МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$

Найти: $tg\,\alpha$ - ?

$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} & (1) \\ \sin 2\alpha\cos 4\beta+\cos 2\alpha\sin 4\beta+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} & (2) \end{cases}$

(2) $\sin 2\alpha(\cos 4\beta+1)+\cos 2\alpha\sin 4\beta = -\frac{4}{5}$

$2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta+2\cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\cos\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta) = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta\cdot\frac{-1}{\sqrt5} = \frac{-2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$

1° $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

(1) $\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha+\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha+\cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1 = -1$

$\cos\alpha(4\sin\alpha+2\cos\alpha) = 0$, $\cos\alpha\neq 0$

$\sin\alpha = -\frac{\cos\alpha}{2}$ $|:\cos\alpha$

$tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$

2° $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha-\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha-\cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha = -2$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0$

$\sin\alpha(\sin\alpha + 2\cos\alpha) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\alpha = 0 \\ \sin\alpha = -2\cos\alpha \Rightarrow tg\alpha = -2 \end{array}\right.$$

Ответ: $tg\alpha = -2; -2; 0$

2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ x^2-4x+4+9(y^2-2y+1)=25 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$

Пусть $\left[\begin{array}{l} x-2=a \\ y-1=b \Rightarrow a-2b=x-2-2y+2=x-2y \end{array}\right.$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \quad (1) \\ a^2+9b^2=25 \quad (2) \end{cases}$

(1) $a^2-4ab+4b^2=ab$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$D=25b^2-16b^2=9b^2$

$a=\frac{5b\pm3b}{2}=4b; b$

1^0 $a=4b \to (2)$

$16b^2+9b^2=25$

$b^2=1$

$b=\pm1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y-1=1 \\ y-1=-1 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=0 \end{array}\right.$

$a=\pm4 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x-2=4 \\ x-2=-4 \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-2 \end{array}\right. \Rightarrow (6,2);(-2,0)$

2^0 $a=b \to (2)$

$b^2+9b^2=25$ $2b^2=\frac{5}{2}$ $b=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}=a \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2=\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2+\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1+\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(6;2),(-2;0)$ $(2+\sqrt{\frac{5}{2}}; 1+\sqrt{\frac{5}{2}})$, $(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}})$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. Дано:

окр. Ω с цен. в т. O_1

и рад $AO_1 = R_1$

окр. ω с цен в т. O_2

и рад $AO_2 = R_2$

BC касается ω в т. D

$AD \cap \Omega$ в т. E

$EF \perp BC$, т. $F \in \Omega$

$CD = 8$, $BD = 17$

Найти:

R_1, R_2 - ?

$\angle AFE$ - ?

S_{AEF} - ?

Решение:

Пусть $\angle EAB = \alpha \Rightarrow$

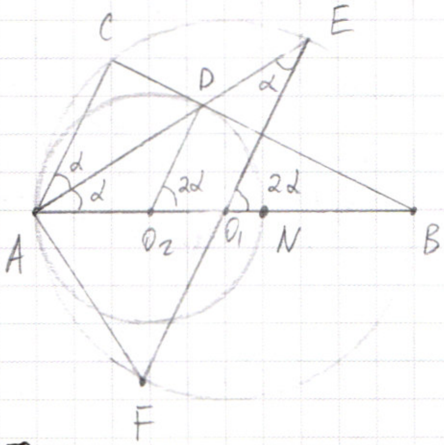
$\alpha = \frac{1}{2}\smile DN = \frac{1}{2}\smile BE \Rightarrow$

$\angle DO_2N = 2\alpha$, $\angle EO_1B = 2\alpha$

$\Rightarrow DO_2 \parallel EO_1$, но

$O_2D \perp BC$ и $EF \perp BC \Rightarrow$

$O_2D \parallel EF \Rightarrow EF$ - диаметр



провед. AC, $\angle ACB = 90^\circ$ т.к смотрит на диам

$\angle DBO_2 = 90^\circ - 2\alpha \Rightarrow \angle CAB = 2\alpha$

$\triangle BO_2D \sim \triangle ABC$

$\frac{BD}{BO_2} = \frac{BC}{AB}$, $\frac{17}{2R_1 - R_2} = \frac{25}{2R_1}$

$34R_1 = 50R_1 - 25R_2$

$R_2 = \frac{16}{25}R_1$

$BD^2 = BN \cdot BA$, $17^2 = (2R_1 - 2R_2)2R_1$

$2R_1(2R_1 - \frac{32}{25}R_1) = 17^2$

$\frac{2R_1 \cdot 18R_1}{25} = 17^2$

$R_1^2 = \frac{17^2 \cdot 25}{36}$ $R_1 = \frac{17 \cdot 5}{6} = \frac{85}{6} \Rightarrow R_2 = \frac{16}{25}R_1 = \frac{16}{25} \cdot \frac{17 \cdot 5}{6} = \frac{17 \cdot 8}{5 \cdot 3}$

