МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

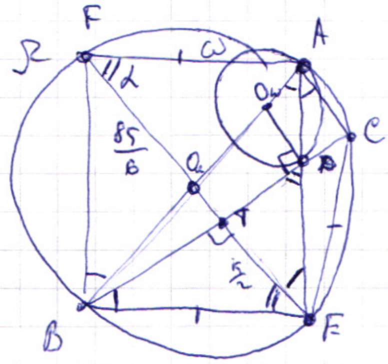
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4.



Найти: R_Ω; r_ω; $\angle AFE$ и S_{AFE}

Дано: $CD = 8$

$BD = 17$.

1) по лемме Архимеда:

AF - биссект. в $\angle BAC \Rightarrow$

$\Rightarrow BE = CE \Rightarrow$

EF - высота в равноб. $\triangle CEB \Rightarrow$

$\Rightarrow$ EF - сер. пер. к BC $\Rightarrow$ EF - диаметр в Ω. $\left(TB = \frac{8+17}{2} = \frac{25}{2}\right)$

2) EF и AB - диаметры $\Rightarrow$ AEBF - прямоугольник: $BE = AF$

3) $T = EF \cap BC$: $TB \cdot TC = TE \cdot TF = \deg_\Omega(T)$

$TB^2 = TE \cdot TF$

$BE = AF \Rightarrow \angle AEF = \angle CBE$ опир. на равн. дуги.

4) $\triangle TEB \sim \triangle AFE$ $(\angle T = \angle A = 90°, \angle B = \angle E) \Rightarrow \angle AFE = \angle TEB$

$\frac{AF}{FE} = \frac{TE}{BE}$; $AF \cdot BE = TE \cdot FE$ $(AF = BE)$ $BE^2 = TE \cdot FE$

$BT^2 + TE^2 = BE^2$ - т. Пиф. для $\triangle BTE$.

$BT^2 + TE^2 = TE \cdot FE$

$TE \cdot TF + TE^2 = TE \cdot FE$; ~~$TF + TE = FE$~~.

$\frac{TB}{BE}$ $\frac{TE}{BE} = \frac{AF}{FE}$; $2RX = BE^2$.

$FT \cdot TE = BT^2$

5) ET - высота в прямоуг. $\triangle BED$: $\angle E = 90°$

$ET = \sqrt{BT \cdot TD}$

$ET = \sqrt{\frac{25}{2} \cdot \left(17 - \frac{25}{2}\right)} = \sqrt{\frac{25 \cdot (34-25)}{4}} = \frac{5 \cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$

6) $FT \cdot TE = BT^2$

$FT = \left(\frac{25}{2}\right)^2 \cdot \frac{2}{15} = \frac{5^2 \cdot 5^2 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 15} = \frac{5^3}{6}$; $FT + TE = 2R$; $R = \frac{\frac{125}{6} + \frac{15}{2}}{2} = \frac{125+45}{12} = \frac{170}{12} = \frac{85}{6} =$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1

(Нумеровать только чистовики)

O_ω - центр O_ω $\Rightarrow O_\omega D \perp BC$ ($O_\omega D$ - радиус, DC - касат.)

$\Rightarrow \triangle BO_\Omega T \sim \triangle BO_\omega D$: $\angle B$ - общ., $\angle T = \angle D = 90°$

$\frac{O_\Omega T}{O_\omega D} = \frac{BT}{BD}$; $r = \frac{O_\Omega T \cdot BD}{BT} = \frac{(R - ET) \cdot 17 \cdot 2}{25} =$

$= \left(\frac{85}{6} - \frac{15}{2}\right) \cdot \frac{17 \cdot 2}{25} = \cancel{\frac{(85-30) \cdot 17 \cdot 2}{6 \cdot 25}}$.

$= \frac{(85 - 45)}{6} \cdot \frac{17 \cdot 2}{25} = \frac{40 \cdot 17 \cdot 2}{6 \cdot 25} = \cancel{\frac{55 \cdot 17 \cdot 2}{60 \cdot 25}}$

$r = \frac{8 \cdot 17}{15} = \frac{136}{15}$

$\text{tg} \angle AFE = \frac{TB}{TE} = \frac{25 \cdot 2}{2 \cdot 15} = \frac{5}{3}$.

