МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. Заметим, что

$\cancel{f(\frac{1}{a}) = f(a}$

$$f(a) = f(\frac{a^2}{a}) = f(a^2) + f(\frac{1}{a}) = f(a) + f(a) + f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(\frac{1}{a}) = -f(a)$$

Тогда $f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

Посчитаем значения f при натуральных аргументах от 2 до 25

2	0	18	0
3	0	19	4
4	0	20	1
5	1	21	1
6	0	22	2
7	1	23	5
8	0	24	0
9	0	25	2
10	1		
11	2		
12	0		
13	3		
14	1		
15	1		
16	0		
17	4		

Кол-во:
0: 10
1: 7
2: 3
3: 1
4: 2
5: 1

Способы выбрать 2 числа от 0 до 5 так, чтобы их разность оказалась отрицательной:

0-1	0-2	0-3	0-4	0-5
	1-2	1-3	1-4	1-5
		2-3	2-4	2-5
			3-4	3-5
				4-5

Кол-во способов выбрать такие пары:

10·7	10·3	10·1	10·2	10·1
	7·3	7·1	7·2	7·1
		3·1	3·2	3·1
			1·2	1·1
				2·1

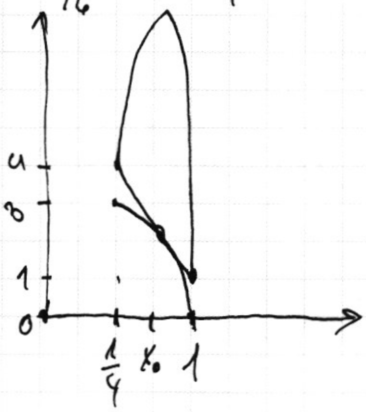
Сумма: $140 + 99 + 3 + 2 + 12 =$
$= 189 + 17 = 206$

Ответ: 206

6. $f(x) = \frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$ $\quad f(\frac{1}{4}) = 3 \quad f(1) = 0$

$g(x) = -32x^2 + 36x - 3 \quad g(\frac{1}{4}) = 4 \quad g(1) = 1$

$x_{вер} = \frac{9}{16} \quad \frac{1}{4} < x_{вер} < 1$



Рассмотрим прямую $y = -4x+5$

Значение при $x = \frac{1}{4}$: 4

Значение при $x = 1$: 1

Рассмотрим ур-е:

$x \le 1 < \frac{5}{4}$

$\cancel{4+} \frac{16x-16}{4x-5} = -4x+5 \iff 16x^2 - 24x + 9 = 0$

$D = 0$, 1 решение

учитывая выпуклость $f(x)$,

это значит, что $y = -4x+5$ касается графика $f(x)$,

заметим, что тогда $(a;b) = (-4;5)$ подходит.

Пусть существует линейная ф-я $h(x) = kx + c$, отличная от $y = -4x+5$, которая удовлетворяет условию.

Если $h(\frac{1}{4}) > 4$ или $h(1) > 1$, то $h(x)$ пересекает $g(x)$, тогда есть участки, где $h(x) > g(x)$ (рис. 1).

Если $h(\frac{1}{4}) < 4$ или $h(1) < 1$, то $h(x)$ пересекает $f(x)$, а значит существуют участки, где $h(x) < f(x)$.

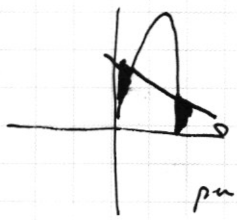


рис. 1

Иначе $h(x)$ совпадает с $y = -4x+5$.

Таким образом, $(a, b) = (-4, 5)$ является единственной искомой парой

Ответ: $(a, b) = (-4, 5)$

(См. дополнение на стр. 5)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. $10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 + |10x - x^2|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$t = 10x - x^2,\ t > 0$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t \geq t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$

~~При $t > 1$ $t^{\log_3 5} > t^{\log_3 4}$ $(t^z \nearrow)$~~

~~При $0 < t < 1$ $t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4} < 0 < t$ $(t^z \searrow)$~~

Пусть $f(z) = z^{\log_3 5} - z^{\log_3 4}$ при $z \in [0; +\infty)$

$f''(z) = \log_3 5 (\log_3 5 - 1) z^{\log_3 \frac{5}{9}} - \log_3 4 (\log_3 4 - 1) \cdot z^{\log_3 \frac{4}{9}}$

Оценим знак $f''(z)$, сравнив уменьшаемое и вычитаемое

$\log_3 5 (\log_3 5 - 1) z^{\log_3 \frac{5}{9}} \lessgtr \log_3 4 \cdot (\log_3 4 - 1) \cdot z^{\log_3 \frac{4}{9}}$

$\downarrow : \log_3 4 (\log_3 4 - 1) \cdot z^{\log_3 \frac{5}{9}} > 0$

$\underbrace{\frac{\log_3 5}{\log_3 4}}_{>1} \cdot \underbrace{\frac{(\log_3 \frac{5}{3})}{\log_3 \frac{4}{3}}}_{>1} \lessgtr \underbrace{z^{\log_3 \frac{4}{9} - \log_3 \frac{5}{9}}}_{<1}$

$\Rightarrow f''(z) > 0 \Rightarrow f(z)$ выпукла

$\Rightarrow f(z)$ имеет $y = z_{(z \in [0; +\infty))}$ не более ~~1 пересечений~~ 2 пересечений.

