МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

+- 1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

· 2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

+- 3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

· 4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

• 5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №1.

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha\cdot(2\cos^2 2\beta-\cancel{1})+\cos 2\alpha\cdot 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\ \cancel{+\sin 2\alpha}=-\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha)=-\frac{1}{17}$

$\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{17}$

$\Downarrow$

$\cos 2\beta=-\frac{1}{17}\cdot\frac{\sqrt{17}}{-1}=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}}+\cos 2\alpha\cdot\left(\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\right)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\pm 4\cos 2\alpha=-1$

I. $\sin 2\alpha-4\cos 2\alpha=-1$ $\qquad\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$

$(-1+4\cos 2\alpha)^2+\cos^2 2\alpha=1$

$16\cos^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha-8\cos 2\alpha+\cancel{1}=\cancel{1}$

$\cos 2\alpha(17\cos 2\alpha-8)=0$

~~I. $\cos 2\alpha$ ...~~

I. $\cos 2\alpha=\frac{8}{17}$. $\qquad$ II. $\cos 2\alpha=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\alpha=\frac{\pi}{4}\\ \alpha=\frac{3\pi}{4}\\ \alpha=\frac{5\pi}{4}\\ \alpha=\frac{7\pi}{4}\end{array}\right.$

$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=\cos 2\alpha$

$\cos\alpha=\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$

$\operatorname{tg}\alpha=\pm 1$

I. $\cos\alpha=\pm\sqrt{\frac{25}{17\cdot 2}}=\frac{\pm 5}{\sqrt{34}}$

$\sin\alpha=\pm\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{34}}$ $\qquad\operatorname{tg}\alpha=\pm\frac{\sqrt{11}}{5}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

II. $\sin 2t + 4\cos 2t = -1$ $\qquad$ $\sin^2 2t + \cos^2 2t = 1$

$$\cancel{1} + 16\cos^2 2t + 8\cos 2t + \cos^2 2t = \cancel{1}$$

$$\cos 2t\,(17\cos 2t + 8) = 0$$

$$\cos 2t = \frac{-8}{17}$$

$$\cos t = \sqrt{\frac{1+\cos 2t}{2}}$$

$$\cos t = \pm\sqrt{\frac{11}{17\cdot 2}} = \pm\sqrt{\frac{11}{34}}$$

$$\sin t = \pm\frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \operatorname{tg} t = \pm\frac{5}{\sqrt{11}}$$

Ответ: $\operatorname{tg} t = \left\{-\frac{\sqrt{11}}{5}; -\frac{5}{\sqrt{11}}; -1; 1; \frac{5}{\sqrt{11}}; \frac{\sqrt{11}}{5}\right\}$.

Задача №2. $\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} & (1) \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 & (2) \end{cases}$

(2) $9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

Сделаем замену $\quad g = x - 1 \quad t = y - 6$

$$9g^2 + t^2 = 90$$

Тогда (1) $\quad t - 6g = \sqrt{gt}$

$$t^2 + 36g^2 - 12gt = gt$$

$$t^2 - 13gt + 36g^2 = 0$$

Решим относ. t

$$t = \frac{13g \pm \sqrt{169g^2 - 144g^2}}{2} = \frac{13g \pm \sqrt{25g^2}}{2} = \frac{13g \pm 5g}{2}$$

$t_1 = 4g$

$t_2 = 9g$

$9g^2 + 81g^2 = 90 \Rightarrow g^2 = 1 \Rightarrow$ I. $g = 1 \Rightarrow x = 2$; $t = 9 \Rightarrow y = 15$

$g = -1 \Rightarrow x = 0$; $t = -9 \Rightarrow y = -3$

$9g^2 + 16g^2 = 90 \Rightarrow g^2 = \frac{18}{5}$ $\qquad$ $t = 4g$

I. $g = 3\cdot\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow x = 1 + 3\sqrt{\frac{2}{5}}$; $t = 12\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow y = 12\sqrt{\frac{2}{5}} + 6$

$g = -3\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow$ $x = 1 - 3\sqrt{\frac{2}{5}}$; $t = -12\sqrt{\frac{2}{5}} \Rightarrow y = 6 - \sqrt{\frac{2}{5}}\cdot 12$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ:

$x=2,\ y=15;\quad x=0,\ y=-3;\quad x=1+3\sqrt{\frac{2}{5}},\ y=6\cdot\left(1+2\sqrt{\frac{2}{5}}\right);$

$x=1-3\sqrt{\frac{2}{5}},\ y=6\left(1-2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$. Всего 4 решения.

