МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

~~$\exists\ a = 2\alpha + 2\beta,\ b = 2\beta \Rightarrow 2\alpha + 4\beta = a + b,\ 2\alpha = a - b$~~

~~$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \sin(a+b) + \sin(a-b) =$~~

~~$= 2\sin a \cos b = -\frac{2}{5}$~~

~~т.к. $\sin a = -\frac{1}{\sqrt5}$, то $\frac{-2}{\sqrt5}\cos b = -\frac{2}{5} \Rightarrow \cos b = \frac{1}{\sqrt5}$~~

~~$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{a-b}{2}\right)$~~

~~$\cos b = \frac{1}{\sqrt5} = 2\cos^2\frac{b}{2} - 1 \Rightarrow \cos\frac{b}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}}$~~

~~$\sin a = 2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}$~~

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha =$ $\qquad \cos(2\alpha + 2\beta) = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$= 2\sin(2\alpha + 2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta =$
$= \pm\frac{2}{\sqrt5}$

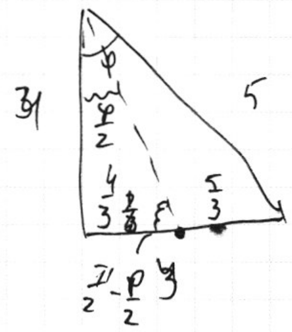
$\sin(2\alpha + 4\beta) = \sin(2\alpha + 2\beta + 2\beta) = \sin(2\alpha + 2\beta)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot$
$\cdot\cos(2\alpha + 2\beta)$. $+\sin 2\alpha$

$\sin(2\alpha + 2\beta)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha + 2\beta) = -\frac{2}{5}$.

$-\frac{1}{5} \pm \frac{4}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\left[\begin{array}{l} \frac{3}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = -1 \\ -1 + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \Leftrightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{5} \end{array}\right.$ ~~$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \pi k \\ 2\alpha = \pi - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + \pi k \end{array}\right.$~~

$$\left[\begin{aligned} 2\alpha &= \frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 1 \\ 2\alpha &= \pi - \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + 2\pi k \\ 2\alpha &= \arcsin\left(\frac{3}{5}\right) + 2\pi k. \end{aligned}\right| \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \left[\begin{aligned} \operatorname{tg}\alpha &= \frac{\frac{4}{3}}{4} = \frac{1}{3} \\ \operatorname{tg}\alpha &= 3 = \frac{4}{\frac{4}{3}} = 3 \end{aligned}\right.$$

Отв: $\left\{\frac{1}{3}; 3; 1\right\}$.

№2.

$$\begin{cases} x - 12y = 2xy - 12y - x + 6 \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \quad (2) \end{cases}$$

ОДЗ: ав ≥ 0.

$(2) \Leftrightarrow (x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$

$\exists\ x - 6 = a;\ 2y - 1 = b \Rightarrow$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

$a - 6b = \sqrt{ab} \quad a - 6b \geq 0$

$a^2 + 36b^2 - 12ab = ab$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0$

$b = 0$ – не реш-е $\Rightarrow$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13\frac{a}{b} + 36 = 0$

$$\left[\begin{aligned} \frac{a}{b} &= 9 \Rightarrow a = 9b \\ \frac{a}{b} &= 4 \Rightarrow a = 4b \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} 90b^2 &= 90 \\ 25b^2 &= 90 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} b &= \pm 1 \Rightarrow a = \pm 9 \\ b &= \pm\frac{3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow a = \pm\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{aligned}\right.$$

Из этих р-й под $a - 6b \geq 0$ подх. только:

$a = 9;\ b = 1$

$a = -\frac{12\sqrt{10}}{5};\ b = -\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$x - 6 = 9 \Rightarrow x = 15 \quad 2y - 1 = 1 \Rightarrow y = 1$

$x - 6 = -\frac{12\sqrt{10}}{5} \Rightarrow x = \frac{30 - 12\sqrt{10}}{5}$

$2y - 1 = -\frac{3\sqrt{10}}{5} \Rightarrow y = \frac{5 - 3\sqrt{10}}{10}$

Отв: $\left\{(15;1);\left(\frac{30-12\sqrt{10}}{5}; \frac{5-3\sqrt{10}}{10}\right)\right\}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0 \Rightarrow$ на ОДЗ $|x^2-10x| = 10x - x^2$

$5^{\log_3(10x-x^2)} = (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$\exists\ 10x - x^2 = t \Rightarrow t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$ $\quad t > 0$.