Заметим, что при $z = 0$ и $z = 9$ их значения совпадают, значит $z = 0$ и $z = 9$ – единственные пересечения.

Подстановкой значений получаем, что $z \leq z^{\log_3 5} - z^{\log_3 4}$ при $z \in [0; 9]$, т.к. $t \in (0; +\infty)$, $t \leq t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$ при $t \in (0; 9]$

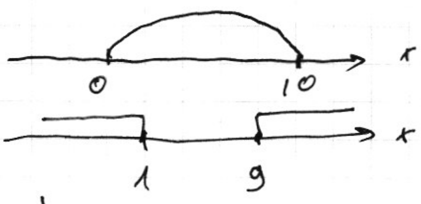
☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} t > 0 \\ t \leq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 10x - x^2 > 0 \\ 10x - x^2 \leq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(10 - x) > 0 \\ x^2 - 10x + 9 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x - 10) < 0 \\ (x - \overset{9}{\cancel{10}})(x - 1) \geq 0 \end{cases}$$



Ответ:

$x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

2.
$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y - 12x - 36y = 45 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} (x-6) - 6(2y-1) = \sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90 \end{cases}$$

Замена: $u = x - 6$, $w = 2y - 1$

$$\begin{cases} u - 6w = \sqrt{uw} & (1) \\ u^2 + 9w^2 = 90 & (2) \end{cases}$$

Ур-е 1 равносильно $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} u = 9w \\ u = 4w \end{array} \right. \\ u - 6w \geq 0 \end{cases}$

(получено возведением в квадрат и решением ур-я относительно u)

Ур-е 2 равносильно $u = \pm 3\sqrt{10 - w^2}$

Рассмотрим все случаи:

1) $u = 9w = 3\sqrt{10 - w^2} \Leftrightarrow w = 1,\ u = 9$ (подстановкой ~~проверкой~~ получаем, что подходит)

2) $u = 9w = -3\sqrt{10 - w^2} \Leftrightarrow w = -1,\ u = -9$ (подстановкой получаем, что не подходит)

3) $u = 4w = 3\sqrt{10 - w^2} \Leftrightarrow w = \frac{\sqrt{90}}{5},\ u = \frac{4\sqrt{90}}{5}$ (подстановкой получаем, что не подходит)

4) $u = 4w = -3\sqrt{10 - w^2} \Leftrightarrow w = -\frac{\sqrt{90}}{5},\ u = -\frac{4\sqrt{90}}{5}$ (подстановкой получаем, что подходит)

Итак:
$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x - 6 = 9 \\ 2y - 1 = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x - 6 = -\frac{4\sqrt{90}}{5} \\ 2y - 1 = -\frac{\sqrt{90}}{5} \end{cases} \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 15 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{30 - 4\sqrt{90}}{5} \\ y = \frac{5 - \sqrt{90}}{10} \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $(x, y) \in \left\{ (15, 1),\ \left(\frac{30 - 4\sqrt{90}}{5}, \frac{5 - \sqrt{90}}{10} \right) \right\}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

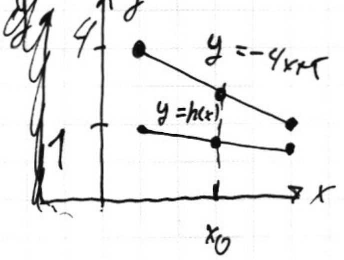
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. (доп.)

доп. 1: Если $h(\frac{1}{4}) > 4$ и $h(1) > 1$, ~~и при этом~~ ~~вся прямая лежит выше параб.~~ то $h(x)$ может не пересекать параболу $g(x)$, но тогда $\exists x: h(x) > g(x)$, поэтому на ответ это не влияет

доп. 2: Если $h(\frac{1}{4}) < 3$ и $h(1) < 0$, то $h(x)$ не пересекает $f(x)$, но тогда $\exists x: h(x) < f(x)$, поэтому на ответ это не повлияет.