Задача №3.

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x-x^2>0$, т.к. ~~…~~ иначе log не определён.

$\Downarrow$

$26>x>0$

Сделаем замену $26x-x^2$ на t, тогда у нас

$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$

Пусть $5^{\lambda}=t$, тогда

$(5^{\lambda})^{\log_5 12}+5^{\lambda} \geq 13^{\lambda}$

$12^{\lambda}+5^{\lambda} \geq 13^{\lambda}$, заметим, что $f(x)=12^x+5^x-13^x$ при ~~$x\uparrow$~~ $x\uparrow$ ~~$x\geq 0$~~ ~~…~~ убывает ~~возрастает~~, => найдём x, при котором $f(x)=0$, тогда для всех x больше этого нер-во ~~верно~~ не выполняется, при $x=2$, у нас $12^2+5^2=13^2$

Значит, для ~~x~~ $\lambda\leq 2$ нер-во верно, тогда ~~для~~

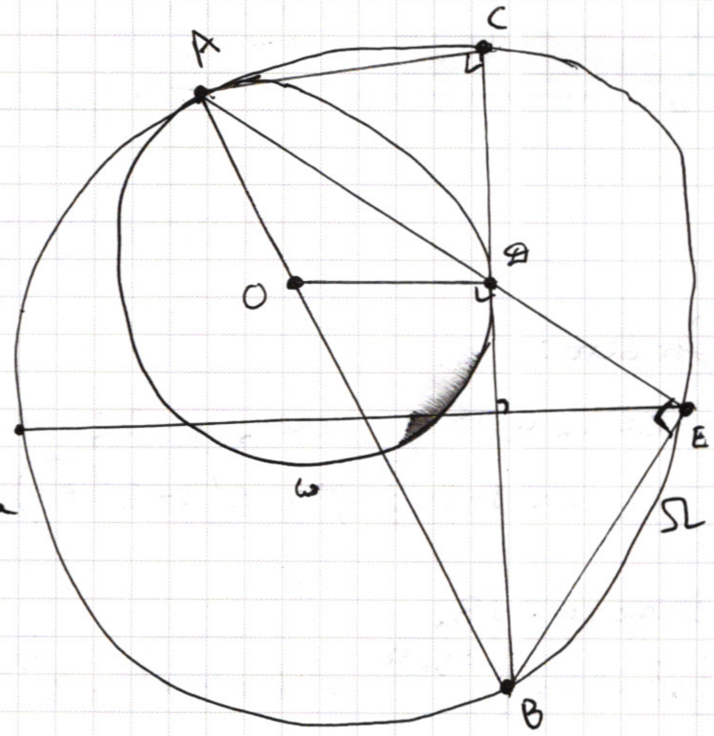
у нас $26x-x^2\leq 25$ ~~=> при каких~~

$x^2+25-26x \geq 0 \Rightarrow (x-25)(x-1)\geq 0$

Ответ: $x\in(0;1];[25;26)$.

Задача №4.

Начертим рисунок



Поскольку BC-касательная, то, отметив т. O центр ω верно, что $\angle ODB = 90^\circ$, также $\angle ACB = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр.

$\cancel{\frac{AD}{OB}}\cdot \frac{AO}{AB} = \frac{CD}{CB} = \frac{12}{25}$

r- радиус ω ; R- радиус Ω

$\frac{r}{2R} = \frac{12}{25} \Rightarrow 25r = 24R \Rightarrow \boxed{r = \frac{24}{25}R}$

А ~~в Ω~~ $\angle AEB = 90^\circ$ также, т.к. опирается на диаметр.