$\triangle AEF$ - прямоуг.: $S_{AFE} = \frac{AE \cdot AF}{2}$

$EB = \sqrt{ET^2 + BT^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2} =$

$= \frac{5}{2}\sqrt{9 + 25} = \frac{5}{2}\sqrt{34}$.

$\frac{S_{AFE}}{S_{BTE}} = \left(\frac{FE}{BE}\right)^2$; $S_{AFE} = \frac{BT \cdot TE}{2} \cdot \left(\frac{FE}{BE}\right)^2 =$

$= \frac{\frac{25}{2} \cdot \frac{15}{2}}{2} \cdot \left(\frac{85 \cdot 2}{3 \cdot \sqrt{34} \cdot 5}\right)^2 =$

$= \frac{25 \cdot 15}{8} \cdot \frac{17^2 \cdot 2^2}{9 \cdot 34} = \frac{5^3 \cdot 17}{3 \cdot 4} = \frac{125 \cdot 17}{12}$

Ответ: $R = \frac{85}{6}$; $r = \frac{136}{15}$; $\angle AFE = \text{arctg}\left(\frac{5}{3}\right)$

$S_{AFE} = \frac{125 \cdot 17}{12}$.

N 3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x$.

ОДЗ: $\log_{12}(x^2 + 18x)$: $x^2 + 18x > 0$

$(x^2 + 18x)^{\log_{12} 5} + x^2 + 18x - (x^2 + 18)^{\log_{12} 13} \geq 0$. $x^2 + 18x = t$

$t^{\log_{12} 5} + t - t^{\log_{12} 13} \geq 0$; $1^{\log_{12} 5} + 1 - 1^{\log_{12} 13} \geq 0$

$1 \geq 0$; $f'(t) = \log_{12} 5 \, t^{\log_{12} 5 - 1} - \log_{12} 13 \, t^{\log_{12} 13 - 1} + 1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$1 + \log_{12} 5 \, t^{\log_{12} 5 - 1} = \log_{12} 13 \, t^{\log_{12} 13 - 1}$ | $t > 0$

$\frac{\log_{12} 5}{\log_{12} 13} = t^{\log_{12} 13 - 1 - \log_{12} 5 + 1}$ $\qquad 1 + \log_{12} 5 \, t^{\log_{12} \frac{5}{12}} - \log_{12} 13 \, t^{\log_{12} \frac{13}{12}}$

$f''(t) =$

$\log_{13} 5 = t^{\log_{12} \frac{13}{5}}$. $\quad \cancel{0 < t^{\log_{12}\frac{13}{5}} < 1}$ $\quad 0 < \log_{13} 5 < 1$

$0 < \log_{12} \frac{13}{5} < 1$ | $\Rightarrow 0 < t_0 < 1$

$t_0 = (\log_{13} 5)^{\frac{1}{\log_{12} \frac{13}{5}}}$ $\quad 0 < \log_{\frac{13}{5}} 12$

$t_0 = \log_{13} 5^{\log_{\frac{13}{5}} 12}$ $\quad (0 < \log_{13} 5 < 1 \Rightarrow 0 < t_0 < 1)$

$+ \quad -$

$0 \nearrow t_0 \searrow$

~~$\Rightarrow$ при $t \in (0; t_0)$ $f(t)$ - возрастан~~
~~$t \in (t_0; +\infty)$ $f(t)$ - убыв~~

$f'(1) = \log_{12} 5 - \log_{12} 13 = \log_{12} \frac{5}{13} < 0$

$x^2 + 18x > 0 \qquad x(x+18) > 0$

ОДЗ: $x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$.

$t^{\log_{12} 5} + t - t^{\log_{12} 13} = 0$ имеет два корня

$f(1) = 1 \quad f(12) = 5 + 12 - 13 = 4$

$f(24) = 5^2 + 24 - 13^2 = 25 + 24 - 169$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N7.

0) Пусть сфера на котор. лежат A, K, L, M, N, O - Ω

1) AONK - сеч. плоскостью сферы и Ω

$\Rightarrow$ AONK - впис

ON ∥ AB и AO ∥ KN - как ср. линии

$AB = 1$ $BD = 2$ $CD = 3$

$\Rightarrow$ впис. парал-м - прямоугольник

$\Rightarrow \angle BAC = 90$.

2) $BK \cdot BA$ - ст. точки B отн. сферы

$BK \cdot BA = BL \cdot x$: $\frac{1}{2} = 1 \cdot x \Rightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow T \in BD$ и $BT = \frac{1}{2} \Rightarrow T \in \Omega$.