$R_2 = \frac{136}{15}$

$\sin 2\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{BC}{2R_1} = \frac{25}{\frac{17 \cdot 5}{3}} = \frac{15}{17}$

$2\alpha = \arcsin\frac{15}{17}$

$\alpha = \frac{\arcsin\frac{15}{17}}{2}$, $\angle AFE = 90^\circ - \alpha$, т.к $\angle FAE = 90^\circ$ и $\angle AEF = \alpha$

$\angle AFE = \dfrac{\frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{15}{17}}{2} = \dfrac{\arccos\frac{15}{17}}{2}$

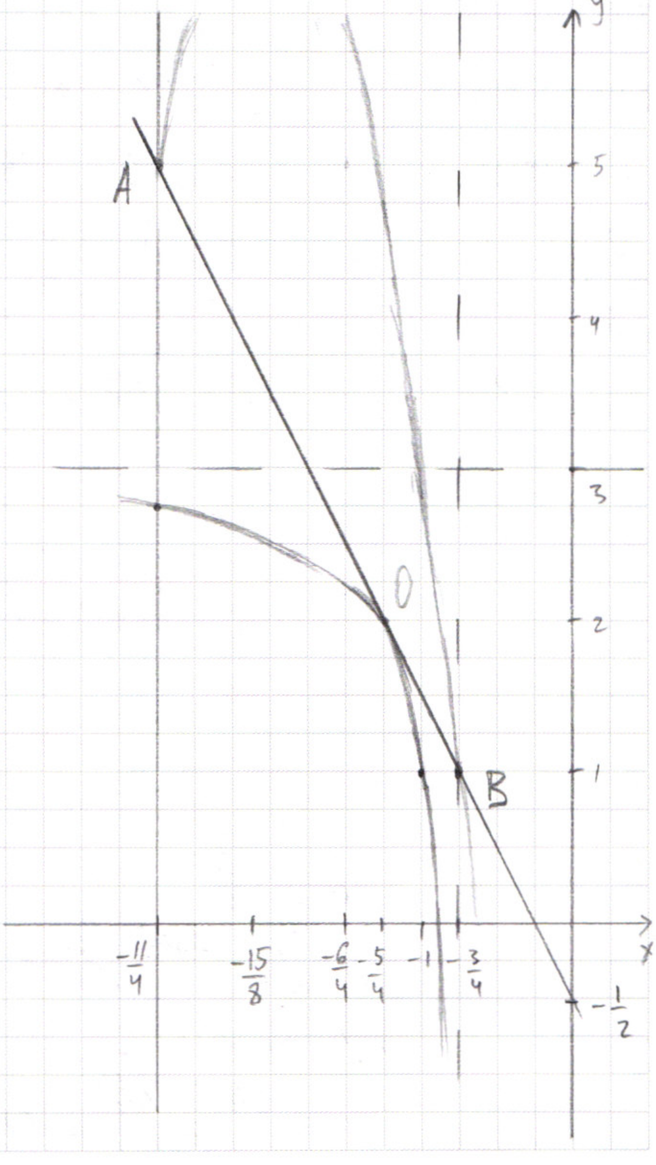
$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF$, $\cos\angle AFE = \dfrac{AF}{2R_1} \Rightarrow AF = \sqrt{\dfrac{1+\cos(\arccos\frac{15}{17})}{2}} \cdot \dfrac{17\cdot5}{3} = \dfrac{4}{\sqrt{17}} \cdot \dfrac{17\cdot 5}{3} = \dfrac{20\sqrt{17}}{3}$

$\sin\angle AFE = \sqrt{1 - \dfrac{4^2}{\sqrt{17}^2}} = \sqrt{\dfrac{1}{17}} = \dfrac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow AE = \sin\angle AFE \cdot 2R_1 = \dfrac{1}{\sqrt{17}} \cdot \dfrac{17\cdot5}{3}$

$AE = \dfrac{5\sqrt{17}}{3} \Rightarrow S_{AEF} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{5\sqrt{17}}{3} \cdot \dfrac{20\sqrt{17}}{3} = \dfrac{50\cdot17}{9} = \dfrac{850}{9}$

6. $\dfrac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$

Найти все пары (a,b) такие, что нер. выпол на пр. $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$



Решение:

$f(x) = \dfrac{12x+11}{4x+3} = 3 + \dfrac{2}{4x+3}$

$y = 3$ – асимп.

$x = -\frac{3}{4}$ – асимп.

