МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)}$ $\quad |\ (x-1)(y-6)=(y-6x)^2$

$9x^2+y^2-18x-12y-45=0$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$(3(x-1)-(y-6))^2=90-6(x-1)(y-6)$

~~9+36~~

$y^2-12x+36x^2=xy-6x-y+6$

$D_1=1+15$

$t_1=\frac{1+4}{3}=\frac{5}{3}$

$t_2=\frac{1-4}{3}$

1. $\sin(\overbrace{(2\alpha+2\beta)}^{A}-\overbrace{2\beta}^{B})+\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)=-\frac{2}{17}$

$\sin A\cos B-\sin B\cos A+\sin A\cos B+\sin B\cos A=$

$=2\sin A\cos B=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)=$

$=-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta=-\frac{2}{17}\ \to\ \cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\cos^2\alpha\ tg\alpha=\frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha+1}$

$\cos^2\alpha=\frac{1}{tg^2\alpha+1}$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$. $\quad \cos 4\beta=2\cos^2 2\beta-1=-\frac{15}{17}$

$\sin 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$? $\quad \sin 4\beta=\frac{8}{17}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha+\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}\ \to\ 4\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1$

$\frac{8}{17}\sin 2\alpha-\frac{15}{17}\cos 2\alpha=-\frac{2}{17}\ \to\ 8\sin 2\alpha-15\cos 2\alpha=-2$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\cdot\frac{1}{tg^2\alpha+1}-1=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \ge x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$|x^2-26x|^{\log_5 12} \ge (x^2-26x)+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$t=26x-x^2,\ t>0$$

$$t^{\log_5 12} \ge -t+13^{\log_5 t}$$

$$13=5^{\log_5 13}$$

$$t^{\log_5 12} \ge -t+t^{\log_5 13}$$

$$t^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13} \ge 0$$

$$t^{\log_5(2,4)}+1-t^{\log_5(2,6)} \ge 0$$

$$t^{\log_5(2,6)}-t^{\log_5(2,4)} \le 1$$

$$t=5^{\log_5(t)}$$

$$(2,6)^{\log_5(t)}-(2,4)^{\log_5(t)} \le 1$$

$$2,6^k-2,4^k \le 1$$

$$\left(\frac{13}{5}\right)^a-\left(\frac{12}{5}\right)^a \vee \left(\frac{13}{5}\right)^b-\left(\frac{12}{5}\right)^b \quad ;\ a>b$$

$$\left(\frac{13}{5}\right)^a-\left(\frac{13}{5}\right)^b \vee \left(\frac{12}{5}\right)^a-\left(\frac{12}{5}\right)^b$$

5.
- 2 → 0
- 3 → 0
- 5 → 1
- 7 → 1
- 11 → 2
- 13 → 3
- 17 → 4
- 19 → 4
- 23 → 5

n	f(n)	
4	0	✓
5	1	2
6	0	✓
7	1	2
8	0	✓
9	0	✓
10	1	2
11	2	—
12	0	✓
13	3	+
14	1	2
15	1	2

n	f(n)	
16	0	✓
17	4	×
18	0	✓
19	4	×
20	1	2
21	1	2
22	2	—
23	5	m
24	0	✓
25	2	—
26	3	+
27	0	✓
28	1	2

$f(x) < f(y)$

0 : 9
1 : 8
2 : 3
3 : 2
4 : 2
5 : 1

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$9x^2+y^2-18x-12y \quad +3(y^2-12yx+36x^2)$

$\cancel{-27x^2-1xx}$

$117x^2+4y^2$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

$9(x-1)^2+\underbrace{3(x-1)(y-6)}_{3(y-6x)^2}+(y-6)^2=90+3(y-6x)^2$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y^2 - 12xy + 36x^2 = (x-1)(y-6) = xy - 6x - y + 6$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$(y^2 - y + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} + (36x^2 - 6x + \frac{1}{4}) - \frac{1}{4} - 13xy - 6 = 0$