$\Delta ACD \sim \Delta BED \Rightarrow \cancel{\frac{BD}{DC} = \frac{DE}{AD}}\ \frac{BD}{AD} = \frac{DE}{DC}$, а также ~~DE AA~~

$DE \cdot AD = DB \cdot DC$, т.к. степень точки D записали.

$\frac{BD}{DC} = \frac{2R-r}{r} = \frac{2R - \frac{24}{25}R}{\frac{24}{25}R} = \frac{26}{24} = \frac{13}{12}$ ....

$\cancel{\frac{AD}{DE} = \frac{12}{}}$ Обозначим DE за x, ~~тогда~~ а AD за y

$\frac{y}{13} = \frac{12}{x} \Rightarrow xy = 12\cdot 13$, ~~при этом $xy = 12\cdot13$, значит~~

~~$BE^2 = 169 - x^2$, тогда $AB^2 = 169 - x^2 + \left(x + \frac{12\cdot 13}{x}\right)^2 =$~~

~~$= 169 - x^2 + \left(\frac{x^2 + 12\cdot 13}{x}\right)^2 = 169 - x^2 + x^2 + 2x\cdot 12\cdot 13 +$~~

$AC^2 = y^2 - 144 \Rightarrow AB^2 = y^2 - 144 + 625 = y^2 + 481$

$\frac{AD}{DE} = \frac{2r}{2R-2r} = \cancel{2r} = \frac{\frac{48}{25}R}{2R - \frac{48}{25}R} = \frac{\frac{48R}{25}}{\frac{2R}{25}} = 24 \Rightarrow 12\cdot 13 = 24x\cdot x$

$AD = 24\cdot\sqrt{\frac{13}{2}}$, получается, что тогда $x = \sqrt{\frac{13}{2}}$, тогда

$AC^2 = 481 + 24^2\cdot\frac{13}{2} = 481 + 12\cdot 13\cdot 24 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{481 + 12\cdot 13\cdot 24}}{2}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Ответ: $R = \dfrac{\sqrt{481 + 12 \cdot 13 \cdot 24}}{2}$; $r = \dfrac{12 \cdot \sqrt{481 + 12 \cdot 13 \cdot 24}}{25}$;

$\angle AEF = \arcsin \dfrac{12}{24 \cdot \frac{\sqrt{13}}{2}} = \overset{1}{\arcsin} \dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

$\cancel{SA}$ $\cancel{S_{AFE} = \frac{1}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{13}}}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача №5.

Итак, найдём пары $(x;y)$, заметим, что если нам надо найти $f(\frac{a}{b})$, то $f(\frac{a}{b}) = f(a) - f(b)$, а далее мы можем $f(a)$ и $f(b)$ расписать, как $\lambda_1 f(p_1) + \lambda_2 f(p_2)$ и т.д., таким образом получается, что если $f(\frac{x}{y}) < 0$, то в y есть p такое, что $[\frac{p}{4}] > 0$, то есть 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23. Решим перебором.

Для $y=23$ у нас не подходит в качестве x только 23, т.к. в разложении $f(x)$ будет фигурировать только одно p, для которого $[\frac{p}{4}] > 0$, либо 2 $p=5$, если $x=25$. А для x !19, 17... при $x \leq 28$ $f(x) < f(y)$.

Значит для $y=23$ пар 24

для $y=19$ по аналогии пары все, кроме $x=23, 19$ и 17, т.к. $f(17) = f(19)$. То есть 22 пары

для $y=17$ пары все, кроме $x=23, 19$ и 17 также ещё 22

для $y=13$ пары все, кроме $x=23, 19, 17$ и 13, и 26, то есть 20 пар.

Также и для $y=26$ 20 пар

для $y=11$ и $y=22$ у нас пары все, кроме $x=23, 19, 17, 13$ и 11, а также 26 и 22, но при этом уже $f(25) = f(11) = f(22)$, поэтому и без 25, значит всего пар $25-8=17$, то есть 34 для $y=11$ и $y=22$.