$f(-\frac{11}{4}) = 3 + \dfrac{2}{-11+3} = 3 - \dfrac{1}{4}$

$f(-\frac{5}{4}) = 3 + \dfrac{2}{-5+3} = 2$

$f(-1) = 3 + \dfrac{2}{-4+3} = 1$

$g(x) = -8x^2 - 30x - 17$

$x_в = -\dfrac{30}{16} = \dfrac{-15}{8}$

$g(-\frac{11}{4}) = -8 \cdot \dfrac{121}{16} - 30 \cdot (-\frac{11}{4}) - 17$

$= \dfrac{-121}{2} + \dfrac{165}{2} - 17 = 22 - 17 = 5$

$g(-\frac{3}{4}) = -8 \cdot \dfrac{9}{16} + \dfrac{90}{4} - 17$

$= -\dfrac{9}{2} + \dfrac{45}{2} - 17 = 18 - 17 = 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т. $A(-\frac{11}{4}, 5)$, т. $B(-\frac{3}{4}, 1)$. По рисунку заметим, что AB – единств. прямая удовлет. условиям

пр. AB $\to y = -2x - \frac{1}{2}$. Докажем, что пр. касается гиперболы в т. $O(-\frac{5}{4}, 2)$

$f'(x) = \frac{-8}{(4x+3)^2}$

$y_{кас} = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

$f'(x_0) = f'(-\frac{5}{4}) = \frac{-8}{4} = -2$

$f(x_0) = 3 + \frac{2}{-5+3} = 2$

$y_{кас} = -2(x + \frac{5}{4}) + 2 = -2x - \frac{1}{2}$, $y_{кас}$ и пр. AB – совпад. =>

AB касается $f(x)$. При увелич. в пр. $ax+в$ будет $\cap$ $g(x)$, при уменьш. $\cap$ $f(x)$. При увелич а пр. $ax+в$ будет $\cap$ $g(x)$, при уменьш. $\cap$ $f(x)$

=> пр. AB: $y = -2x - \frac{1}{2}$ – единств.

Ответ: $(-2, -\frac{1}{2})$

7. Дано:

ABCD – пир.

$AB = 1, BD = 2$

$CD = 3$

т. A и сер. реб $\in$ сфере

Найти:

BC – ?

r_{min} – ?

Решение:

т. $A, E, N, M, P, Q \in$ сфере

$NE \parallel AB$ и $NM \parallel AC$, т.к

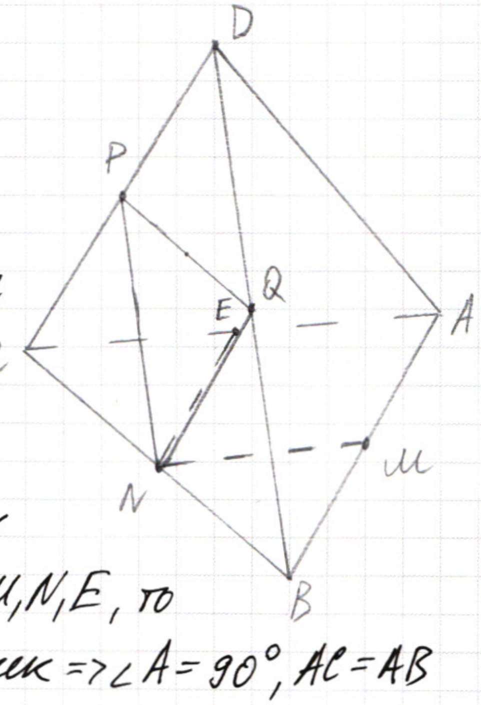
NE и NM – ср. линии =>

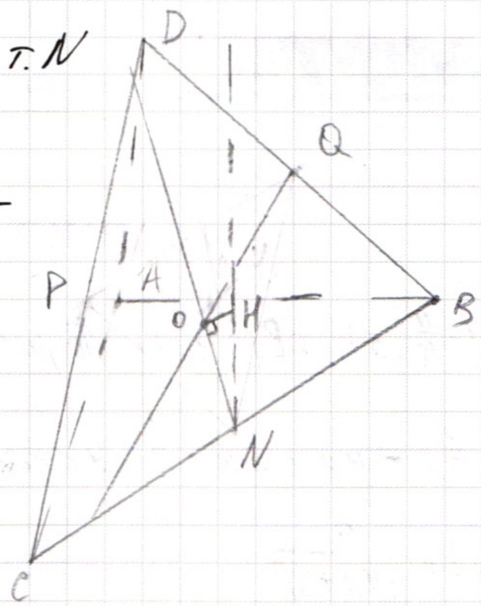
$AMNE$ – пар-мм, но т.к

сфера $\cap$ пар-мм в т. A, M, N, E, то

$AMNE$ – прямоугольник => $\angle A = 90°$, $AC = AB$

$=> BC = AB\sqrt{2} = \sqrt{2}$





ГМТ равноуд. от т. A, B, C – пр. прох ч/з т. N и перпен. пл. (ABC)

ГМТ равноуд. от т. B, C, D – пр. прох ч/з т. O – центр опис. окр. $\triangle BCD$ и перпен. пл. (BCD)

2 прямые пересек. в т. H. $\Rightarrow r = BH$

$BH^2 = BN^2 + HN^2 = BN^2 + ON^2 + OH^2 \Rightarrow$

чтобы r было min, $(BCD) \perp (ABC)$

$\Rightarrow r_{min}^2 = BN^2 + HN^2$, т. O переходит в т. H

$S_{BCD} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p = \frac{3+2+\sqrt{2}}{2} = \frac{5+\sqrt{2}}{2}$