$(6x - \frac{1}{2})^2$

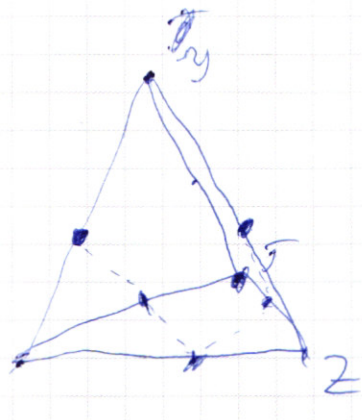
$9(x-1)^2 + (y-6)^2 + 6(x-1)(y-6) = 90 + (y-6x)^2$

$(3x - 3 + y - 6) = 90 + (y - 6x)^2$

$(3x + y - 9) - (y - 6x)^2 = 90$

$(9x - 9)(y - 3x) = 90$

$(x-1)(y-3x) = 10$



$(x-1)(y-3x) = 10$

$(x-1)(y-6) = (y-6x)^2$

$\frac{10(y-6)}{y-3x} = (y-6x)^2$

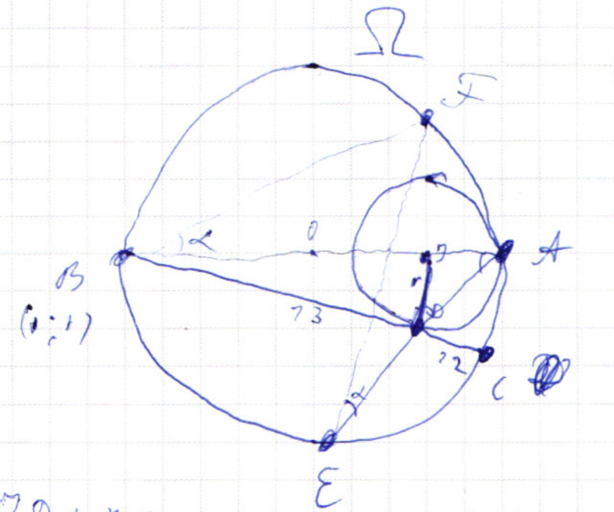
$10 + \frac{30x - 60}{y - 3x}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$ID \perp BC$, $FE \perp BC \to ID \parallel FE$

$AD \cdot DE = 156$??

$BI^2 = 169 + r^2$

$(2R - r)^2 = 169 + r^2$

$4R^2 - 4Rr = 169$

$4R(R - r) = 169$

$2R - R\cos 2\alpha$

$B(0;0)$

$A(2R;0)$

$F(R(\cos 2\alpha + 1);\ R\sin\alpha)$

$E(R(2 - \cos 2\alpha);\ -R\sin\alpha)$

$8 - 6x \geq 3ax^2 + 3bx - 2ax - 2b$

$3ax^2 + (3b - 2a + 6)x - (2b + 8) \leq 0$

$x_0 = \dfrac{-(3b - 2a + 6)}{6a}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(y-6x)^2 = (x-1)(y-6)$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$\begin{cases} (3(x-1)+(y-6))^2 = 90 + 6(y-6x)^2 \\ (3(x-1)-(y-6))^2 = 90 - 6(y-6x)^2 \end{cases}$

$\cancel{(3x+y-9)^2}$

$\cancel{(3x+y-9)^2 = 90 + 6(y-6x)^2}$

$\cancel{81(x-1)^4 + (y-6)^2 + 18(y-6x)^2 = 8100}$

$81(x-1)^4 + 18(x-1)^2(y-6)^2 + (y-6)^4 = 8100$

$81(x-1)^4 + (y-6x)^4 + (y-6)^4 = 8100$

$y-3x$

$(3x+y-9)^2 - (\sqrt{6}y - 6\sqrt{6}x)^2 = 90$

$((3+6\sqrt{6})x + (1-\sqrt{6})y - 9)((3-6\sqrt{6})x + (1+\sqrt{6})y - 9) = 90$

$g(a) = (\log a)(a^t)$

$\log\left(\frac{13}{5}\right) \cdot \left(\frac{13}{5}\right)^t -$

$- \log\left(\frac{12}{5}\right) \cdot \left(\frac{12}{5}\right)^t > 0?$

$\log\left(\frac{13}{5}\right) \cdot \left(\frac{13}{12}\right)^t > \log\left(\frac{12}{5}\right)$