$DL \cdot DT$ - ст. точки D отн Ω.

$DL \cdot DT = DM \cdot y \Rightarrow 1 \cdot \frac{3}{2} = \frac{3}{2} \cdot y \Rightarrow y = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow P$: $P \in DC$ и $DP = 1$ - $P \in \Omega$.

$CM \cdot CP = CO \cdot CA$ - ст. т. C отн Ω

$\frac{3}{2} \cdot 2 = \frac{CA^2}{2}$; $CA = \sqrt{6}$.

3) по т. Пифагора для $\triangle ABC$ ($\angle A = 90°$): $\sqrt{AB^2 + AC^2} = BC$

$BC = \sqrt{1+6} = \sqrt{7}$.

4) KOML - это сечение плоскостью сферы и KOML - впис

KL ∥ AD ∥ OM и KO ∥ LP ∥ BC $\Rightarrow$ KLMO - парал.-м $\Rightarrow$ прямоуг

$KO \perp KL \Rightarrow AD \perp BC \Rightarrow$

5) центр Ω спроец на (ABC) в т. $X = OK \cap AN$ - центр прямоуг

$\Rightarrow r \geq KX = \frac{\sqrt{7}}{2}$.

Ответ: $BC = \sqrt{7}$; ~~to~~ ~~KX~~ $r \geq \frac{\sqrt{7}}{2}$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

N5. Дано: $\forall a, b: f(ab) = f(a) + f(b)$

$\forall p$ - простое: $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

Найдем: $f(i)$ где $i \in N$ и $i \in [1; 24]$.

$f(1) = f(1) + f(1)$; $f(1) = 0$; $f(2) = 0$; $f(3) = 0$; $f(4) = f(2) + f(2) \overset{=0}{}$

$f(5) = 1$ $f(6) = f(2) + f(3) = 0$; $f(7) = 1$; $f(8) = 0$; $f(9) = 0$

$f(10) = 1$; $f(11) = 2$; $f(12) = 0$; $f(13) = 3$; $f(14) = 1$; $f(15) = 1$

$f(16) = 0$; $f(17) = 4$; $f(18) = 0$; $f(19) = 4$ $f(20) = 1$

$f(21) = 1$; $f(22) = 2$; $f(23) = 4$ $f(24) = 0$.

значений 0 - 11 раз; 1 - 7 раз; 2 - 2 раза

3 - 1 раз 4 - 3 раза

$\forall a$: $\cancel{f\left(\frac{1}{a}\right)}$ $f(a) = f(a^2) + f\left(\frac{1}{a}\right) = f(a) + f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a) \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0 \Leftrightarrow x, y \in [1; 24] \Rightarrow$

$\Rightarrow f(x) \{0, 1, 2, 3\}$ $f\left(\frac{1}{y}\right) = \{0; -1; -2; -3; -4\}$

что бы $f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$, то $f(x) < f(y)$.

$\Rightarrow f(x) = 0$ - 11 вар то $-4 \leq f(y) \leq -1 \Rightarrow f(y)$ - 13 вар $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ возм. пар: $11 \cdot 13 = 143$

$f(x) = 1$ - 7 вар то $-4 \leq f(y) \leq -2 \Rightarrow$ для y - 6 вар $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ всего пар $7 \cdot 6 = 42$

$f(x) = 2$ - 2 вар, то $-4 \leq f(y) \leq -3 \Rightarrow y$ - 4 вар $\Rightarrow$ пар: $2 \cdot 4 = 8$

$f(x) = 3$ - 1 вар $f(y) \leq -4 \Rightarrow y$ - 3 вар $\Rightarrow$ пар: 3

всего пар: $143 + 42 + 8 + 3 = 194$

Ответ: 194.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N1

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cos(2\alpha)=\cancel{-\frac{4}{5}}-\frac{1}{\sqrt5}$$

~~sin2α~~ ① $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos2\beta+\sin(2\beta)(1-2\sin^2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

$$\sin2\alpha\cdot\cos4\beta+\sin4\beta\cos2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{4}{5}.$$

② $2\sin\alpha\cos\alpha\cos4\beta+\sin4\beta(1-2\sin^2\alpha)+2\sin\alpha\cos\alpha=-\frac{4}{5}.$