$t \geq t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$

$t^{\log_3 5} = 5^{\log_3 t}$; $t^{\log_3 4} = 4^{\log_3 t}$

Т.к. $t > 0$, то

$1 \geq t^{\log_3 \frac{5}{3}} - t^{\log_3 \frac{4}{3}}$

~~При $t > 1$~~ $\cancel{t^{\log_3 \frac{5}{3}}}$

$\exists\ t = 3^{2k} \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 \geq \left(\frac{25}{9}\right)^k - \left(\frac{16}{9}\right)^k$

Заметим, что при $k=1$ нер-во вып. $\frac{25}{9} - \frac{16}{9} = 1$

$\exists\ f(k) = \left(\frac{25}{9}\right)^k - \left(\frac{16}{9}\right)^k$

$f'(k) = \ln\frac{25}{9}\cdot\left(\frac{25}{9}\right)^k - \ln\frac{16}{9}\cdot\left(\frac{16}{9}\right)^k$ ~~$\Rightarrow$ при k~~, что > 0 при $k \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(k)\uparrow$ на $k \geq 0 \Rightarrow$ при $k \in [0;1]$ - нер-во вып.

При $k < 0$, т.е. при $t < 1$ нер-во тоже вып., т.к.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$t^{\log_3 \frac{5}{3}} < t^{\log_3 \frac{4}{3}}$ при $t < 1$

т.е. $t \in [0; 9]$ (т.к. $k \in [0;1] \Leftrightarrow t \in [1;9]$).

$0 \leq 10x - x^2 \leq 9$.

$-x^2 + 10x \geq 0$

$x^2 - 10x \leq 0$

$x(x-10) \leq 0$

$x \in [0; 10]$.

$-x^2 + 10x \leq 9$

$x^2 - 10x \geq -9$

$x^2 - 9x - x - 9 \geq 0$

$x(x-9) - 1(x-9) \geq 0$

$x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$.

~~Объединим~~ В итоге, $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$.

Отв: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$.

№5.

$f\left(\frac{1}{x}\right) = -f(x)$, т.к. $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = f(x)$., а $f(1) = 0$,

т.к. $f(x) = f(x) + f(1)$

Т.е. $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow f(x) < f(y)$

Найдём все $f(x)$ при $x \in [2; 25]$ и $x \in \mathbb{Z}$.

~~$f(1) = 0$~~ $f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(2) = 0$ $f(7) = 1$ $f(11) = 2$ $f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(3) = 0$ $f(8) = f(4) + f(2) = 0$ $f(12) = f(2) + f(6) = 0$ $f(16) = f(4) + f(4) = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$ $f(9) = f(3) + f(3) = 0$ $f(13) = 3$ $f(17) = 4$

$f(5) = 1$ $f(10) = f(5) + f(2) = 1$ $f(14) = f(2) + f(7) = 1$ $f(18) = f(9) + f(2) = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 (прод-е).

$f(19)=4$ $\quad f(21)=f(7)+f(3)=1$ $\quad f(25)=f(5)+f(5)=0$

$f(20)=f(4)+f(5)=1$ $\quad f(22)=f(2)+f(11)=2$

$f(23)=5$ $\quad f(24)=f(4)+f(6)=0$

Итого, ~~8~~ 17 «0»; 7 «1»; 2 «2»; 1 «3»; 2 «4»; 1 «5»

Если $f(y)=0$, то 0 спос. выбр. x

Если $f(y)=1$, то 7 спос. выбр. y и 11 спос. выбр. x (чтобы $f(x)=0$), (всего $\underline{7\cdot 11}$ спос.)

Если $f(y)=2$, то 2 спос. выбр. y и (18 спос. выбр. x, чтобы $f(x)<2$). (всего $\underline{2\cdot 18}$ спос.).

Если $f(y)=3$, то $\underline{\overset{1 \text{ для } y}{2}\overset{20 \text{ для } x}{0}}$ спос. выбр. x и y.

Если $f(y)=4$, то $\underline{2\cdot 21}$ спос. выб. x и y.

Если $f(y)=5$, то $23\cdot 1$ спос. выб. x и y

Итого $7\cdot 11+2\cdot 18+20\cdot 1+21\cdot 2+23\cdot 1=$

$=77+36+20+42+23=\underline{198}$

~~*. Т.к. выборы независ., то кол-во~~

* Выб. x и y независ.

Отв: 198.

$= f(x)$

№6.