$(\log 13 - \log 5) \cdot \left(\frac{13}{12}\right)^t > \log 12 - \log 5$

$\left(\frac{13}{12}\right)^t > \frac{\log 12 - \log 5}{\log 13 - \log 5}$ $1 + \frac{\log\left(\frac{12}{13}\right)}{\log\left(\frac{13}{5}\right)}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$9x^2+y^2-18x-12y=75.$ $\cancel{(-(y-6x)^2}$

На ОДЗ: $(y-6x)^2=(x-1)(y-6)$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \quad |+6(x-1)(y-6)$

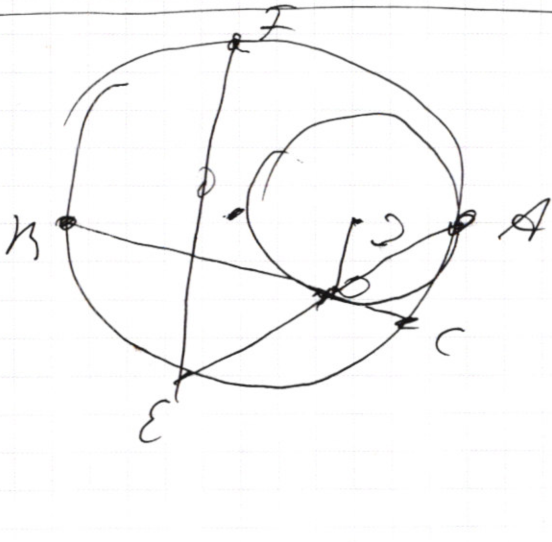
$(3x-3+y-6)^2=90+6(x-1)(y-6)$

$(3x+y-9)^2=90+6(y-6x)^2$

. . .

Тут точно нет опечатки???

4.



$BC \perp OD$, т.к. касается ω

$FE \perp BC$

$\Rightarrow FE \parallel OD$

$BD \cdot DC = AD \cdot DE$???

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$

$\Rightarrow \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) + \sin((2\alpha+2\beta)-2\beta) = -\frac{2}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos(2\beta) = -\frac{2}{17} \to \underline{\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\cos(4\beta) = 2\cos^2(2\beta) - 1 = -\frac{15}{17}$

I. $\sin(2\beta) > 0$

$\sin(2\beta) = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(4\beta) = 2\sin(2\beta)\cos(2\beta) = \frac{8}{17}$

$\frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad | \cdot\sqrt{17}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$\left(\frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha+1}\right) + 4\left(\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\right) = -1$

Замена: $tg\alpha = t$

$\frac{2t+4-4t^2}{t^2+1} = -1$

$2t+4-4t^2 = -t^2-1$

$3t^2-2t-5=0$

$\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\frac{5}{3} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} tg\alpha=-1 \\ tg\alpha=\frac{5}{3} \end{cases}$

II. $\sin(2\beta) < 0$

$\sin(2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$, $\sin 4\beta = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1$. Замена

$\frac{2t-4+4t^2}{t^2+1} = -1$

$2t-4+4t^2 = -t^2-1$

$5t^2+2t-3=0$

$\left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=\frac{3}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} tg\alpha=-1 \\ tg\alpha=\frac{5}{3} \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha=-1 \\ tg\alpha=\frac{3}{4} \\ tg\alpha=\frac{5}{3} \end{array}\right.$

Ответ: -1; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{3}$.

5. Подставим $a = \frac{x}{y}$, $b = y$: $f(x) = f(\frac{x}{y}) + f(y)$

$\to f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$.

$f(\frac{x}{y}) < 0 \iff f(x) < f(y)$.

