МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geqslant ax+b \geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$.

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right) =$$

$$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$$

$$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{\cancel{\sqrt{17}}\,17}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin 2\alpha\cdot \cancel{\cos 2}\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad (1) \\ \sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad (2) \end{array}\right.$$

(1) $\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$$2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha.$$

$$5\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha = 0. \quad \Big/ : \cos^2\alpha \neq$$

Т.к. при $\cos\alpha = 0$ $\sin\alpha = 0$. ($\cos\alpha = 0$ — не решение)

$$5 + 2\operatorname{tg}\alpha - 3\operatorname{tg}^2\alpha = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = -1 \\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3} \end{array}\right.$$

(2) $\sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1.$

$$2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha.$$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$5\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0 \quad /:\cos^2\alpha$$

$$5\,tg^2\alpha + 2\,tg\,\alpha - 3 = 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -1 \\ tg\,\alpha = \frac{3}{5}. \end{array}\right.$$

Ответ: $-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}.$

2.

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{4y - 6x - y + 6} \\ 3x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y-6) - 6(x-1) = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ (3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90. \end{cases}$$

Пусть $(x-1) = m$; $(y-6) = n$

~~$y - 6x$~~

$$\begin{cases} n - 6m = \sqrt{mn} \\ 9m^2 + n^2 = 90, \end{cases}$$

$$\begin{cases} n^2 - 12mn + 36m^2 = mn, \quad n \geq 6m \ (1). \\ 9m^2 + n^2 = 90 \ (2) \end{cases}$$

(1) $D = 169m^2 - 144m^2 = 25m^2$

$$\left[\begin{array}{l} n = \frac{13m - 5|m|}{2} \\ n = \frac{13m + 5|m|}{2}. \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} n = 4m \\ n = 9m. \end{array}\right.$$

$n = 4m$, только при $m < 0$, т.к $n \geq 6m$.

$n = 9m$, только при $m \geq 0$, т.к $n \geq 6m$.

(2) $\left[\begin{array}{l} 9m^2 + 81m^2 = 90, m \geq 0 \\ 9m^2 + 16m^2 = 90, m < 0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} m^2 = 1, m \geq 0 \\ m^2 = 3{,}6, m < 0. \end{array}\right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} m = 1 \\ n = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} m = -\frac{6}{\sqrt{10}} \\ n = -\frac{24}{\sqrt{10}}. \end{cases}\end{array}\right.$$

~~Ответ: $(1;9)$; $\left(-\frac{6}{\sqrt{10}}; -\frac{24}{\sqrt{10}}\right)$, где $(m;n)$ — решение системы.~~

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-1 = 1 \\ y-6 = 9 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1 = -\frac{6}{\sqrt{10}} \\ y-6 = -\frac{24}{\sqrt{10}}; \end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x = 2 \\ y = 15 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1-\frac{6}{\sqrt{10}} \\ y = 6-\frac{24}{\sqrt{10}}; \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $(2;15)$, $\left(1-\frac{6}{\sqrt{10}}; 6-\frac{24}{\sqrt{10}}\right)$

3. $$|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

ОДЗ: $26x - x^2 > 0$.

$x(x-26) < 0$

$x \in (0; 26)$.

$(|x^2-26x|) = 26x - x^2$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12} + (26x-x^2) \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

Т.к. в правой и левой части неравенства положительные числа:

$$\log_5\left((26x-x^2)^{\log_5 12}\right) + \log_5(26x-x^2) \geq \log_5 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

~~$\log_5(26x-x^2)\cdot\log_5 12 + \log_5(26x-x^2) \geq \log_5 13 \cdot \log_5(26x-x^2)$.~~

~~Т.к. $\log_5(26x-x^2) \geq 0$, $\log_5(26x-x^2) = 0$ — пусть.~~

~~Подставим $(26x-x^2) = 1$, $26x-x^2 = 1$.~~

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

~~$0 \ge 0$. — верно.~~

~~Пусть $\log_5(26x-x^2) \ne 0$.~~

~~Поделим обе части неравенства на $\log_5(26x-x^2) \ne 0$.~~

~~(Знак не и~~

Пусть $\log_5(26x-x^2) \ne 0$, $26x-x^2 \ne 1$

~~$\log_5\left((26x-x^2)\left((26x-x^2)^{\log_5 12-1}+1\right)\right) \ge (\log_5 13)\log_5(26x-x^2)$~~

$$\log_5\left((26x-x^2)^{\log_5 12-1}+1\right) \ge \log_5 (26x-x^2)^{\log_5 13-1}.$$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12-1}+1 \ge (26x-x^2)^{\log_5 13-1}.$$

~~$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2 \ge (26x-x^2)^{\log_5 13}$~~