доп. 3: Если $h(\frac{1}{4}) < 3$ и $0 < h(1) < 1$, то $f(x)$ пересекает $h(x)$, потому что значение $h(x)$ в точке x_0 (точка касания $y=-4x+5$ и $f(x)$) будет меньше, чем $f(x_0)$, при этом $h(1) > f(1)$, тогда в силу непрерывности $f(x)$ и $h(x)$ эти ф-и пересекутся в точке x_1: $x_0 < x_1 < 1$



1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$*$ $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{5}} \pm \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt{5}}$

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5} \pm \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\Updownarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\left(2\alpha - \operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ -\cos\left(2\alpha + \operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5} \end{array}\right.$$

$$\underline{\cos}\left[\begin{array}{l} 2\alpha - \operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt5} = \pi - \operatorname{acos}\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k \\ 2\alpha - \operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt5} = \operatorname{acos}\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k \\ 2\alpha + \operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt5} = \operatorname{acos}\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k \\ 2\alpha + \operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt5} = \pi - \operatorname{acos}\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k \end{array}\right. , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = \pi - \left(\operatorname{acos}\frac{1}{\sqrt5} - \operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi k \\ 2\alpha = \operatorname{acos}\frac{1}{\sqrt5} + \operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k \\ 2\alpha = \operatorname{acos}\frac{1}{\sqrt5} - \operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k \\ 2\alpha = \pi - \left(\operatorname{acos}\frac{1}{\sqrt5} + \operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi k \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{3}{4} \\ \operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{3}{4} \\ \operatorname{tg} 2\alpha = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \operatorname{tg}\alpha = \pm 3 \\ \operatorname{tg}\alpha = \pm\frac{1}{3} \end{array}\right.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3w = \sqrt{10-w^2}$ $\quad 9w^2 = 10-w^2, \ w \geq 0 \quad w = 1$

$-3w = \sqrt{10-w^2}$ $\quad 9w^2 = 10-w^2, \ w < 0 \quad w = -1$

$\frac{4}{3}w = \sqrt{10-w^2}$ $\quad \frac{16}{9}w^2 = 10-w^2, \ w > 0 \quad \frac{25}{9}w^2 = 10$

$u^2 = \frac{90}{25}$

$-\frac{4}{3}w = \sqrt{10-w^2}$ $\quad \frac{16}{9}w^2 = 10-w^2, \ w < 0$

$w = \frac{\sqrt{90}}{5}$

$w = -\frac{\sqrt{90}}{5}$

$$\begin{cases} u - 6w = \sqrt{4w} \Rightarrow u = \left[\begin{array}{l} 9w \\ 4w \end{array}\right. \\ u^2 + 9w^2 = 90 \Rightarrow u^2 = \pm 3\sqrt{10-w^2} \end{cases}$$

$u = 9w = 3\sqrt{10-w^2} \Leftrightarrow w = 1, \ u = 9$ ✓

$u = 9w = -3\sqrt{10-w^2} \Leftrightarrow w = -1, \ u = -9$ ✗

$u = 4w = 3\sqrt{10-w^2} \Leftrightarrow w = \frac{\sqrt{90}}{5}, \ u = \frac{4\sqrt{90}}{5}$ ✗

$u = 4w = -3\sqrt{10-w^2} \Leftrightarrow w = -\frac{\sqrt{90}}{5} \quad u = -\frac{4\sqrt{90}}{5}$ ✓

$\alpha = \arccos\frac{1}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\alpha = \pi - (\arccos\frac{1}{\sqrt{5}} - \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}})$

$\frac{2 \cdot 3}{1 - 3^2} =$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} =$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha + 1}}{\operatorname{tg}\alpha}$ $\quad \frac{-1 \pm 2}{\sqrt{3}} = \left[\begin{array}{l} -3/\sqrt{3} \quad -\sqrt{3} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{array}\right.$

$\alpha = \frac{\pi}{3}$

$\frac{-1 \pm \frac{5}{4}}{-\frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \pm \frac{5}{4} = \left[\begin{array}{l} 3 \\ -\frac{1}{3} \end{array}\right.$ $\quad \frac{-1 \pm \sqrt{\frac{25}{16}}}{\frac{3}{4}} = \frac{-1 \pm \frac{5}{4}}{-\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3} \pm \frac{5}{3} = \left[\begin{array}{l} -3 \\ \frac{1}{3} \end{array}\right.$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{tg\,\alpha} =$

$\sin\left(\frac{a\cos\frac{1}{\sqrt5} - a\sin\frac{1}{\sqrt5}}{2}\right) =$

$= \sqrt{\frac{1-\cos(a\cos\frac{1}{\sqrt5} - a\sin\frac{1}{\sqrt5})}{2}}$

$tg(\pi - \alpha) = \frac{tg\,\pi + tg\,\alpha}{1 + tg\,\pi \cdot tg\,\alpha} =$

$= \frac{-tg\,\alpha}{1+0} = -tg\,\alpha$

$\sin(a\cos\frac{1}{\sqrt5} - a\sin\frac{1}{\sqrt5}) =$

$= \frac{2}{\sqrt5} \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5} \cdot \frac{1}{\sqrt5} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5} = 1$

$\cos(a\cos\frac{1}{\sqrt5} + a\sin\frac{1}{\sqrt5}) = \frac{1}{\sqrt5} \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \frac{1}{\sqrt5} \cdot \frac{2}{\sqrt5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$

$\sin(a\cos\frac{1}{\sqrt5} + a\sin\frac{1}{\sqrt5}) =$

$\frac{\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}}{\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}} = \frac{\sqrt{1+\cos\alpha}}{\sqrt{1-\cos\alpha}} = \sqrt{\frac{(1+\cos\alpha)^2}{1-\cos^2\alpha}} = \sqrt{\frac{tg}{\sin^2\alpha}}$