Таблица:

N	простые мн-тели	$\Sigma f(p_i)$	$f(N)$
4	$2 \cdot 2$	$0+0$	0
5	5	1	1
6	$2 \cdot 3$	$0+0$	0
7	7	1	1
8	$2 \cdot 2 \cdot 2$	$0+0+0$	0
9	$3 \cdot 3$	$0+0$	0
10	$2 \cdot 5$	$0+1$	1
11	11	2	2
12	$2 \cdot 2 \cdot 3$	$0+0+0$	0
13	13	3	3
14	$7 \cdot 2$	$1+0$	1
15	$5 \cdot 3$	$1+0$	1
16	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$	$0+0+0+0$	0

N	Пр. мн-тели	$\Sigma f(p_i)$	$f(N)$
17	17	4	4
18	$2 \cdot 3 \cdot 3$	$0+0+0$	0
19	19	4	4
20	$2 \cdot 2 \cdot 5$	$0+0+1$	1
21	$7 \cdot 3$	$1+0$	1
22	$2 \cdot 11$	$0+2$	2
23	23	5	5
24	$2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$	$0+0+0+0$	0
25	$5 \cdot 5$	$1+1$	2
26	$13 \cdot 2$	$3+0$	3
27	$3 \cdot 3 \cdot 3$	$0+0+0$	0
28	$2 \cdot 2 \cdot 7$	$0+0+1$	1

$f(n) = 0$ − 9 раз, $f(n) = 1$ − 8 раз, $f(n) = 2$ − 3 раза

$f(n) = 3$ − 2 раза, $f(n) = 4$ − 2 раза, $f(n) = 5$ − 1 раз.

Если $f(x) = 0$, то $f(y) \geq 1$. Способов $(9) \times (8+3+2+2+1) = 144$.

--- $f(x) = 1$, $f(y) \geq 2$. --- $(8) \times (3+2+2+1) = 64$

--- $f(x) = 2$, $f(y) \geq 3$. --- $(3) \times (2+2+1) = 15$

--- $f(x) = 3$, $f(y) \geq 4$. --- $(2) \times (2+1) = 6$

--- $f(x) = 4$, $f(y) = 5$. --- $2 \times 1 = 2$.

Итого 231.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3. $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

ОДЗ: $26x-x^2>0$. $\longrightarrow |x^2-26x|=26x-x^2$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)-13^{\log_5(26x-x^2)} \geq 0$

$12^{\log_5(26x-x^2)}+5^{\log_5(26x-x^2)}-13^{\log_5(26x-x^2)} \geq 0$

Замена: $t=\log_5(26x-x^2)$, $t<\log_5 169$

$12^t+5^t-13^t \geq 0 \quad \Big| \div 5^t;\ 5^t>0$

$\left(\frac{12}{5}\right)^t-\left(\frac{13}{5}\right)^t+1 \geq 0$

$\left(\frac{13}{5}\right)^t-\left(\frac{12}{5}\right)^t \leq 1$

при $t=2$: $\left(\frac{13}{5}\right)^t-\left(\frac{12}{5}\right)^t=1$.

При $t\leq 0$: $\left(\frac{13}{5}\right)^t-\left(\frac{12}{5}\right)^t<0\leq 1$.

При $t>0$: $f(x)=\left(\frac{13}{5}\right)^t-\left(\frac{12}{5}\right)^t$ – возр.

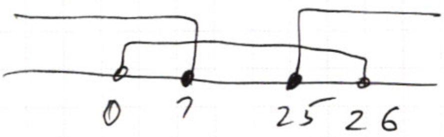
$t\in(-\infty;0]\cup(0;2]$

$t\in(-\infty;2]$

$\log_5(26x-x^2)\leq 2$

$0<26x-x^2\leq 25$

$\begin{cases} 26x-x^2>0 \\ x^2-26x+25\geq 0 \end{cases}$



$x\in(0;1]\cup[25;26)$

Ответ: $(0;1]\cup[25;26)$

* Док-во, что $f(x)$ возр при $t>0$: $f'(x)=\ln\left(\frac{13}{5}\right)\left(\frac{13}{5}\right)^t-\ln\left(\frac{12}{5}\right)\left(\frac{12}{5}\right)^t$.

$g(a)=\ln(a)\cdot(a^t)$. a^t – возр. и положит. при $a>1$, $t>0$;

$\ln(a)$ – возр и положит при $a>1$. $\Rightarrow g(a)$ – возр. $g\left(\frac{13}{5}\right)>g\left(\frac{12}{5}\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln\left(\frac{13}{5}\right)\left(\frac{13}{5}\right)^t-\ln\left(\frac{12}{5}\right)\left(\frac{12}{5}\right)^t \Rightarrow f'(x)>0$.