для $y=7,14,21$ и 28 у нас не подходят

$x=23,19,17,13,26,11,22,7,14,21,28$, а также $5,10,15,20,25$, остаётся $25-16=9$ чисел, то

для $y=5,10,15,20,25$ у нас для есть $9\cdot4=36$ ~~чисел~~ пар

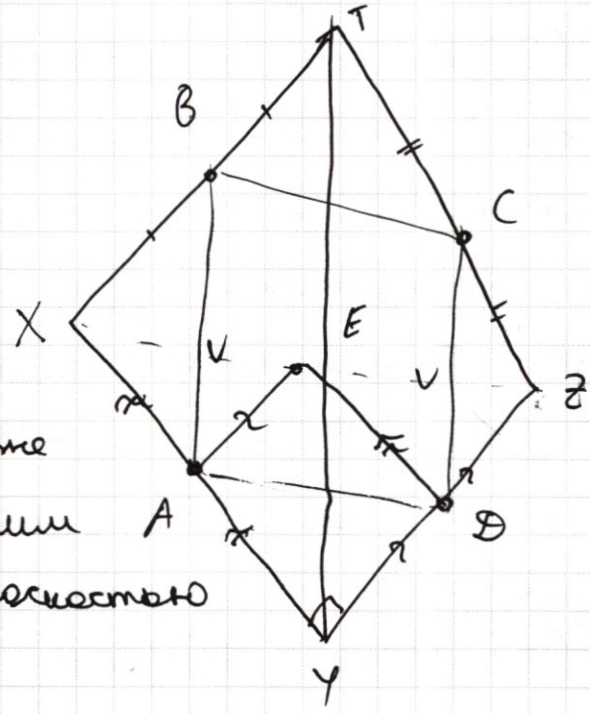
$y=5,10,15$ и 20 также, как и для $y=7$, то есть ещё 36 ~~чисел~~ пар

А для $y=25$ не подходят $x=23,19,17,13,11,22,26,25$ 8 чисел то есть 17 пар.

Всего $17+36+36+34+40+44+24=80+70+40+41=$
$=231$

Ответ: 231 пара.

Задача №7.



Назовём серединные точками A, B, C, D и E

Рассмотрим $YADE$, здесь AE - ср. линия в $\triangle XZY \Rightarrow$ $AE = YD$ и параллельно, также и $ED \subset AY \Rightarrow AYDE$ - параллелограмм

Вписанный, т.к. сечение плоскостью сферы - окружность.

Тогда $\angle AED = \angle AYD$ и в сумме $180^\circ \Rightarrow AYDE$ - прямоугольник, тогда $\angle AYD = 90^\circ$

Также с $BCDA \Rightarrow TY \perp XZ$, ну а тогда

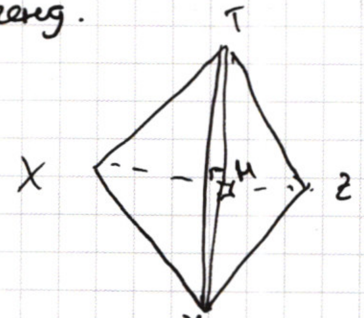
Раз у нас $TY \perp XZ$, то высота из Y на XZ и из T на XZ попадают в одну точку по Т. О 3 перпенд.

Назовём эту т. - H. тогда

$XY^2 - HY^2 = XT^2 - TH^2$, назовём $TH=a$, $HY=b$

$3-b^2 = 2-a^2$

$1 = b^2 - a^2$



☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Также назовём $YZ=c$, тогда

надо найти $\sqrt{c^2+3}=XZ$, при этом

$c^2 = TZ^2 - TH^2 + HY^2 = 4 - a^2 + b^2$

$XZ = \sqrt{7+b^2-a^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

Теперь найдём, какой наименьший рад. сферы вокруг пирамиды. У нас центр. сферы будет расположен на перпенд. к плоскости XYZ из точки, являющейся центром опис. окр. XYZ, поскольку $\angle XYZ = 90°$, то это середина XZ и радиус равен $\frac{XZ}{2}=\sqrt{2}$. Если центр не в этой плоскости, то $r>\sqrt{2}$.

Ответ: $XZ = 2\sqrt{2}$; $r_{min}=\sqrt{2}$.

Задача №6.