$tg\,2\alpha = \frac{2tg\,\alpha}{1-tg\,\alpha^2}$

$tg\,\alpha = \frac{2\,tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}$

$-1 \pm \sqrt{4} = -\frac{1}{\sqrt3} \pm 2$

$\frac{1}{\sqrt3}$

$-tg\,\alpha \cdot tg^2\frac{\alpha}{2} + tg\,\alpha - 2tg\frac{\alpha}{2} = 0$

$tg\,\alpha \cdot tg^2\frac{\alpha}{2} + 2\,tg\frac{\alpha}{2} + tg\,\alpha = 0$

$\frac{D}{4} = 1 + tg^2\alpha$

$tg\,2\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}$

$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+tg^2\alpha}}{tg\,\alpha} =$

$\cancel{tg^2\alpha}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{1+\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} =$

$tg^2\frac{\alpha}{2} \cdot tg\,\alpha + 2tg\frac{\alpha}{2} - tg\,\alpha = 0$

$\frac{D}{4} = 1 + tg^2\alpha$

$= \frac{-1 \pm \frac{\sqrt7}{2}}{\frac{3}{4}} = -\frac{4}{3} \pm \frac{2\sqrt7}{3} =$

$= \frac{-4 \pm 2\sqrt7}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha + 5\pi + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$$\left[\begin{aligned} &2\alpha + 2\beta = -\operatorname{asin}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k \\ &2\alpha + 2\beta = \pi + \operatorname{asin}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right.$$

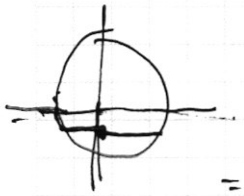
$2 \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{1}{5}$

$$\left[\begin{aligned} &\alpha + \beta = -\frac{\operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt{5}}}{2} + \pi k \\ &\alpha + \beta = \frac{\pi + \operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt{5}}}{2} + \pi k \end{aligned}\right.$$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$



$\sin(2\alpha + 2\beta) =$

$= \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta$

$$\left[\begin{aligned} &\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{5}} + \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{5} \\ &\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{5}} - \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{5} \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &\cos\left(2\alpha - \operatorname{asin}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right) = -\frac{1}{5} \\ &-\cos\left(2\alpha + \operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{5} \end{aligned}\right.$$

$2\alpha - \operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt{5}} = \pm\operatorname{acos}\left(-\frac{1}{5}\right)$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{1}{5} \end{cases} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt5}} \pm \frac{2\cos 2\alpha}{\cancel{\sqrt5}} = -\frac{1}{\cancel{\sqrt5}}$$

$$\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$$

$$\sqrt5\left(\frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha \pm \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha\right) = -1$$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\left(2\alpha - \operatorname{asin}\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)\right) = -1 \\ -\cos\left(2\alpha + \operatorname{asin}\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)\right) = -1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha - \operatorname{asin}\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) = \pi + 2\pi k \\ 2\alpha + \operatorname{asin}\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) = 2\pi k \end{array}\right., k \in Z$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = \frac{\pi + \operatorname{asin}\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)}{2} + \pi k \\ \alpha = -\frac{\operatorname{asin}\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)}{2} + \pi k \end{array}\right.$$

$$\cancel{\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt5}}{2} + \pi k\right) = \cos\left(\frac{\operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt5}}{2} + \pi k\right)}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt5}}{2}\right) = \operatorname{ctg}\left(\operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt5} / 2\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \sin\frac{\pi}{2}\cdot\cos x + \cancel{\cos\frac{\pi}{2}\sin x} = \cos x$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cdot\cos x - \sin\frac{\pi}{2}\cdot\sin x = -\sin x$$

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1 - \operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}y} =$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)} = -\frac{\cos x}{\sin x} = -\operatorname{ctg}\frac{\operatorname{asin}\frac{1}{\sqrt5}}{2}$$

$$u - 6w = \sqrt{uw}$$
$$u^2 + 9w^2 = 90$$
$$u^2 - 12uw + 36w^2 = uw$$
$$u^2 - 13uw + 36w^2 = 0$$
$$D = 169w^2 - 144w^2 = 25w^2$$
$$u = \frac{13w \pm 5w}{2} = \left[\begin{array}{l} 9w \\ 4w \end{array}\right.$$
$$u^2 = 9(10 - w^2)$$
$$u = \pm 3\sqrt{10 - w^2}$$
$$9w = 3\sqrt{10-w^2}$$
$$9w = -3\sqrt{10-w^2}$$
$$4w = -3\sqrt{10-w^2}$$

3.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(a) = f\left(\frac{a^2}{a}\right) = f(a^2) + f\left(\frac{1}{a}\right) = f(a) + f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