$2\sin\alpha\cos\alpha(\cancel{\ldots}\ 2\cos^2 2\beta-1)+$

~~sin2α co~~ $\begin{cases}\sin2\alpha(2\cos^2 2\beta-1)+2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}.\\ \sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}\end{cases}$

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha\sqrt{(\cos^2\beta-\sin^2\beta)}$

$$\sin^2(2\alpha+2\beta)=\frac{1}{5}$$

$$\cos^2(2\alpha+2\beta)=\frac{4}{5}=-\sin2\alpha\cos4\beta-\sin4\beta\cos2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{4}{5}$$

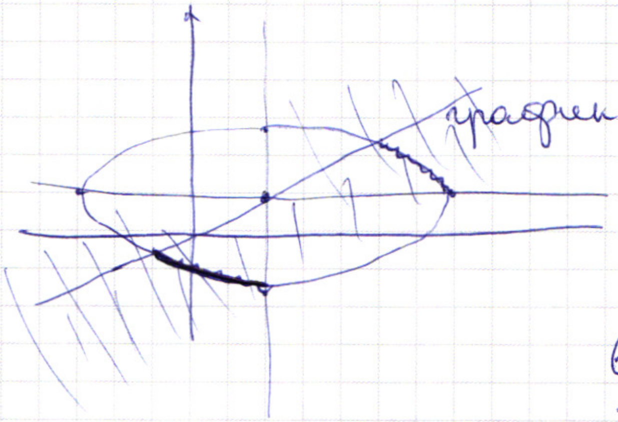
$(1-2\sin^2(\alpha+\beta))^2=$

N2. $\begin{cases}x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}\\ x^2+9y^2-4x-18y=12\end{cases}$ $\begin{cases}x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)};\quad x-2+2-2y=x-2+2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)}\\ (x-2)^2-4+(3y-3)^2-9=12\end{cases}$

$\begin{cases}x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \Rightarrow x-2y\geq0 \text{ и } (x-2)(y-1)\geq0\\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \text{ - ур-ие эллипса с центром в т. } (2;1)\end{cases}$

ОДЗ: $(x-2)(y-1)\geq0\quad x\geq2y,\ \frac{x}{2}\geq y$

$x-2-\sqrt{(x-2)(y-1)}+2(y-1)=0;\ \sqrt{}$



решения
принадлежат
выделенным участкам
графика второго ур-ия

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

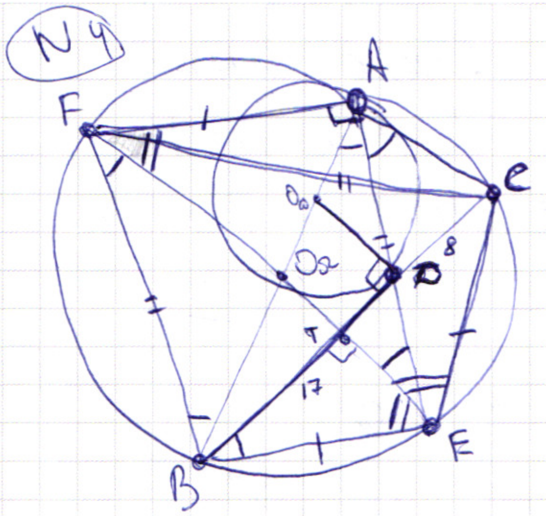
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 4



$CD = 8 \quad BD = 17$

$ET = x \quad EF = 2R - x$ (R - рад. Ω)

$BT = TC = \frac{8+17}{2} = 12,5$

$BT^2 = FT \cdot ET$

$\frac{BT}{BE} = \frac{AE}{FE}$

$\frac{TE}{BE} = \frac{AF}{FE}$; $AF = BE$

$TE \cdot FE = BE^2 = BT^2 + TE^2$

$$\begin{cases} BT^2 = FT \cdot ET \\ TE \cdot FE = BT^2 + TE^2 \\ \cancel{TE} \cdot FE = FT \cdot \cancel{ET} + \cancel{ET} \end{cases}$$

$FE = FT + 1$

$FE - FT = TE = 1$; $FT \cdot TE = TB^2 \quad FT = \left(\frac{25}{2}\right)^2$

$FE = 2R = \left(\frac{25}{2}\right)^2 + 1$

$R = \frac{625+4}{4}$; $R_\Omega = \frac{629}{4}$

$\triangle BTO_\Omega \sim \triangle BDO_\omega$: $\frac{BT}{BD} = \frac{TO_\Omega}{TO_\omega}$; $TO_\omega = r_\omega$