~~$\dfrac{(26x-x^2)^{\log_5 12}}{(26x-x^2)^{\log_5 13}} \ge -\dfrac{(26x-x^2)}{(26x-x^2)^{\log_5 13}}+1.$~~

~~Т.к. $\log_5 12-1=\log_5 \frac{12}{5}$; $\frac{12}{5}<5$.~~

~~$0<\log_5 12-1<1$; $1<\frac{12}{5}$~~

~~Аналогично $0<\log_5 13-1<1$.~~

$$(26x-x^2)^{\log_5 12-1}+(26x-x^2)^0-(26x-x^2)^{\log_5 13-1}\ge 0.$$

$$(26x-x^2-1)(\log_5 12-\log_5 13)\ge 0.$$

$$26x-x^2-1 \le 0.$$

$$x^2-26x+1 \ge 0.$$

$$\left[\begin{array}{l} x \ge 13+\sqrt{168} \\ x \le 13-\sqrt{168} \end{array}\right.$$

При $\log_5(26x-x^2)=0$, т.е. $26x-x^2=1$; $\left[\begin{array}{l} x=13+\sqrt{168} \\ x=13-\sqrt{168} \end{array}\right.$

Исходное нер-во:

$1+1 \ge 13^0$

$2 \ge 1$. — Верно.

Ответ: $(0; 13-\sqrt{168}] \cup [13+\sqrt{168}; 26)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. Дано:

Ω; ω - окружн.

$\Omega \cap \omega = A$.

AB - диаметр Ω.

$BC \cap \omega = D$.

BC - хорда Ω

Пусть r - радиус ω

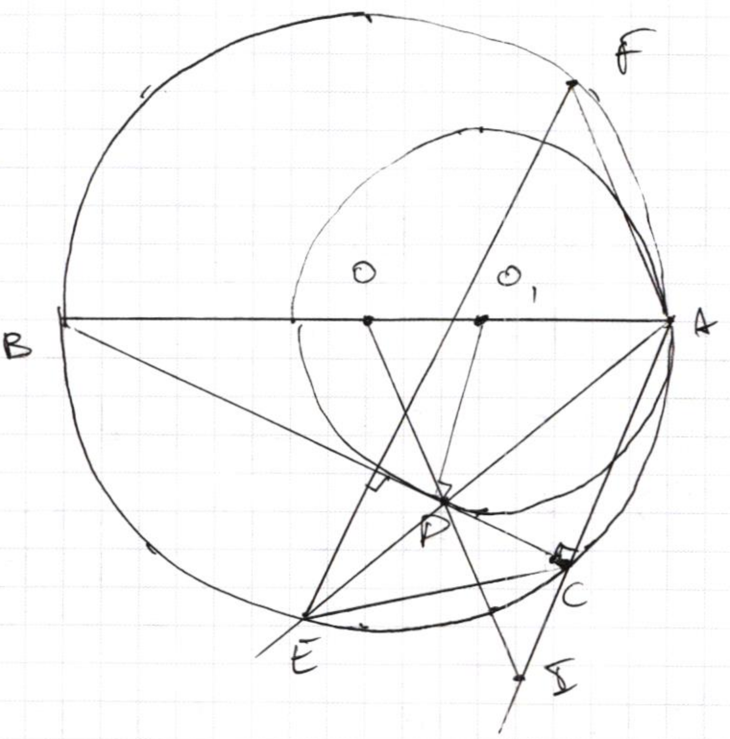
Пусть R - радиус Ω.

---

r - ? R - ?

$\angle AFE$; $S_{\triangle AEF}$

$CD = 12$; $BD = 13$.



Реш.:

① Пусть O - центр Ω. O_1 - центр ω.

② . $O_1D \perp BC$. (как радиус в место касания.

③ . $\frac{BO_1}{O_1A} = \frac{BD}{DC}$ (по обобщ. т. Фалеса).

$$\frac{2R-r}{r} = \frac{13}{12}; \quad \frac{R}{r} = \frac{25}{24}$$

④ . $\cos\angle BO_1D = \frac{r}{2R-r} = \frac{r}{\frac{25}{12}r - r} = \frac{12}{13}$.

⑤ . $\cos\angle BO_1D = \cos\angle BAC$ (т.к. $O_1D \parallel AC$, потому что $O_1D \perp BC$ $AC \perp BC$. ($\angle BCA = 90°$ - как вписанный угол опирающийся на диам.)

⑥ $\sin\angle BAC = \frac{5}{13}$.