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$

Исследуем сначала правое нер-во

$0 \geq 18x^2-(51+a)x+28-b$

Тогда, чтобы для $\forall x: (\frac{2}{3};2]$ верно было, поскольку парабола ветвями вверх, то надо, чтобы $\begin{cases} f(\frac{2}{3}) \leq 0 \\ f(3) \leq 0 \end{cases}$

$18\cdot\frac{4}{9} - (51+a)\cdot\frac{2}{3} + 28 - b \leq 0$

$8 - 34 - \frac{2}{3}a + 28 - b \leq 0 \Rightarrow 2 - \frac{2}{3}a \leq b$, также

$18 \cdot 4 - (51+a) \cdot 2 + 28 - b \le 0$

$72 - 102 - 2a + 28 - b \le 0$

$-2 - 2a \le b$

Теперь исследуем левое нер-во

$\dfrac{8 - 6x - 3ax^2 + 2ax - 3xb + 2b}{3x-2} \ge 0$ $\quad$ $3x-2$ на нашем отрезке ≥ 0.

$\Downarrow$

$-3ax^2 + x(2a - 3b - 6) + 2b + 8 \ge 0$

I. $a \ge 0$:

$\begin{cases} f\left(\frac{2}{3}\right) \ge 0 \\ f(2) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$ $\quad$ $-\frac{4}{3}a + \frac{4}{3}a - 2b - 4 + 2b + 8 \ge 0 \Rightarrow 4 \ge 0$

$-12a + 4a - 6b - 12 + 2b + 8 \ge 0$

$-8a - 4b - 4 \ge 0$

$-2a - 1 \ge b \ge 2 - \frac{2}{3}a$

$\Downarrow$

$x \quad 3 \le -\frac{4}{3}a$

$\frac{9}{4} \le -a$

$-\frac{9}{4} \ge a$

$\Downarrow$ значит $a \ge 0$.

$a < 0$ нет

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$2-\frac{2}{3}a \leq b \leq -1-2a$

$3 \leq -\frac{4}{3}a$

$-\frac{9}{4}$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x-x^2 \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x-x^2>0$

$x(26-x)>0$

$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}$

$0<x<26$

$-\frac{9}{4} \geq a$

$t=26x-x^2$

$\log_5 t = i$

$t\left(t^{\log_5 12-1}+1\right) \geq 13^{\log_5 t}$

$t>5$

$\left(13^{\log_5 t}\right)^5$

$\log_5 \frac{12}{5}$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$[\frac{2}{3}; 2]$

$-3a-4+4a-6b-12+2b+8 \geq 0$

$-12a+4a-6b-12+2b+8 \geq 0$

$-8a-4b-4 \geq 0$

$2a+b+1 \leq 0$

$0 \geq 18x^2-(51+a)x+28-b \Rightarrow$

$f\left(\frac{2}{3}\right) \leq 0 \Rightarrow \frac{3\cdot 3\cdot 2\cdot 4}{3\cdot 3}-(51+a)\cdot\frac{2}{3}+28-b = 36-b-(51+a)\frac{2}{3} \leq 0$

$f(2) \leq 0$

$36-b-34-\frac{2}{3}a \leq 0$

$2-b-\frac{2}{3}a \leq 0 \quad b \leq -1-2a$

$2a+b \geq 2 \quad 18\cdot 4-(51+a)\cdot 2+28-b \leq 0$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b$

$72-102-2a+28-b \leq 0$

$8\cdot 4=32$

$-2a-b-2 \leq 0 \Rightarrow$

$8-6x-3ax^2+2ax-3xb+2b \geq 0$

$\frac{2}{3}a+b \geq 2 \quad 2 \leq b+\frac{2}{3}a$

$-2 \leq b+2a$

$2-\frac{2}{3}a \leq -1-2a$

$-3ax^2+x(2a-3b-6)+2b+8 \geq 0$

$b \geq 2$

$2-\frac{2}{3}a \leq b$

$-2-2a \leq b$

$3 \leq -\frac{4}{3}a$

$-\frac{9}{4} \geq a$

$+\infty \to -1$

I. $a>0$

$-2-2a \leq -1-2a$

$-3a\cdot\frac{4}{3\cdot 3}+\frac{2}{3}(2a-3b-6)+2b+8 \geq 0$

$-2 \leq b+2a$

$-\frac{4}{3}a+\frac{4}{3}a-2b-4+2b+8 \geq 0$ подходит

$-1 \leq b+2a$

$4 \geq 0$

$2-\frac{2}{3} \leq b$

$-2 \leq b+2a \leq -1$

II. $a \leq 0$ $\quad D=4a^2+9b^2+36-12ab-24a+36b+24ab+96a$

$4a^2+9b^2+36+12ab+36b+72a = (2a+3b)^2+36(1+b+2a)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