$f\left(\frac{2}{5}\right) = f(2) - f(5) = 0 - 1 = -1$

$f(x/y) = f(x) - f(y)$

$f\left(\frac{4}{5}\right) = f(2) + f(2) - f(5) = -1$

~~$2 = 1$~~

~~5 + 5~~ $f(25) = f(5) + f(5) = 2$

2 0

3 0

4 0 0 : 10

5 1 1 : 7

6 0 2 : 3

7 1 3 : 1

8 0 4 : 2

9 0 5 : 1

10 1

11 2

12 0

13 3

14 1

15 1

16 0

17 4

18 0

19 4

20 1

21 1

22 2

23 5

24 0

25 2

0 − 1 0 − 2 0 − 3 0 − 4 0 − 5

1 − 2 1 − 3 1 − 4 1 − 5

2 − 3 2 − 4 2 − 5

3 − 4 3 − 5

4 − 5

$10\cdot 7 + 10\cdot 3 + 10\cdot 1 + 10\cdot 2 + 10\cdot 1 +$

$+ 7\cdot 3 + 7\cdot 1 + 7\cdot 2 + 7\cdot 1$

$+ 3\cdot 1 + 3\cdot 2 + 3\cdot 1$

$+ 1\cdot 2 + 1\cdot 1$

$+ 2\cdot 1 =$

$= 70 + 30 + 10 + 20 + 10 +$

$+ 21 + 7 + 14 + 7 +$

$+ 3 + 6 + 3 +$

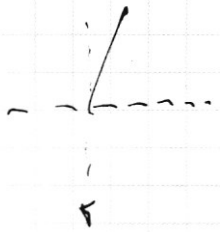
$+ 2 + 1$

$+ 2 =$

$= 140 + 49 + 12 + 3 + 2 =$

$= 189 + 17 = 194 + 7 = 206$

$$4 - \frac{4}{4x-5} = 4 - \frac{4}{4(x-\frac{5}{4})} = 4 - \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$$



$$-32x^2+36x-3 \qquad x_0 = \frac{-36}{-64} = \frac{36}{64} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$

$$\begin{array}{r} 324 \\ -\ 96 \\ \hline 228 \end{array}$$

$$-32\cdot\frac{81}{256} + \frac{36\cdot 9}{16} - 3 =$$

$$= -\frac{81}{8} + \frac{81}{4} - 3 = \frac{81}{8} - 3 = 10\frac{1}{8} - 3 = 7\frac{1}{8}$$