$S_{BCD} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5-\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1+\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}-1}{2}} = \sqrt{\frac{(25-2)(2-1)}{16}} = \frac{\sqrt{23}}{4}$

$r_{min} = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2}}{4 \cdot \frac{\sqrt{23}}{4}} = \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{23}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$, $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$ $\quad tg\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$$\begin{cases}\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5} & (1)\\ \sin2\alpha\cos4\beta+\cos2\alpha\sin4\beta+\sin2\alpha=-\frac{4}{5} & (2)\end{cases}$$

(2) $\sin2\alpha(\cos4\beta+1)+\cos2\alpha\cdot2\sin2\beta\cos2\beta=-\frac{4}{5}$

$\cos4\beta=2\cos^2 2\beta-1$

$2\sin2\alpha\cos^2 2\beta+2\cos2\alpha\sin2\beta\cos2\beta=-\frac{4}{5}$

$\cos2\beta(\underbrace{\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta}_{=-\frac{1}{\sqrt5}})=-\frac{2}{5}$

$\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin^2 2\beta=\cancel{\sqrt{1-\cos^2 2\beta}}=1-\frac{4}{5}=\frac{1}{5}$

$\sin2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt5}$

1° $\sin2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin2\alpha+\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin2\alpha+\cos2\alpha=-1$

$4\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1=-1$

$2\cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha)=0$, $\cos\alpha\neq0$

$2\sin\alpha=-\frac{\cos\alpha}{2}$ $\mid:\cos\alpha$

1. $tg\alpha=-\frac{1}{2}$

2° $\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin2\alpha-\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin2\alpha-\cos2\alpha=-1$

$4\sin\alpha\cos\alpha-(2\cos^2\alpha-1)=-1$

$4\sin\alpha\cos\alpha-2\cos^2\alpha=-2$

$2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha-\cancel{\cos^2\alpha}=-\sin^2\alpha-\cancel{\cos^2\alpha}$

$\sin\alpha(2\cos\alpha+\sin\alpha)=0$

$tg\alpha=0$ $\quad tg\alpha=-2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$

(1) $x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}$

$\sqrt{(x-2)(y-1)}=x-2y.$

(2) $x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=5^2$

$\exists$ $x-2=a$

$y-1=b \Rightarrow x-2y=a-2b.$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab\ (*) \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

$a, b>0.$

$25\cdot 3=75+7$ $82.$

~~$82\pm 2\cdot 5\sqrt{21}$~~

$\pm 2\cdot\frac{5\cdot\sqrt{21}}{2}$

(*) $a^2-5ab+b^2=0$

$D=25b^2-4b^2=21b^2$

$a=\frac{5b\pm b\sqrt{21}}{2}$, $a=\frac{b}{2}(5\pm\sqrt{21})$

$2(41\pm 5\sqrt{21})=82+2\cdot\sqrt{3\cdot7\cdot5\cdot5}$

$(\sqrt{75}^2+2\cdot\sqrt{75}\cdot\sqrt{7}+(\sqrt{7})^2)$

$\Rightarrow 2\cdot 41+5\sqrt{21}=(\sqrt{75}+\sqrt{7})^2$

$41+5\sqrt{21}=\frac{(\sqrt{75}+\sqrt{7})^2}{2}.$

$\left(\frac{b}{2}(5\pm\sqrt{21})\right)^2+9b^2=25$

$\frac{b^2}{4}(25+21\pm10\sqrt{21})+9b^2=25$

$b^2\left(\frac{46\pm10\sqrt{21}}{4}+9\right)=25$

$b^2\cdot\left(\frac{23\pm5\sqrt{21}+18}{2}\right)=25$

$b^2\left(\frac{41\pm5\sqrt{21}}{2}\right)=25$

$b^2=\frac{50}{41\pm5\sqrt{21}}$ $b=\pm$ $\pm$

$b^2\left(\frac{(\sqrt{75}\pm\sqrt{7})^2}{4}\right)=25$

$b^2=\frac{100}{(\quad)^2}\Rightarrow b=\pm\frac{10}{(\quad)}$ $y-1=\pm\frac{10}{\sqrt{75}\pm\sqrt{7}}$ $y=\pm\frac{10}{\sqrt{75}\pm\sqrt{7}}-1.$

$a=\frac{5(5\pm\sqrt{21})}{\quad}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$ $\qquad x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$

$\cancel{\begin{cases} \sin\alpha\cos\alpha=\frac{15}{34} \\ \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1 \end{cases}}$ $\quad \cancel{\sin\alpha=\frac{15}{34\cos\alpha}}$

$\exists\ x^2+18x=t>0$

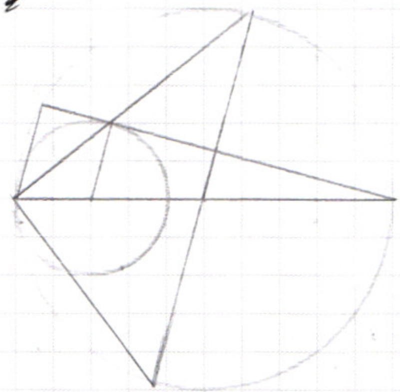
$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t}+t-t^{\log_{12}13} \geq 0$

$\exists\ f(t)=5^{\log_{12}t}+t-t^{\log_{12}13}$

$f'(t)=1-\log_{12}13\cdot t^{\log_{12}\frac{13}{12}}+$

5*.