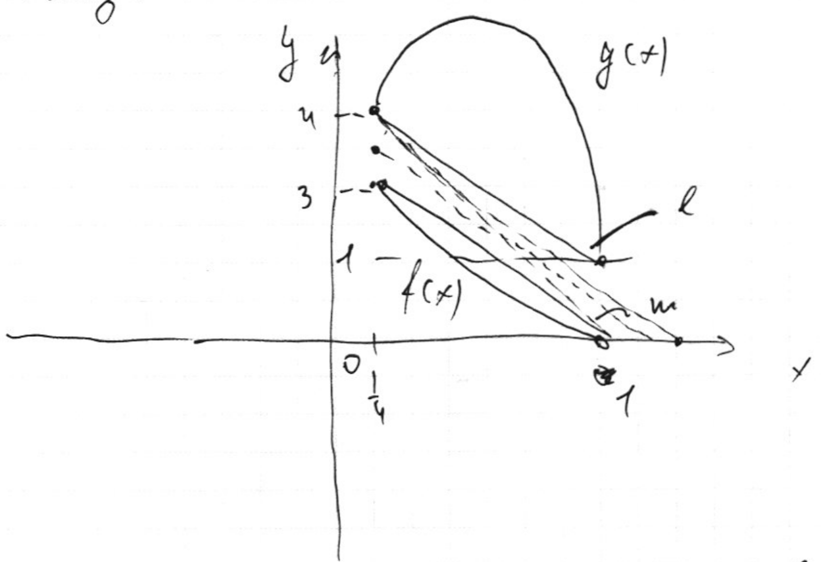
$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3 = g(x)$$

$$\frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5} \quad \downarrow \text{ на } x>0.$$

$-32x^2+36x-3$ — верш. параб. с $x_0 = \frac{36}{64}$ ($> \frac{1}{4}$, но < 1).
параб., ветви вниз.

$f(\frac{1}{4}) = 3 \quad g(\frac{1}{4}) = 4 \quad f(1) = 0 \quad g(1) = 1.$

Эскиз:



Запишем ур-я прямых l и m.

m: $\frac{x-1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{y}{-3+0}$

$3(x-1) = -\frac{3}{4}y$

$y = -4x+4$

l: $\frac{x-1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{y-1}{-4+1}$

$\frac{3}{4}(y-1) = -3(x-1)$

$y-1 = -4x+4$

$y = -4x+5$

Нер-во из усл. экв.

$-4x+4 \le ax+b \le -4x+5.$ (2)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (прод-е).

$\exists\ h(x) = a x + b$

$3 \le h\left(\frac{1}{4}\right) \le 4$

$\exists\ h\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} a + b = c$

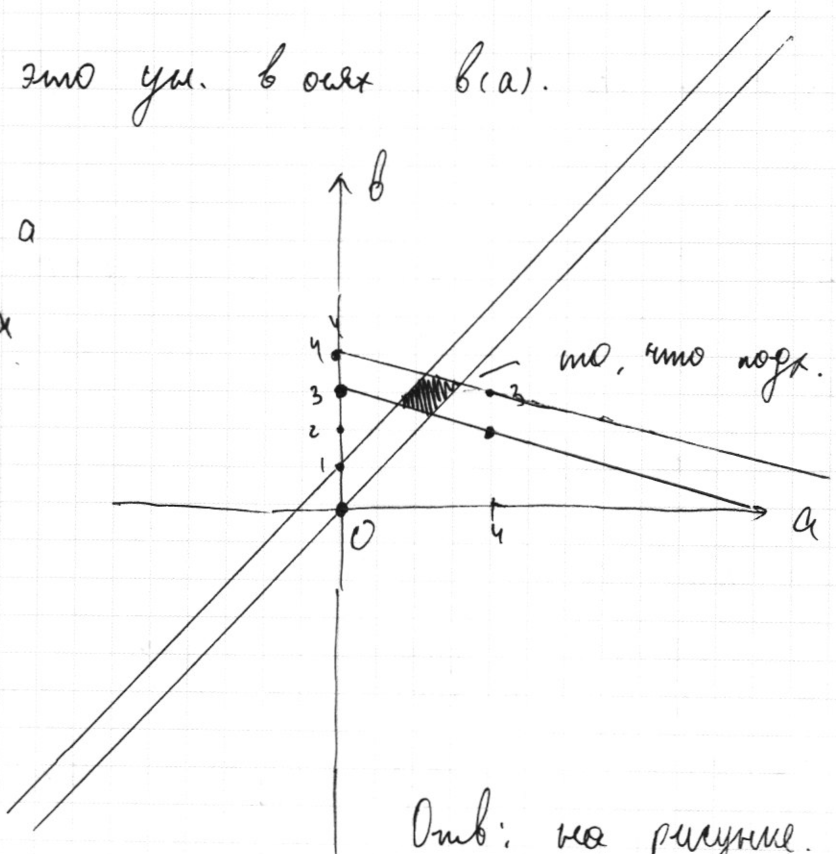
Чтобы нер-во (2) вып. $1 \le h(1) \le 0$

$$\begin{cases} 3 \le \frac{1}{4} a + b \le 4 \\ 0 \le a + b \le 1. \end{cases}$$

Если это усл. вып., то и вып. нер-во из усл. с инали -ми.