$$-32x^2+36x-3=0$$

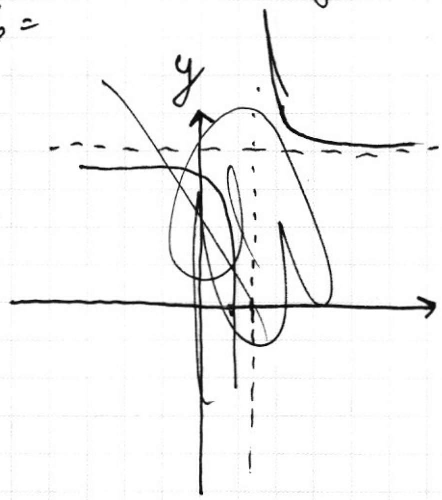
$$32x^2-36x+3=0$$

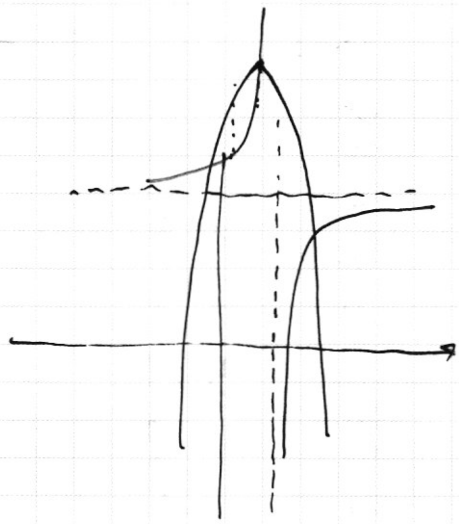
$$\frac{D}{4} = 324-96 =$$

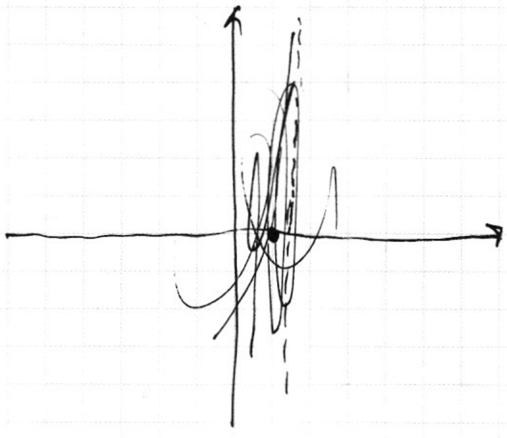
$$= 228$$

$$x = \frac{-18 \pm 4\sqrt{57}}{32} =$$

$$= \frac{-9 \pm 2\sqrt{57}}{16}$$

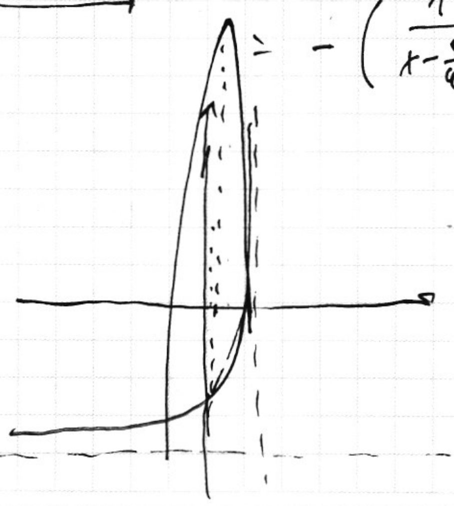






$$-\frac{1}{x-\frac{5}{4}} + 4 =$$

$$= -\left(\frac{1}{x-\frac{5}{4}} - 4\right)$$



☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{16x-16}{4x-5} = -32x^2+36x-3$

$16(x-1) =$

$32x^2-36x+3=0$

$D = 36^2 - 4\cdot3\cdot32 =$

$\cancel{= 1284}\ \cancel{1286 - 384} =$

$= 1296-384 =$

$= 912$

$D/4 = 228$

$x = \frac{18 \pm \sqrt{228}}{32} =$

$= \frac{9 \pm \sqrt{57}}{16}$

$7 < \sqrt{57} < 8$

$\frac{2}{16} < \frac{9 \pm \sqrt{57}}{16} < \frac{17}{16}$

$\frac{9-\sqrt{57}}{16}$

$D = 1284 + 4\cdot3\cdot32 =$

$= 1284 + 128\cdot3 =$

$= 1284 + 384$

$36 \cdot 36 = 1296$

$32 \cdot 12 = 384$

$1296 - 384 = 912$

$912 : 4 = 228$

$1284 - 384 = 900$

$128 \cdot 3 = 384$

$384 + 1284 = 1668$

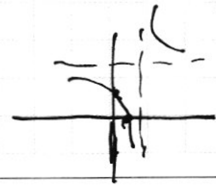
$1668 : 4 = 417$

$f(x) = -\left(\frac{1}{x-\frac{5}{4}} - 4\right)$

$g(x) = -32x^2+36x-3$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = 8 \quad f(1) = 8$

$\frac{16x-16}{4x-5} = \frac{16x-20+4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5} = 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$



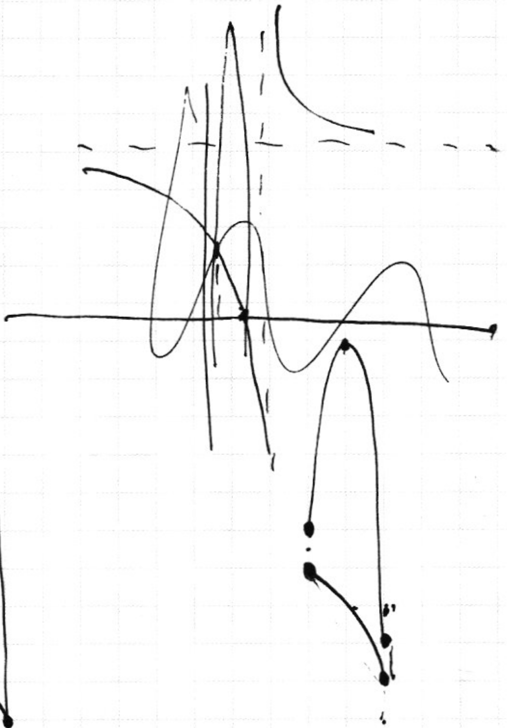
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

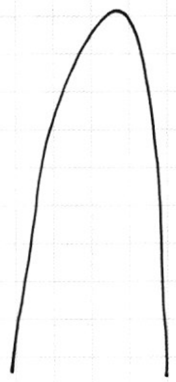
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

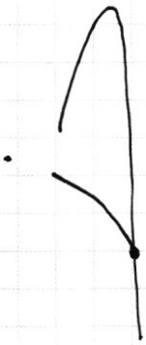
$f(x) = 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$ $\quad f(\frac{1}{4}) = 3 \quad f(1) = 0$

$g(x) = -32x^2 + 36x - 3 \quad\quad g(1) = 1$

$g(\frac{1}{4}) = -\frac{32}{16} + \frac{36}{4} - 3 = -2 + 9 - 3 = 4$

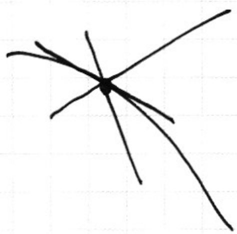






$0 \le a + b \le 1$

$3 \le \frac{a}{4} + b \le 4$



$f(x) = 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$ $\quad\quad a \geq -1 \quad\quad b$