$TO_\Omega = R - TE$

N 5.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ где p - прост. число

$1 \le x \le 24 \quad 1 \le y \le 24 \quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0.$ $\quad f(2) = f(1) + f(2)$

$f(2) = \left[\frac{p}{4}\right] = 0.$

$f(-p) = f(-1) + f(p) = f(-1)$;

$f(0) = f(0) + f(0) \Rightarrow \underline{f(0) = 0}$; $f(p) = f(1) + f(p) \Rightarrow \underline{f(1) = 0}$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$f(0)=0$ $f(1)=0$ $f(2)=0$ $f(3)=0$ $f(4)=0$ $f(5)=1$

№5

$f(x)+f(\frac{1}{y})$

$f(p^2)=2f(p)=2\cdot[\frac{p}{4}]$

$f(6)=0$; $f(7)=1$; $f(8)=0$
$f(9)=0$. $f(10)=1$ $f(11)=2$
$f(12)=0$ $f(13)=3$ $f(14)=1$
$f(15)=1$ $f(16)=0$ $f(17)=4$
$f(18)=0$ $f(19)=4$ $f(20)=1$
$f(21)=1$ $f(22)=2$ $f(23)=4$
$f(24)=0$

$f(-1)$

$f(6)=f(12)+f(\frac{1}{2})$

$0 \quad 0 \quad 0$

$f(\frac{1}{2})=0$

$f(\frac{1}{3})=0$

$f(\frac{1}{4})=0.$

$11-$ н 0^4

$7-$ н 1^4 $1-$ н 3^4

$2-$ н 2^4 $3-$ н 4^4

~~$f(\frac{1}{5})=f(25)+f$~~

$f(5)=f(\frac{1}{5})+f(25)=f(\frac{1}{5})+f(5)+f(5)$

$f(\frac{1}{5})=-f(5)=-1$

~~$f(k^2)=$~~ $f(k)=f(k^2)+f(\frac{1}{k})=f(k)+f(k)+f(\frac{1}{k})$

$f(k)=-f(\frac{1}{k})$.

$f(x)+f(\frac{1}{y})<0$

н0^4	11	13
н1^4	7	6
	2	4
	1	3

$\boxed{11\cdot13+7\cdot6+2\cdot4+3}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\alpha, \beta \quad \cos\alpha \neq 0$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$tg\alpha - ?$

$\alpha \neq \pi k$

ииии. 3 знач

$\sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cos 2\alpha =$

$=$

$2\sin(\alpha+\beta)(\cos\alpha+\beta)$

$2\,\cancel{\sin\alpha\cos\beta}$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(1-2\sin^2\beta)$

$+ 2\sin\beta\cos\beta\,(1-2\sin^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5}.$

$\sin\alpha\cos\alpha - 2\sin^2\beta\sin\alpha\cos\alpha + \sin\beta\cos\beta - 2\sin^2\alpha\,\sin\beta\cos\beta = -\frac{1}{2\sqrt5}$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \\ \sin 2\alpha\cos\beta 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \end{cases}$$

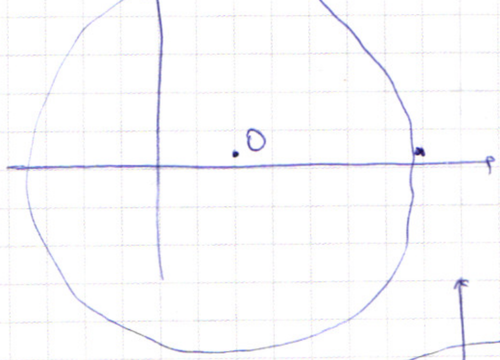
$\cos 2\alpha\,(\,tg 2\alpha\cos 4\beta + \sin 4\beta + tg 2\alpha) = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\alpha\,(\,tg 2\alpha\cos 2\beta + \sin(\beta\cdot 2)) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12 \end{cases}$$

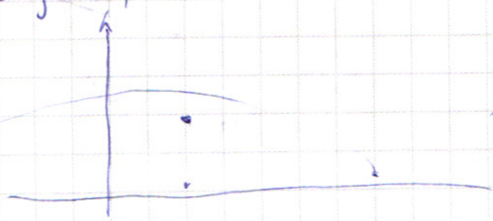
$(x-2)^2 - 4 + (3y-3)^2 - 9 = 12$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25$