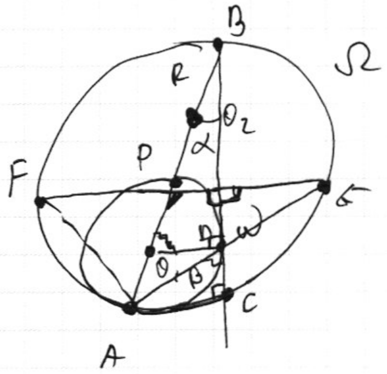
Нарисуем это усл. в осях $b(a)$.

$$\begin{cases} \begin{cases} b \ge 3 - \frac{1}{4} a \\ b \le 4 - \frac{1}{4} a \end{cases} \\ \begin{cases} b \ge -a \\ b \le 1 - a \end{cases} \end{cases}$$



Отв: на рисунке.

№ 4.



O_1 и O_2 – ц. $\overset{\text{рад. } r}{\omega}$ и $\overset{\text{рад. } R}{\Omega}$ соотв.

1) Т.к. центры $\overset{\text{кас. окр.}}{\text{и}}$ лежат на прямой, содерж. их диам, то $O_1 \in AB$.

$P = AB \cap \omega$ $\quad$ AP – диам. ω

2) $PDA = 90^0$ (оп. на диам.), по аналог. соображ. $\angle BCA = 90^0$

3) $\overset{=r}{O_1D} \perp BC$ (радиус к т. кас.).

4) По т. ~~Пиф. в $\triangle BO_1D$~~ в $\triangle$

~~$(R + R - r)^2 = r^2 + BD^2$~~ $\quad \cos\alpha = \dfrac{BD}{R + R - r} = \dfrac{BC}{2R} =$

~~$4R^2$~~

$= \dfrac{17}{2R - r} = \dfrac{32}{2R} \Rightarrow 34R = 64R - 32r \Rightarrow 30R = 32r.$

$R = \dfrac{32}{30} r = \dfrac{16}{15} r$

~~$BP \cdot AB = BD^2 - r^2$~~

Т. пиф. в $\triangle B O_1 D$

$(2R - r)^2 = BD^2 + r^2$

$4R^2 - 4Rr = \dfrac{289}{4} = 4 \cdot \dfrac{256}{225} r^2 - 4 \cdot \dfrac{16 \cdot r^2}{15} = 4 \cdot \dfrac{16}{15}\left(\dfrac{16}{15} - 1\right) r^2 =$

$= \dfrac{64r^2}{15^2} = \dfrac{289}{4} \Rightarrow \dfrac{8r}{15} = \dfrac{17}{2} \Rightarrow 16r = 255 \Rightarrow r = \dfrac{255}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow R = \dfrac{255}{15} = 17.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ли (проф-ел).

$\cos\alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{32}{34 \cdot 2} = \frac{16}{34} = \frac{8}{17} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{34^2 - 16^2}}{34} =$

$= \frac{\sqrt{18 \cdot 50}}{34} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$ $\cos(90+\alpha) =$

$= -\sin\alpha = -\frac{15}{17}$

$AC = 2R \cdot \sin\alpha = 30$

$AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{900 + \frac{225}{4}} = \sqrt{\frac{3825}{2}} = \sqrt{225 \cdot 4 + \frac{225}{4}} = 15 \cdot \frac{\sqrt{17}}{2}$

$180-90+\alpha$ $=90-\alpha$

$\sin\angle PEA = \sin(180^\circ - \angle O_1PE + \angle BO_1D) =$ $AD = 15\frac{\sqrt{17}}{2}$

$= \sin(90-\alpha) \cdot \cos(90+\alpha) + \sin(90+\alpha)\cos(90-\alpha) =$

$= \frac{8}{17} \cdot \frac{-8}{17} + \frac{15}{17} \cdot \frac{8}{17}$

$\cos\angle CDA = \frac{CD}{AD} = \frac{15 \cdot 2}{2 \cdot 15 \cdot \sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}} = \sin\angle FEA$

По т. sin в $\triangle FEA$ $\frac{AF}{\frac{1}{\sqrt{17}}} = 34$ $AF = 2\sqrt{17}$.