$\times\begin{array}{r}17\\17\end{array}$

119

17

4. Дано:

окр. Ω с центром в т. O_1 и рад AO_1

окр. ω с цен. в т. O_2 и рад AO_2

BD — кас. к ω

~~$CD=8$, $BD=17$~~

$EF\perp BC$

Найти:

$\cancel{R, R}\ R_1, R_2$ — ?

$\angle AFE$ — ?

S_{AEF} — ?, если $CD=8$, $BD=17$

Решение:

$\exists\ \angle EAB=\alpha=\frac{1}{2}\smile DN=\frac{1}{2}\smile BE\Rightarrow$

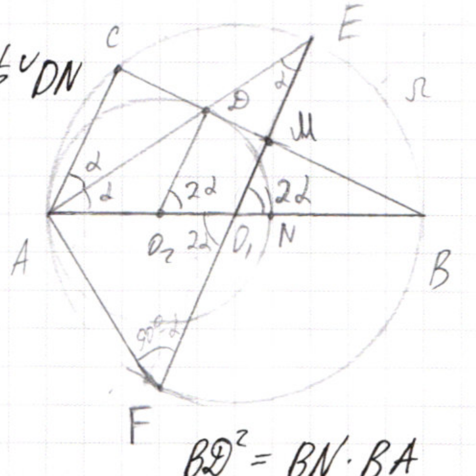
$\angle DO_2N=2\alpha$ и $\angle EO_1B=2\alpha\Rightarrow$

пр. $DO_2 \parallel EO_1$ ~~так~~

$\Rightarrow EF$ — диам.

$\sin 2\alpha=\frac{BD}{BO_2}=\frac{BC}{AB}$

$\frac{17}{2R_1-R_2}=\frac{25}{2R_1}$



$BD^2=BN\cdot BA$

$17^2=(2R_1-2R_2)2R_1$

$34R_1=50R_1-25R_2$

$25R_2=16R_1$

$R_1=\frac{25}{16}R_2 \quad R_2=\frac{16}{25}R_1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

5. $f(ab)=f(a)+f(b)$, a и b $>0 \in R$.

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$, p - простое

$1 \leq x \leq 24$ 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23

$1 \leq y \leq 24$ $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$, x и $y \in N$.

Найти: (x, y) - ? кол-во

$$\begin{cases} f\left(\frac{x}{y}\right)=\left[\frac{x}{4y}\right] \cancel{<0 \ (1) \Rightarrow \frac{x}{4y} \in (0;1)} \\ f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0 \ (2) \end{cases}$$ не понятно

$17 \cdot 8 = 136$; $225 - 136 = 89$

6. $\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$, $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$

$$\begin{cases} ax+b \geq 3+\frac{2}{4x+3} \rightarrow (1) \\ ax+b \leq -(8x^2+30x+17) \end{cases}$$ $x_в = \frac{-30}{16} = -\frac{15}{8}$ - сер. пр.

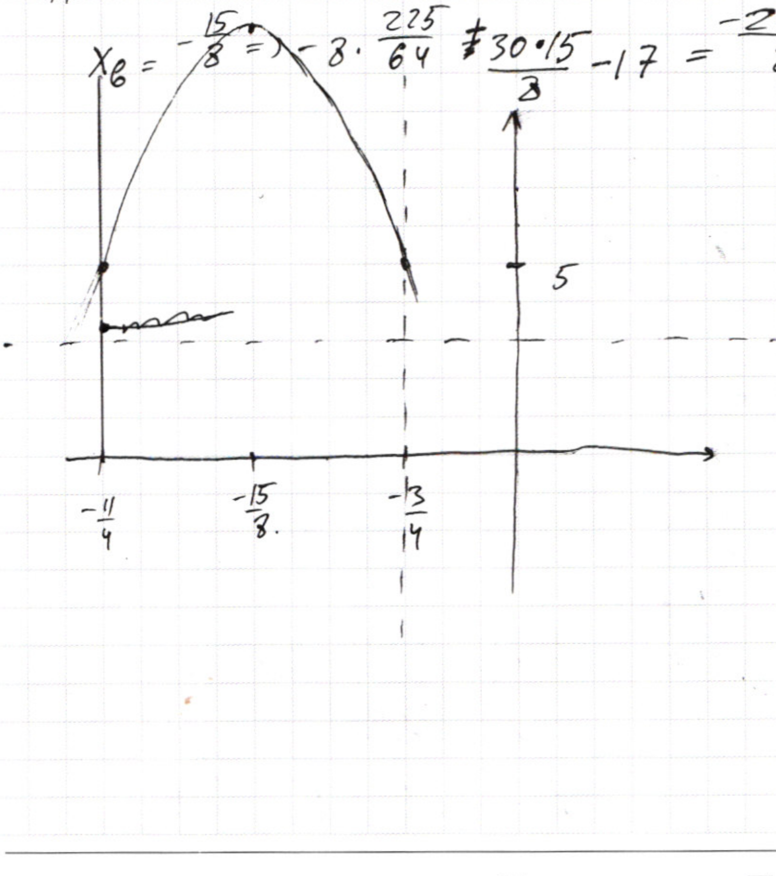
(1) $x=-\frac{11}{4} \Rightarrow 3+\frac{2}{-11+3}=3-\frac{2}{8}=\frac{12}{4}-\frac{1}{4}=\frac{13}{4} \approx 3,$