$b \geq 3$

$$\begin{cases} a = f'(x_0) \\ f'(x_0) \cdot x_0 + b = f(x_0) \end{cases}$$

$f'(x) = -\frac{1}{(x-\frac{5}{4})^2}$

$-\frac{1}{(x_0-\frac{5}{4})^2} \cdot x_0 + b = \frac{1}{x_0-\frac{5}{4}}$

$f'(\frac{1}{4}) = -\frac{1}{(\frac{1}{4}-\frac{5}{4})^2} = -\frac{1}{(-\frac{4}{4})^2} = \frac{-1}{(-1)^2} = -1$

$b = \frac{1 + x_0 - \frac{5}{4}}{(x_0 - \frac{5}{4})^2}$

$x_0 - \frac{1}{4} = b(x_0^2 - \frac{5}{2}x_0 + \frac{25}{16})$ $\quad \frac{x_0 - \frac{1}{4}}{(x_0-\frac{5}{4})^2} = b$

$\cancel{bx_0^2 - b\frac{5}{2}}$

$16x-16=-(4x-5)^2$

$16x-16=-(16x^2-40x+25)$

$16x^2-24x+9=0$

$\frac{D}{4}=144-144=0$

16
$\times 9$
144

$\frac{\sin 2\alpha\cdot\sqrt5}{\sqrt5}+\frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}\Big|:\cos 2\alpha$

$\cancel{\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5}}$

$\cancel{\left[\cos(2\alpha-\right.}$

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{1}{5}\end{cases}$$

$\Rightarrow \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(x+y)+\sin(x-y)=$

$=\sin x\cos y+\cos x\cdot\sin y+$

$+\sin\cdot\cos y-\cos x\cdot\sin y=$

$=2\sin x\cdot\cos y$

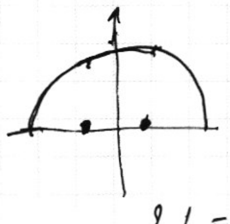
$2\alpha=a\cos\frac{1}{\sqrt5}-a\sin\frac{1}{\sqrt5}$

$2\alpha=\pi-\left(a\cos\frac{1}{\sqrt5}-a\sin\frac{1}{\sqrt5}\right)$

$\sin 2\alpha+2\beta=$

$=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=$

$=\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}=$



$2\alpha=a\cos\frac{1}{\sqrt5}-a\sin\frac{1}{\sqrt5}$

$2\alpha=\pi+a\sin\frac{1}{\sqrt5}-a\cos\frac{1}{\sqrt5}$

$=\left[\begin{array}{l}\cos\left(2\alpha-a\sin\frac{1}{\sqrt5}\right)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ -\cos\left(2\alpha+a\sin\frac{1}{\sqrt5}\right)=-\frac{1}{\sqrt5}\end{array}\right.$

$2\alpha=a\sin\frac{1}{\sqrt5}+a\cos\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)$

$2\alpha=a\cos\frac{1}{\sqrt5}-a\sin\frac{1}{\sqrt5}$

$\left[\begin{array}{l}2\alpha-a\sin\frac{1}{\sqrt5}=a\cos\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\\ 2\alpha+a\sin\frac{1}{\sqrt5}=a\cos\frac{1}{\sqrt5}\end{array}\right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$ax+b = 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$$

$$\frac{ax\left(x-\frac{5}{4}\right)+b\left(x-\frac{5}{4}\right)-4\left(x-\frac{5}{4}\right)-1}{x-\frac{5}{4}} = 0$$

$$f(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$$

$$\frac{ax^2 - \frac{5a}{4}x + bx - \frac{5b}{4} - 4x + 5 - 1}{x-\frac{5}{4}} = 0$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4-16}{1-5} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$\frac{ax^2 + \left(b - \frac{5a}{4} - 4\right)x - \frac{5b}{4} + 5 - 1}{x-\frac{5}{4}} = 0$$

$$f(1) = 0$$

$$g(x) = -32x^2+36x-3$$

$$ax^2 + \left(b - \frac{5a}{4} - 4\right)x + 4 - \frac{5b}{4} = 0$$

$$g\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{32}{16} + \frac{36}{4} - 3 = -2+9-3 = 4$$

$$D = \left(b - \frac{5a}{4} - 4\right)^2 - 16 + 5b =$$

$$g(1) = 1$$

$$y = -4x+5$$

$$= \left(b^2 + \frac{25a^2}{16} + \cancel{16} - \frac{5ab}{2} - 8b + 10a\right) - \cancel{16} - 5b =$$

$$= b^2 + \frac{25a^2}{16} - 2{,}5ab - 13b + 10a = 0$$

$$y = kx+b$$

$$y\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{k}{4}+b$$

$$y(1) = k+b$$

$$\begin{cases} \frac{k}{4}+b = 4 \\ k+b = 1 \end{cases} \quad b = 5$$

$$-\frac{3k}{4} = -3$$

$$\frac{k}{4} = -1$$

$$k = -4$$

$$\frac{25}{16}a^2 + (10-2{,}5b)a + b^2 - 3b = 0$$

$$\frac{16x-16}{4x-5} = -4x+5$$

$$16x-16 = -(4x-5)^2$$

$$16x-16 = -(16x^2-40x+25)$$

$$16x-16 = -16x^2+40x-25$$

$$16x^2 - 24x + 9 = 0$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{\log_8 5\cdot(\log_3 5-1)}{\log_8 4\cdot(\log_3 4-1)} \quad f^{\log_3 \frac{5}{9}} \vee f^{\log_3 \frac{4}{9}}$$