$\sin\angle AFE = \frac{AE}{2R} = \frac{AD+DE}{2R}$.

$C_6^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!}$

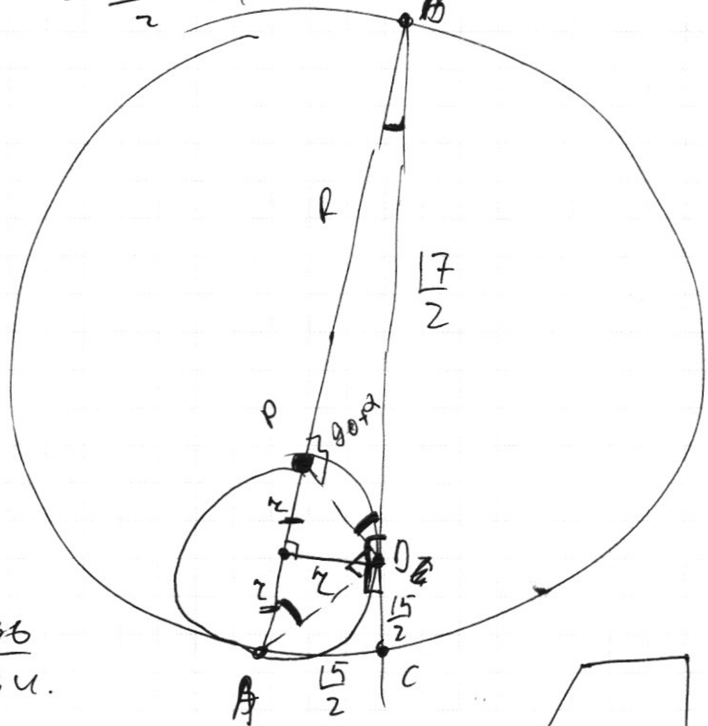
$= \frac{5 \cdot 6}{2} = 15.$

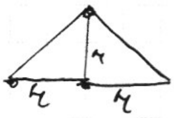
№4.

$90 - 2\alpha$

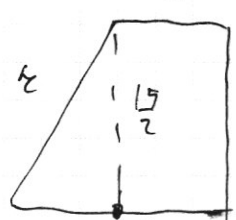
$r = \sqrt{Rr}$

1 0
2 0
3 0
4 0
5 1
6 0
7 1
8 0
9 0
10 1
11 2
12 0
13 3
14 1
15 1
16 0
17 4
18 0
19 4
20 1
21 1
22 2
23 5
24 0
25 2