$x=-\frac{3}{4} \Rightarrow 3+\frac{2}{-3+3} \rightarrow \infty$.

(2) $x=-\frac{11}{4} \Rightarrow -8\cdot\frac{121}{16}+\frac{30\cdot 11}{4}-17=\frac{-121}{2}+\frac{15\cdot 11}{2}-17=\frac{165-121}{2}-17=22-17=5$

$22-17=5$

$x_в=-\frac{15}{8} \Rightarrow -8\cdot\frac{225}{64}+\frac{30\cdot 15}{8}-17=\frac{-225}{8}+\frac{450}{8}-17=\frac{225-136}{8}=\frac{89}{8}\approx 11,$



$3+\frac{2}{4\cdot\left(-\frac{15}{8}\right)+3}=3+\frac{2}{-\frac{15}{2}+3}$

$3+\frac{2}{\frac{-15+6}{2}}=3+\frac{4}{-9}=\frac{27-4}{9}=\frac{23}{9}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$289 = 2R_1\left(2R_1 - \frac{32}{25}R_1\right) = 2R_1 \cdot \frac{18}{25}R_1$ $\qquad 17+15=32$

$\frac{36}{25}R_1^2 = 289$

$R_1 = \frac{17\cdot5}{6} = \frac{85}{6} \Rightarrow R_2 = \frac{16}{25}\cdot\frac{5\cdot17}{6} = \frac{8\cdot17}{5\cdot3} = \frac{136}{15}$ $\qquad 34 \cdot 34 \quad 136 \quad 102$

$\angle AFE = \frac{1}{2}\smile AE = \frac{1}{2}\smile AB - \frac{1}{2}\smile BE = 90^\circ - \alpha$

$\sin 2\alpha = \frac{BC}{AB} = \frac{25}{\frac{17\cdot5}{3}} = \frac{15}{17}$ $\qquad 1156-725=431. \qquad 1156-81=1035 \quad 289\cdot4 = 1156 \qquad 25\cdot25 = 125 + 500 = 725 + 81$

$1035 \mid 5 = 207. \qquad 207 \mid 3 = 69. \qquad 1156 - 725 = 431$

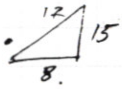
$2\alpha = \arcsin\frac{15}{17} + \cancel{2\pi k}$

$\pi - \arcsin\frac{15}{17} + \cancel{2\pi k}$

$\alpha = \frac{\arcsin\frac{15}{17}}{2},\ \frac{\pi}{2} - \frac{\arcsin\frac{15}{17}}{2} \Rightarrow \angle AFE = \frac{\pi}{2} - \frac{\arcsin\frac{15}{17}}{2},\ \frac{\arcsin\frac{15}{17}}{2}$

$S_{AEF} = \frac{1}{2}\cdot AE\cdot AF \qquad \sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\arcsin\frac{15}{17}}{2}\right),\ \sin\frac{\beta}{2}$

$\sin^2\beta = \frac{1-\cos 2\beta}{2}$ $\qquad 289 = 225+64$



$\sin\alpha = \sin\frac{\pi}{2}\cdot\cancel{\cos}\ \frac{1+\cos(\arcsin\frac{15}{17})}{2} - 0 = 1\cdot\frac{1+\frac{8}{17}}{2} = \frac{25}{34}.$

$\sin\alpha = \frac{1-\cos(\arcsin\frac{15}{17})}{2} = \frac{1-\frac{8}{17}}{2} = \frac{9}{34} \Rightarrow AF = \frac{25}{34}\cdot\frac{17\cdot5}{3} = \frac{125}{6}$