$(x^2-12x+36)+$

$+(36y^2-36y+9)$

$$\frac{\log_3 5\,(\log_3 5-1)}{\log_3 4\,(\log_3 4-1)} \vee f^{\log_3 \frac{4}{9}}-\log_3\frac{5}{9}$$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)}$

$x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$

$x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$$xy=\frac{(x+y)^2-(x^2+y^2)}{2}$$

$(x-6)^2+9(6y-3)^2=90$

$u^2-12uw+36w^2=0$

$u^2+9w^2=90$

$x-12y=\cancel{\sqrt{(x+2y-40)^2-90}}$

$27w^2-13uw+90=0$

$\cancel{x^2-11x+36y^2-44y}$

$$u=\frac{27w^2+90}{13w} \qquad 13u=\frac{27w^2+90}{w}$$

$(x-6)-6(2y-1)=$

$=x-6-12y+6=$

$=x-12y$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

$(x-6)-6(2y-1)=\sqrt{(x-6)(2y-1)}$

$u=x-6$

$w=2y-1$

$$\begin{cases} u-6w=\sqrt{uw} \\ u^2+9w^2=90 \end{cases}$$

$u^2-12uw+36w^2=uw$

$\cancel{w^2=10-\frac{u^2}{9}}$

$\cancel{w=\pm\sqrt{10-\frac{u^2}{9}}}$

$u-6w=\sqrt{uw}$

$u^2+9w^2=90$

$-\cancel{9}\ \ \cancel{-1}$

$9\quad 1$

$-3\quad -3$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

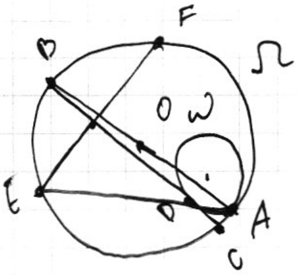
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

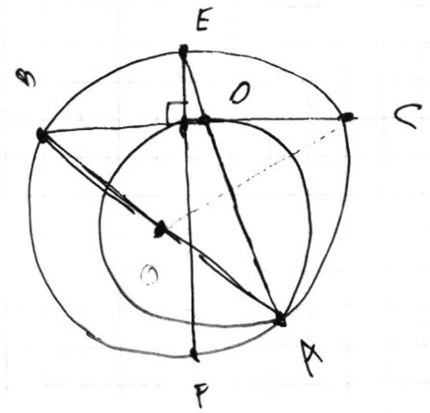
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

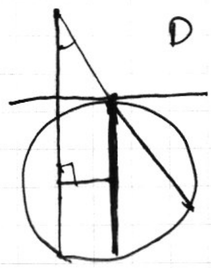
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$CD = \frac{15}{2}$ $BC = 16$

$BD = \frac{17}{2}$



$x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 90$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90 = 81 + 9 = \overset{36+54}{} = 25 + 65 =$

$=$

$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$

$9^{\log_m 5} =$

$= 25 - 16$

$10x + |x^2 + 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$t = 10x - x^2$

$t + |t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t + |t|^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

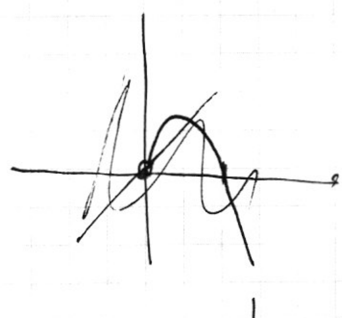
$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

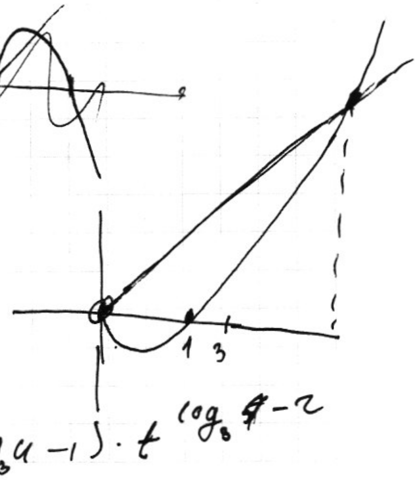
$t \geq t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$

$f(t) = t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$

$f'(t) = \log_3 5 \cdot t^{\log_3 5 - 1} - \log_3 4 \cdot t^{\log_3 4 - 1}$

$f''(t) = \log_3 5(\log_3 5 - 1) \cdot t^{\log_3 5 - 2} - \log_3 4(\log_3 4 - 1) \cdot t^{\log_3 4 - 2}$





☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)