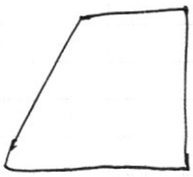


$(R+r)^2 + r^2 = \frac{17}{2}^2$



$\frac{15}{2}$

$\frac{-36}{-64}.$



$\frac{4-16}{1-5} =$

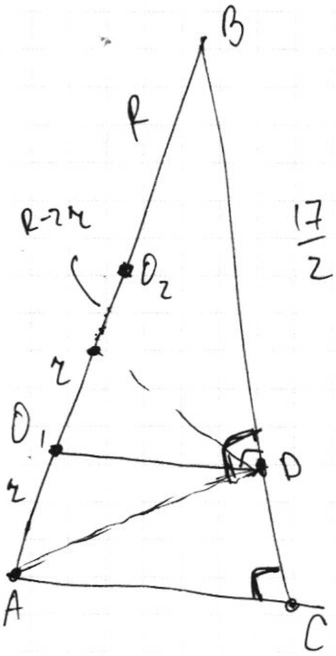
$= 3$

$-32 \cdot \frac{1}{16} +$

$+ \frac{36}{4} - 3 =$

$= -2 + 9 - 3 = 4$

$= 4.$



$f(12) =$

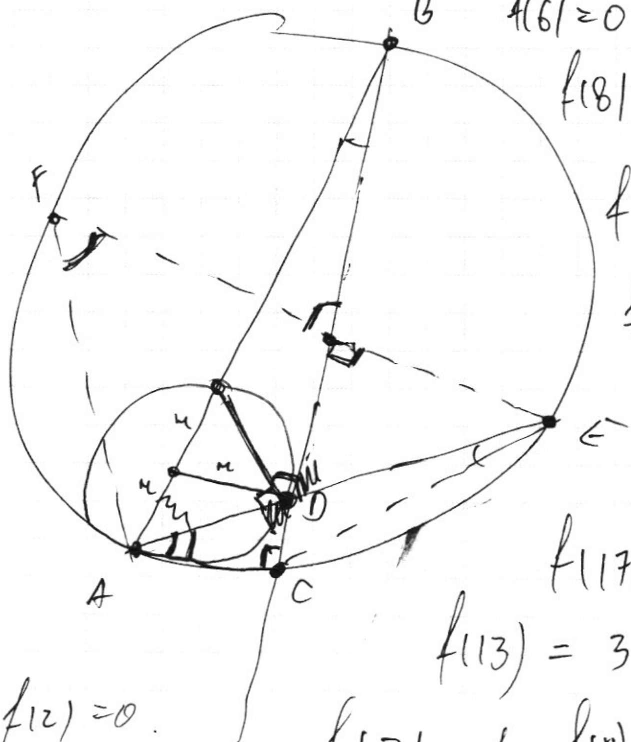
$f(7) =$

$f(6) = 0$

$f(8) = 0$

$f(10) = 1$

$f(11) =$



$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}). < 0.$

$f(x) - f(y) < 0.$

$f(x) < f(y).$

$f(17) = f(19) = 4.$

$f(13) = 3$

$f(2) = 0.$

$f(3) = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(7) = 1. \quad f(11) = 2$

$f(5) = 1. \quad f(23) = 5$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin^2 a + 2\cos a \sin a + \cos^2 a =$ $\log_9 x$ $9 = 7.$

$t\sqrt{1-t^2} = -\frac{2}{2\sqrt{5}}$ $\log_9 7 = 1$ 1 $5^x \ln 5 - 4^x \ln 4.$

$t^2(1-t^2) = \frac{4}{80}$ $f'\left(\frac{x}{y}\right) < 0.$ $x \geq 5^x - 4^x$

$x(1-x) = \frac{4}{5}$ x^a

$5x - 5x^2 = 4$

$80x^2 - 5x + 4 = 0$ $D = 25 - 4 \cdot 4 \cdot 5 =$ $x^{\log}$

$20x^2 - 20x + 1 = 0.$ $4^x\left(\left(\frac{5}{4}\right)^x - 1\right).$

$0 \leq a + b \leq 1.$

$a^2 + 36b - 17ab = ab$ $\log_3 \frac{5}{3}\, x^{\log_3 \frac{5}{9}} - \log_3 4\, x^{\log_3 \frac{4}{9}}$

$\frac{-12}{-4} \leq \frac{1}{4}a + b \leq 5$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0.$ $D = 169 - 144 = 25$

$3 \leq \frac{1}{4}a + b \leq 5$

$\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13\frac{a}{b} + 36 = 0$ $t = 3^{2k}$

$a^{\log_3 x}$ $\frac{13 \pm 5}{2} = 9;\ 4$ $\frac{a}{b} = 9$ $1 \geq \left(\frac{5}{3}\right)^k - \left(\frac{4}{3}\right)^k$

$a^{\log_3 t}$ $\frac{a}{b} = 4$ $\left(\frac{25}{9}\right)^k - \left(\frac{16}{9}\right)^k$

$t = 9$ $\ln\frac{25}{9}\left(\frac{25}{9}\right)^k -$

$\ln a \cdot b.$ $- \ln\left(\frac{16}{9}\right) \cdot \left(\frac{16}{9}\right)^k \geq 0.$

$\cdot\, a^{\log_3 t} - \frac{10}{3}$ $1 \geq t^{\log_3 5 - 1} - t^{\log_3 4 - 1} =$

$-$ $\left(\frac{5}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 =$ $= t^{\log_3 \frac{5}{3}} - t^{\log_3 \frac{4}{3}}.$

$= \frac{9}{9} = 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin a^{-\frac{1}{\sqrt5}}$; $\cos b^{\frac{1}{\sqrt5}}$

№1.

$\sin(\underbrace{2(\alpha+\beta)}_{=a}) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$tg\alpha = tg\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\sin(2(\alpha+2\beta)) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$tg(a-b) = \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)}$

$\sin(2(\alpha+\beta) + \underbrace{2\beta}_{=b}) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(a)\cdot\cos b + \cancel{\cos b \sin a}\ \sin b\cos a + \sin(a-b) = -\frac{2}{5}$

$\frac{2t}{1-t^2} = x$

$x^2 - 12x + 36 + 36y^2 - 36y + 9 = 90$

$\cancel{2xt = t\cdot 1}$

$(\underbrace{x-6}_{=a})^2 + (\underbrace{6y-3}_{3b})^2 = 90.$

$2t = x - t^2x.$

$a - 6b = 2y(x-6) - 1(x-6)$

$2x^2 - 1 = \frac{1}{\sqrt5}$

$a - 6b = \sqrt{ab}$

$2x^2 = \frac{1+\sqrt5}{\sqrt5}$

$10x - x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 4} \geq (10x-x^2)^{\log_3 5}$