$\Rightarrow AF = \frac{9}{34}\cdot\frac{17\cdot5}{3} = \frac{45}{6}$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{81}{1156}} = \frac{3\sqrt{115}}{34} \Rightarrow AE = \frac{3\sqrt{115}}{34_2}\cdot\frac{17\cdot5}{3} = \frac{5\sqrt{115}}{2}$ $\qquad 34^2 = 25^2$

$\cos\alpha = \sqrt{1-\frac{725}{1156}} = \frac{\sqrt{431}}{34}\ \cancel{\Rightarrow S}\ AF = \frac{5\sqrt{431}}{6}$

$S_{AEF} =$

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$ $\leftarrow \cancel{\log_{12}}$

$\cancel{\log_{12} 5^{\log_{12}t} + 5^{\log_5 t} \geq \log_{12}13 \cdot \log_{12} t}$

$5^{\log_{12}t} + t \geq 2\sqrt{5^{\log_{12}t} \cdot t} \geq t^{\log_{12}13}$ мб

$5^{\log_{12}t} \cdot t \geq t^{2\log_{12}13}$ $\leftarrow \log_{12}$

$\log_{12}(5^{\log_{12}t} \cdot t) \geq 2\log_{12}13 \cdot \log_{12}t$

$\log_{12}t + \log_{12}5 \cdot \log_{12}t \geq 2\log_{12}13 \cdot \log_{12}t$

$p(1+\log_{12}5) \geq 2p\log_{12}13$

$p(1+\log_{12}5 - \log_{12}169) \geq 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

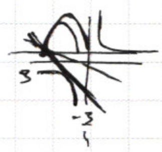
(заполняется секретарём)

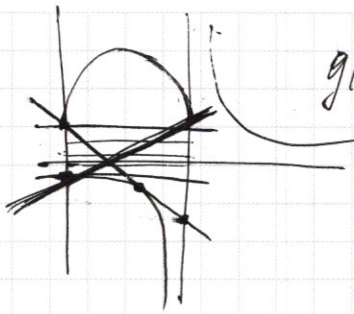
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{array}{r|l} 12x+11 & 4x+3 \\ \underline{12x+9} & 3 \\ 2 & \end{array} \qquad 3+\frac{2}{4x+3}$$