⑦ . $\frac{1}{AB} = \frac{1}{2R} = \frac{5}{13} \cdot BC$ ~~$\frac{1}{2R}$~~ ~~$\frac{13}{13}$~~ ~~$\frac{13}{13}$~~ ~~$\frac{13}{13}$~~

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\cancel{R = \frac{13}{25-0}}$ $\quad$ $\cancel{R7 \; \frac{12}{26} \; \lambda A = \frac{24}{25} \; \frac{125}{26} + \frac{120}{26}}$

$\cancel{(8) \; \angle AFE = \frac{\smile EC + \smile AC}{2}}$; $\cancel{(9) \; AC = 2R \cdot \cos\angle BAC}$

$\cancel{= \frac{125}{26}}$

(7) $AB = 2R = \frac{BC}{\sin\angle BAC} = \frac{25 \cdot 13}{5} =$

$= 65$

$R = \frac{65}{2} = 32{,}5$

(8) $r = \frac{\overset{12}{\cancel{24}}}{25} \cdot \frac{65}{2} = \frac{12}{5} \cdot 13 = 31{,}2.$

(9) $AC = 2R \cdot \cos\angle BAC = 65 \cdot \frac{12}{13} = 60.$

(10) $\operatorname{tg}\angle DAC = \frac{12}{60} = \frac{1}{5}.$

(11) $\angle AFE = \frac{\smile EC + \smile AC}{2} = \angle DAC + \angle CBA =$

$= \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{12}{13}\right).$

(12). Ответ: $R = 32{,}5$ $\quad$ $\angle AFE = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{5}\right) + \arcsin\left(\frac{12}{13}\right)$

$r = 31{,}2.$

5. Для ~~любого~~ любого ~~положительного~~ простого числа p:

$\frac{p}{4}$ – положительно, а значит $\left[\frac{p}{4}\right] \geq 0$.

Поэтому $f\left(\frac{n}{4}\right)$ может равняться только сумме неотрицательных чисел.

Ответ: 0

~~$\frac{p}{4}$ – [illegible]~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~BO · O~~

$\frac{BD}{OA} \cdot \frac{AI}{IC} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$

$\frac{AI}{IC} = \frac{13}{12}$

$AI = AC + IC$

$BDX \cdot DC =$

$f(x)$

$13 \cdot 29$ 1 3 5 7 8

$\frac{25}{12}$ 1

$\frac{r}{25 - r} = \frac{r}{\frac{25}{12} - r}$

$\alpha + (\alpha + x) + 180 - 2\alpha - x$

144 156

$r =$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{9\cdot 10^2}{5\cdot 8}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha =$

$\frac{90}{25}$

$\frac{18}{5}$ $\quad = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$0{,}36$ $\quad \cancel{2}\cdot\left(+\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

360

$\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1 \ (1) \\ \sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1 \end{array}\right.$

(1) $\quad \sqrt{8} \quad \sqrt{17}$

$3x^2-2x-5$

$D = 1+16$

$+\frac{5}{3} \quad -1$

$(y-6x) = \sqrt{(x-1)(y-6)}$

$(3x-3)^2 - 9 + (y-6)^2 - 36 = 45$

$169-144$ $\quad D = 168$

$x^2 - 26x + 1 = 0$ $\quad 13 \pm \sqrt{168}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x^2 - 26x$

$\log_5 12 \log_5(26x - x^2) + \log_5(26x - x^2) \geq$

$\cancel{2-6x}$

$\geq \log_5(26x - x^2) \cdot \log_5 13$

$6x - 2 \,|\, 3x - 2.$

$-6x - 4 \,|\, 2.$

-4

$\log_5 12 + 1 \geq \log_5 13.$

$-2 + \frac{4}{(3x-2)}$

$x^2 - 26x + 1.$

$D = 169 - 1 = 168.$

$(26x - x^2)\left((26 - x^2)^{(\log_5 12 - 1)} + 1\right)$

$\log_5 \ldots \geq \log_5 (26 - x^2)(\log_5 13 - 1).$

$(26x - x^2)^{(\log_5 12 - 1)}\left(\right.$

$t^{(\log_5 12 - 1)} + 1 \geq t^{(\log_5 13 - 1)}.$

$\frac{t^{\log_5 12} + t}{t} \geq \frac{t^{\log_5 13}}{t}$

$t^{\log_5 12} - t^{\log_5 13} + t \geq 0.$

$-\log_5 \frac{5}{13} \cdot (26x - x^2) + 1.$

$(50+1)^2$

$= 2500 + 100 +$

$+ 1.$

$D = 17 \cdot 17 \cdot 9.$

2601

$2601 - 4 \cdot 18 \cdot 28.$

$\frac{51 + \sqrt{585}}{36}.$

$18(\cdot 10 + 18) = 180 + 324$

$504 \cdot 4$

$585.$

$x_0 = \frac{51}{2 \cdot 3 \cdot 6.} = \frac{17}{12.} = 2000 + 16.$

$2016.$

$\frac{51 - \sqrt{585}}{36.}$

$\frac{26}{36.}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)