$10x - x^2 = -(x^2 - 10x + 25) + 25 = -(x-5)^2 + 25$

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}}$

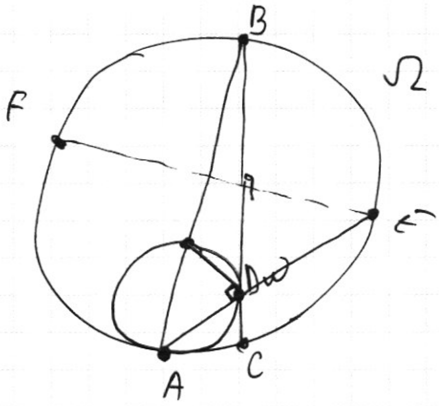
$\underbrace{tg 2\alpha}_{=x} = \frac{2tg^2\alpha}{1-tg^2\alpha}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$x = \frac{2t}{1-t^2}$

$x - t^2 x = 2t$

$x - 2t^2 x = 2t - t^2 x$

$x t^2 + 2t - x = 0.$

$D = 4 + 4x^2$

$2 \sin a \cos a = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2a = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin a \cos a = -\frac{1}{2\sqrt5}$

$-\frac{1}{\sqrt5} = 2x \sqrt{1-x^2}$

$\sin(2a+2b) + \sin(2a-2b) = -\frac{2}{5}$

$\frac{1}{5} = 4x^2(1-x^2)$

$2 \sin 2a \cos 2b = -\frac{2}{5}$

$\frac{1}{5} = 4t(1-t)$

$\cos 2b = \frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \frac{\sin(a-b)}{\cos(a-b)} =$

$1 = 20t - 20t^2$

$\frac{\sin a \cos b - \sin b \cos a}{\cos a \cos b + \sin a \sin b}$

$20t^2 - 20t + 1 = 0$

$\sqrt{320} = \sqrt{16 \cdot 20} = 8\sqrt5$

$t = \frac{20 \pm 8\sqrt5}{20}$

$27b^2 - 13ab = -90.$

$t = -20$

$27b^2 - 3ab - 10ab + 90 = 0$

$27\left(\frac{b}{a}\right)^2 - 3\frac{b}{a} - 10\frac{b}{a} + \frac{90}{a^2}$

$a^2 + 36b^2 - 12ab = ab$

$a^2 + 9b^2 = 90.$ $\quad a^2 = 90 - 9b^2$

$27b^2 - 13ab = -90.$

$27b^2 - 13ab + 90 = 0$

27

$3\frac{b}{a}\left(9\frac{b}{a} - 1\right)$

$27b^2 - 3ab - 10ab + 90 = 0$

$3b(9b - a) - 10$

$= \frac{4x-5}{4+20-16x} = \frac{4x-5}{16x-16}$ 16

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№6.

$\frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$ ↓

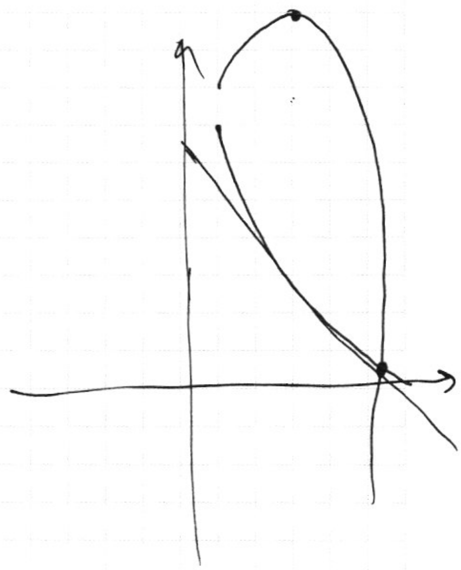
$[3;0]$

$-32x^2+36x-3$

$\frac{1}{4}$ г <1.

$\frac{36}{64} = \frac{9}{16}$

$-2+9-3$



$3 \le \frac{1}{4}a+b \le 4$

$0 \le a+b \le 1$.

$3-b \le \frac{1}{4}a \le 4-b$

$-3 \le \frac{3}{4}a \le -3$ $\quad \frac{3}{4}\cancel{a} =$

$0 \cancel{4}-b \le a \le 1-b$

$\cancel{-4 \le a \le}$

$3 \le \frac{5}{4}a \le 5$.