$y=3$

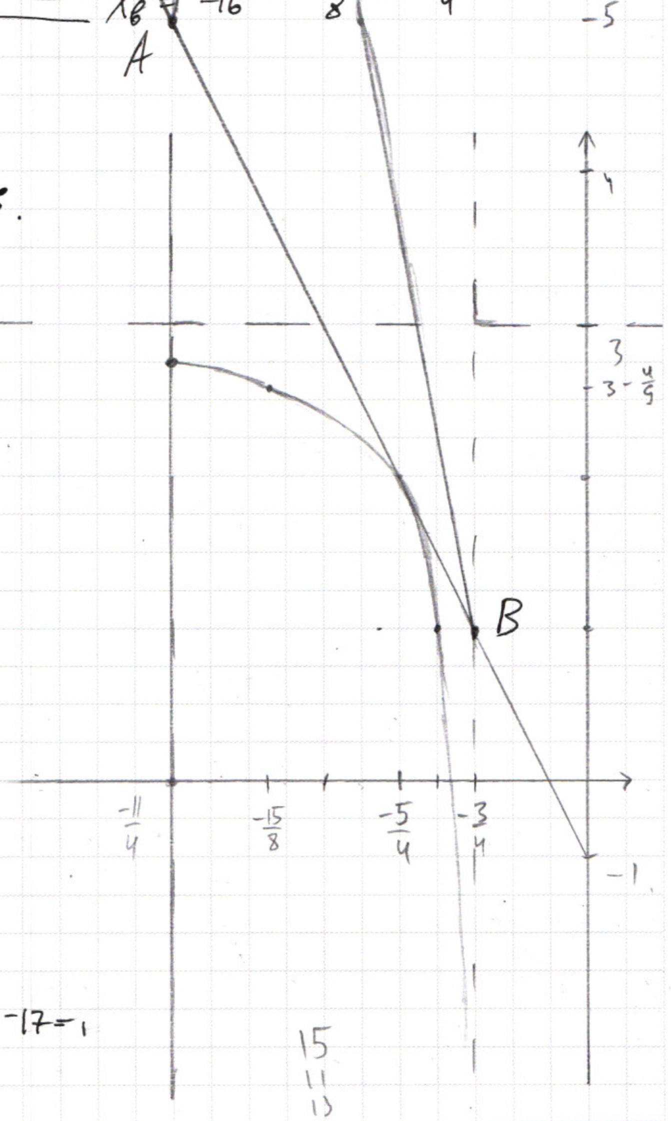
$x=-\frac{3}{4}$





$g(x)=-8x^2-30x-17$

$x_в = \frac{30}{-16}=\frac{-15}{8}=\frac{-7{,}5}{4}$



$3+4+5+5+5+5+6$

↓

33

$\frac{23}{33}=$

$f(x)=3+\frac{2}{4x+3}$

$f(-\frac{11}{4})=3+\frac{2}{-11+3}=3-\frac{1}{4}$

$f(-\frac{15}{8})=3+\frac{2}{-\frac{15}{2}+3}$

$=3+\frac{2}{-4{,}5}=3-\frac{4}{9}$

$f(-\frac{5}{4})=3+\frac{2}{-5+3}=2$

$f(-1)=3+\frac{2}{-4+3}=1$

$g(-\frac{11}{4})=-8\cdot\frac{121}{16}-30\cdot(-\frac{11}{4})-17$

$-\frac{121}{2}+\frac{15\cdot 11}{2}-17=\frac{44}{2}-17=5$

$g(-\frac{15}{8})=\frac{-225}{8}+\frac{30\cdot 15}{8}-17=\frac{225}{8}-17=\frac{225-136}{8}=89.$

$g(-\frac{3}{4})=-8\cdot\frac{9}{16}+\frac{90}{4}-17=-\frac{9}{2}+\frac{45}{2}-17=\frac{36}{2}-17=1$

15
11
13

надо док-ть, что пр. AB - единств.

↓

заметим, что пр. должны ~~быть~~ $\cap$ т. A и B или быть ниже

$ax+b$ т. $B(-\frac{3}{4};1)$, т. $A(-\frac{11}{4};5)$

$1\geq -\frac{3}{4}a+b \qquad b-\frac{3}{4}a\leq 1$

$5\geq -\frac{11}{4}a+b \qquad b-\frac{11}{4}a\leq 5$

$-\frac{8}{4}a\leq 4 \Rightarrow a\leq -2$, ~~но ... по рисунку~~

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

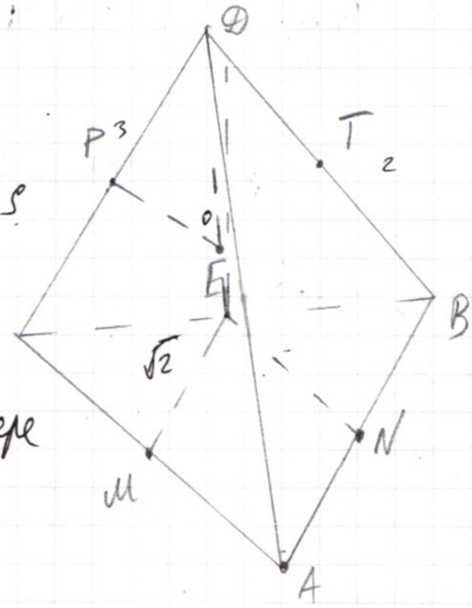
(Нумеровать только чистовики)

также $ax+b \geq 3+\frac{2}{4x+3}$

$f'(x)=\frac{-2}{(4x+3)^2}=a$

~~$\frac{-2}{(4x+3)^2} \leq -2$~~

заметим по рис., что E 1пр. удовл. докажем, что она касается в т. $(-\frac{5}{4}; 2)$ — ур. совнями $\Rightarrow (-2, -1)$



7. Дано:

ABCD-пир.

$AB=1, BD=2,$

$CD=3$

т. A и сер. всех ребе сфере

Найти:

BC -?

r_{min} -?

Решение:

а) сфера ∩ т. A, M, N, E, P, T, S

AMEN-пар-мм,

т.к ME и NE - ср. л

но т.к т. M, E, N, A ∈ сфере

$\Rightarrow$ AMEN - п/у

$\Rightarrow AB=AC=\frac{BC}{\sqrt{2}}$

$AC=1,\ BC=\sqrt{2}$

б) ΔABC - р/б, п/у $\angle A=90°$

$\Rightarrow$ гмт равноуд. точек от A, B и C - прям. прох ч/з т. E и $\perp (ABC)$, гмт равноуд. точек от. B, C, D - прям прох. ч/з ~~а пересеч. но сер. пер.~~ в т. O - т. ∩ сер.пер. и $\perp (BCD)$

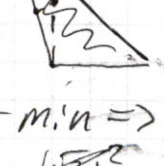
прямые ∩ в т. H ~~т~~ - центр. опис. сферы

$p=\frac{3+2+\sqrt{2}}{2}=\frac{5+\sqrt{2}}{2}$

$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

~~$9=4+2-2\cdot 2\cdot\sqrt{2}\cos\angle$~~

ΔEOH - п/у, $\angle EOH=90° \Rightarrow HC=R$



$HC^2=CE^2+HE^2$

$\Rightarrow R_{min}$, когд HE^2 min $\Rightarrow$ чтобы достич минимума $(ABC)\perp(BCD)$.

$\Rightarrow R^2=CE^2+OE^2=$

$R=\frac{abc}{4S}=\frac{3\cdot 2\cdot\sqrt{2}}{4\sqrt{\frac{5+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{5-\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}-1}{2}}}=\frac{3\cdot 2\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{(25-2)(2-1)}}=\frac{3\cdot 6\sqrt{2}}{\sqrt{23}}$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)