

~~при $a > 0$~~

~~$4+3a$~~

$b \le 1 + \frac{3}{4}a$

$1 + \frac{3}{4}a \quad 5 + \frac{11}{4}a$

$-2x - \frac{1}{2} = \frac{12x+11}{4x+3}$

при $a < 0$

$\times\ 144$
$144$
$576$
$576$
$144$
$20736$

$12x + 11 + 8x^2 + 6x + 2x + \frac{3}{2} = 0$

$b \le$

$8x^2 + 20x + 11 + \frac{3}{2} = 0$

$1 + \frac{3}{4}a \le 5 + \frac{11}{4}a$

$16x^2 + 40x + 25 = 0$

$-2 \le a$

$(4x+5)^2 = 0$

$\boxed{a \ge -2}$

$5^4 + 12^4 = 13^4$

~~$16x^2 + 40x + 25$~~

$625 + 20736 = 33631$

$b \le 1 + \frac{3}{4}a$

$x = -\frac{5}{4}$

$a \ge 2$

$12 = \sqrt{13^2 - 5^2}$

$b \le 5 + \frac{11}{}$

$5^4 + \sqrt{13^2 - 5^2}^4 \ge 13^4$

$ax + b \ge \frac{12x+11}{4x+3}$

$5^4 + (13^2 - 5^2)^{\frac{1}{2}4} \ge 13^4$

~~$5^{24}$~~

$\ge 13^{24}$ $12x + 11 - 4x^2a - 3ax$

~~$13^{24} - 5^{24} \ge$~~

$5^{24} + 2\cdot 5^4\sqrt{13^2 - 5^2}^4 + 13^{24} - 5^{24} \ge 13^{24}$

$5^{24} + 13^{24} - 5^4 \cdot 13^4 \cdot 5^4 \cdot 2 +$

$+ 2\cdot 5^4 \cdot (\sqrt{13^2 - 5^2})^4 \ge 13^{24}$

$2\cdot 5^4 (\sqrt{13^2 - 5^2})^4 \ge 0$

$5^{24} - 2\cdot 13^4 \cdot 5^4 + 2\cdot 5^4 \cdot 12^4 \ge 0$

$2\cdot 5^4 \cdot 12^4 \ge 0$

$5^4(5^4 - 2\cdot 13^4 + 2\cdot 12^4) \ge 0$