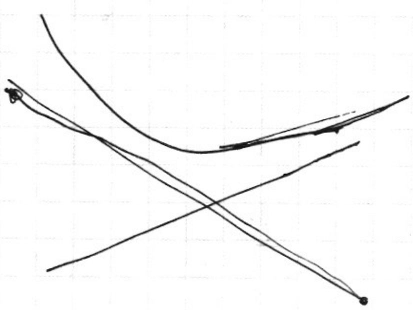
$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b$.

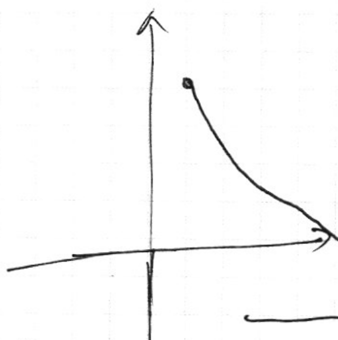
$12 \le 5a \le 20$

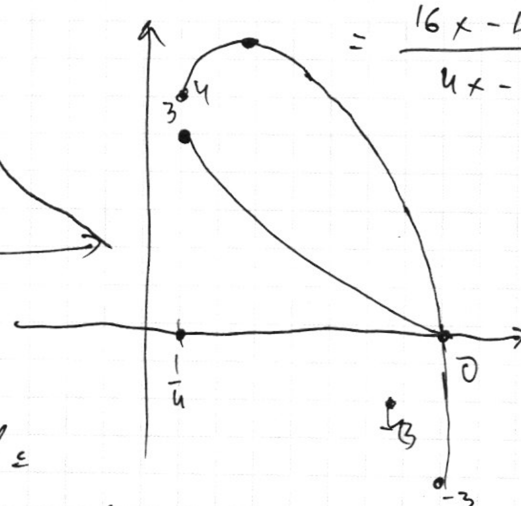
$\frac{12}{5} \le a \le 4$.

$-32x^2+36x-3. =$

$= \frac{16x-16}{4x-5}$







$a+b \ge 0$ $\quad a+b \le 1$

$\frac{1}{4}a+b \ge 3$. $\quad 3 \le \frac{1}{4}a+b \le$

$a+b \ge 0$

$\frac{1}{4}a+b \le 4$

$a+b \ge 3+\frac{1}{4}a$.

$a+b \le 4+\frac{3}{4}a. \ge 0$.

$0 \le 4+\frac{3}{4}a$ $\cancel{\text{a}}$.

$\frac{1}{4}a+b$

$0 \le 16+3a \quad a \le -\frac{16}{3}$.

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{16x-16}{4x-5} = -32x^2+36x-3.$

$16(x-1) = (4x-5)(-32x^2+36x-3).$

$16x-16 = -128x^3+144x^2-12x+160x^2-180x+15$

$-128x^3+304x^2-208x+31=0.$

$-32x^2+36x-3=$

$\pm \frac{2}{\sqrt5}$

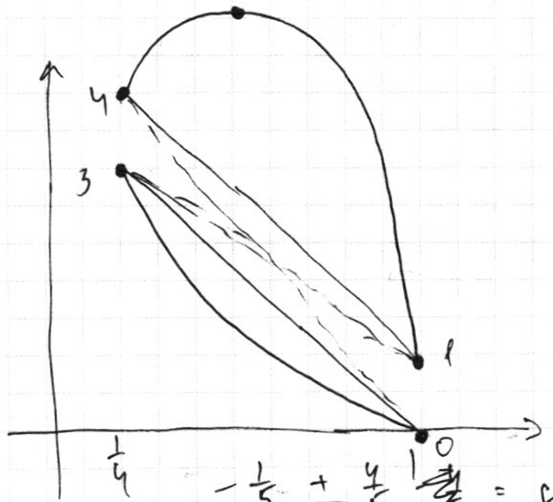
$-\frac{1}{\sqrt5} \cdot \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta +$

$+\sin 2\alpha$

$+\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}$



$-\frac15 \pm \frac45 \cancel{\frac{1}{5}} = \sin 2\alpha = -\frac25$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$-\frac15 \pm \frac{2}{\sqrt5}\left(\pm\frac{2}{\sqrt5}\right)+\sin 2\alpha = -\frac25$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \quad \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\cos(2\alpha)\cdot\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt5}} \pm \frac{2}{\cancel{\sqrt5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\cancel{\sqrt5}}$

$\sin 2\alpha =$

$\sin(2\alpha) \pm 2\cos(2\alpha) = -1$

$-1+\sin 2\alpha = -\frac25$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5} \pm \frac{2\cos 2\alpha}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac35 + \sin 2\alpha = -\frac25$

$\sin 2\alpha = -1$

☒ черновик ☐ чистовик

Страница № $\sin 2\alpha =$

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)