$3y = 8$

$y = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3}$



$\frac{8}{3} + \frac{5}{3} =$

$x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}$

$x - 2y = \sqrt{x(y-1) - 2(y-1)}$

$x - 2y = \sqrt{(y-1)(x-2)}$

$\begin{cases} (x-2y)^2 = (y-1)(x-2) \\ x - 2y \geq 0 \end{cases}$; $x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$\begin{cases} (x-2y)^2 = (y-1)(x-2) \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25. \end{cases}$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x$.

$a^{\log_c b}$

$t = x^2 + 18x > 0$

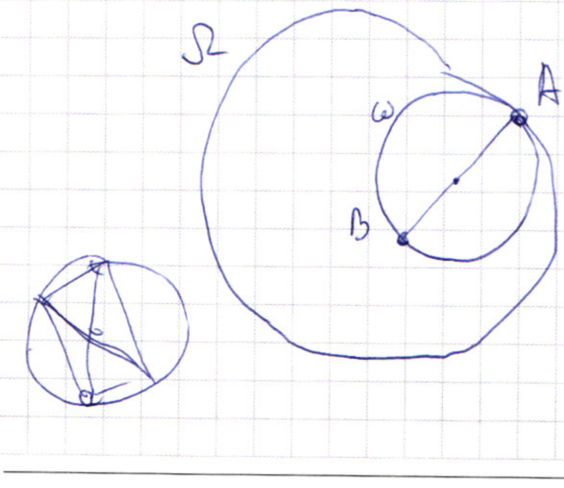
$(x^2+18x)^{\log_{12} 5} + x^2 + 18x - |x^2+18x|^{\log_{12} 13} \geq 0$

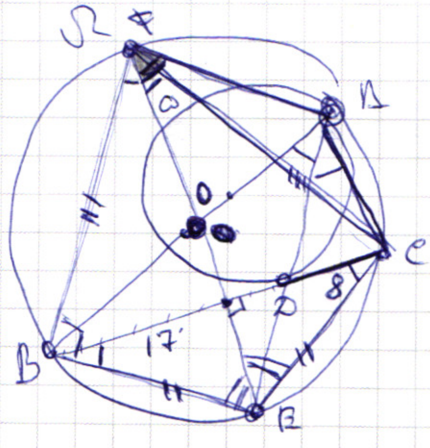
$t^{\log_{12} 5} + t - t^{\log_{12} 13} \geq 0.$

$0 \geq t^{\log_{12} 13} - t^{\log_{12} 5} - t = t^{\log_{12} 5}\left(t^{\log_{12} \frac{13}{5}} - 1\right) - t.$

$\log_{12} 5 = k$

$\log_{12} 13 =$





r; R

AFE - ?

S_{AFE} - ?

$CD = 8$

$BD = 17$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6. $3+\frac{1}{8} < \frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$

для всех $-\frac{11}{4} \leq x < -\frac{3}{4}$.

$3 - \frac{1}{4x+3} \leq ax+b$

$ax+b+\frac{1}{4x+3}-3 \geq 0.$

$\frac{12x+11}{4x+3} = 3 - \frac{1}{4x+3}$

$-\frac{11}{4} < x < -\frac{3}{4}$

$3 < 3 - \frac{1}{4x+3} < 3$

$-8 \leq 4x+3 < 0$

$\frac{1}{4x+3} < 0$

$3 - \frac{1}{4x+3}$

$\frac{1}{-8}$ $\frac{1}{-7}$

$3 - \frac{1}{4x+3} > 3 - \frac{1}{-11+3}$

$3+\frac{1}{8}$

$x > 3+\frac{1}{8}$

$\frac{\log_a a}{\log_a a}$ $\frac{\log_a b}{\log_a a}$

$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

$8x^2-30x-17 =$

-8

$\frac{30 \pm \sqrt{900+4\cdot 8\cdot 17}}{-16} = 30 \pm 2\sqrt{9\cdot 25 = \cancel{4\cdot 218}}$ $8\cdot 17$

$\times \begin{array}{r} 25 \\ 9 \\ \hline 225 \\ -136 \\ \hline 89 \end{array}$

136

$x_0 = \frac{30}{-16} = \frac{15}{-8}$

$\frac{-30 \pm \sqrt{900-4\cdot 8\cdot 17}}{16} =$

$= \frac{-30 \pm 2\sqrt{89}}{16} = -30$ $\frac{-15 \pm \sqrt{89}}{8}$

$-(8x^2+30x+17) =$

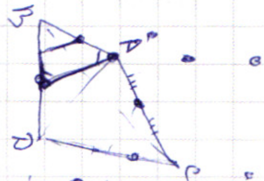
$= 4x^2+16x+16+4x^2+4x+1$

$\frac{x}{28}$

$\log_5 =$

$x(28-x) = \left(\frac{25}{2}\right)^2$

$\sin^2(2\alpha+2\beta) = \frac{1}{\cancel{\sqrt{3}}} \quad \frac{1}{5}$



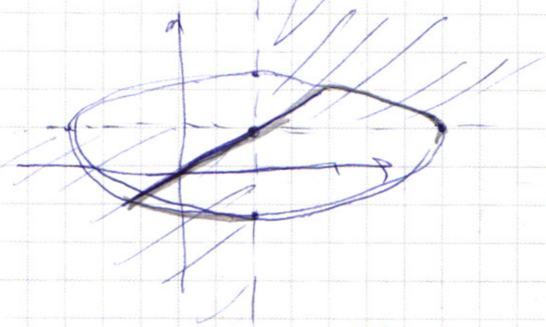
$-\cos^2(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha$

$(x-2y)^2 = ($

$x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2$

$x^2 - 5xy + 4y^2 + x + 2y - 2 = 0$

$(x-2y)^2 = (x-2)(y-1)$

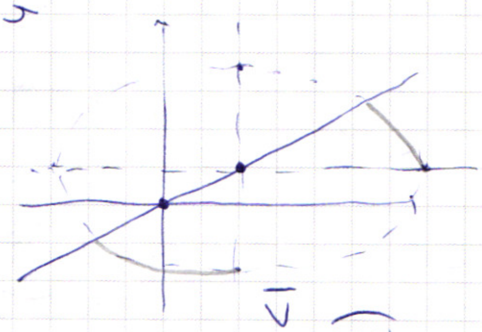


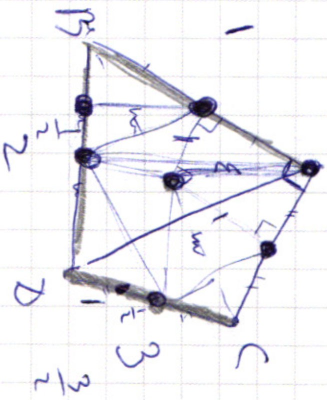
$x - 2y \geq 0.$

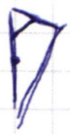
$(x-2)(y-1) \geq 0$

$\frac{x}{2} \geq y$

$y \leq \frac{x}{2}$







$\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$(x-2y)^2 = (x-2)(y-1)$

$(x-2y)^2 = (x-2)(y-1) = t$

$(x-2)(y-1) = t.$

$y - 1 = \frac{t}{x-2}$

$y = \frac{t}{x-2} + 1$

$t = (x-2y)^2$

$\sqrt{t} = x - 2y$

$y = \frac{x - \sqrt{t}}{2}$

$t = 12; \quad 5 + 12 - 13 \geq 0$

$y \geq 0$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x - |x^2+18x|^{\log_{12}13} \geq 0$

$5^{\log_{12}t} + t - t^{\log_{12}13} \geq 0$

$\boxed{t \geq t^{\log_{12}13} - t^{\log_{12}5}}$

$1 \geq t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - t^{\log_{12}\frac{5}{12}}$

$\log_{13} 5 < 1$

$\log_{12}\left(\frac{5}{12}\right)$

$\log_{12} 13 > 1$

$\log_{12} 5 < 1$

$\log_{12}\frac{13}{12} = k \log_{12}\frac{5}{12}$

$\log_{12} 13 = k \log_{12} 5$

$\log_5 13 = k$

$t \geq$

$x^2 + 18x$

$x(x+18)$

$(x-2)^2 + 6(x-2)(y-1) + 9(y-1)^2 = 25 - 6(x-2)(y-1)$

$(x-2+3y-1)^2 = 25 - (x-2y)^2$