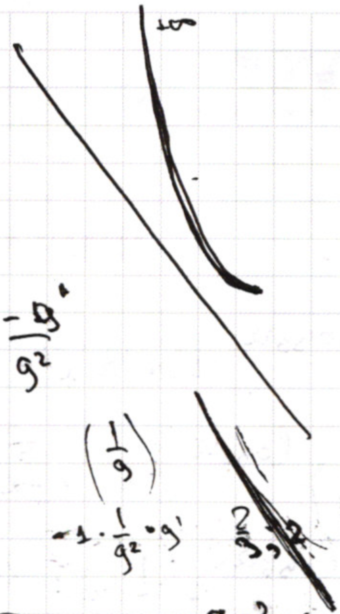
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$f(x) = \frac{8-6x}{3x-2}$ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-g'f}{g^2} =$

$= \frac{-6(3x-2)-3(8-6x)}{(3x-2)^2} =$ $\left(f\cdot\left(\frac{1}{g}\right)\right)' =$

$= -\cancel{18x}+12 \quad x-24+\cancel{18x}$ $\frac{f'}{g} + f\cdot\frac{-g'}{g^2}$

$= \frac{-12}{(3x-2)^2}$



$\left(\frac{1}{g}\right)$

$-1\cdot\frac{1}{g^2}\cdot g'$ $\frac{2}{3}$

$a<0$ $\frac{-12}{(3x-2)^2}$

$-\frac{12}{16}$ $x=-\frac{3}{4}$

$8-\frac{2}{3}\cdot 6 = 8-4=4$

1. a $-\frac{3}{4}\leq a<0$

$8-12=-4$ $\frac{-4}{4}=-1$

$f(x$ $f\left(-\frac{3}{4}\right) \geq ax+b$ $\frac{8+\frac{9}{2}}{-\frac{9}{4}-2} =$ $6\cdot\frac{3}{4}$

4, 6, 9, 8, 16, 27, 18, 24, 17

$= \frac{+\frac{25}{2}}{-\frac{17}{4}} = \frac{25\cdot 4}{2\cdot 17} = -\frac{50}{17}$

$-\frac{50}{17} \geq -\frac{3}{4}a+b$

$9t^2+g^2=90$

$g^2 = 90-9t^2$ $\sqrt{9t} = y-6x$

$2-\frac{2}{3}a\leq b$

$-2-2a\leq b$

$\frac{-12}{(3x-2)^2}=a$

$\frac{8-6x}{3x-2}\geq b\geq 2$ $-\frac{50}{17}+\frac{3}{4}a\geq b\geq \frac{2}{3}-2a$

$g-6t=\sqrt{gt}$ $+6$ $g^2+36t^2-12gt=gt$ $\frac{17}{12}a\geq\frac{84}{17}$ $-2-2a$

$\frac{8-12}{4}=-1$ $g-6t$ $g^2+\cancel{t^2}=90$ $a\geq\frac{12\cdot 84}{17^2}$ $g=\frac{13t\pm\sqrt{169t^2-144t^2}}{2}$

$=\frac{13t\pm 5t}{2}$

$\cancel{f(}x$ $g-6t\sqrt{}$ $g^2-13gt+36t^2=0$ $\frac{8-6x}{3x-2}\geq\frac{-12\cdot x}{(3x-2)^2}+b$

$\left[\begin{array}{l} g=4t \\ g=9t \end{array}\right.$

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$8-6x+12x$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$ $(8-6x)(3x-2)+12x-b(3x-2)^2\geq 0$

10

$y\geq 6x$

$24x-18x^2+12x-16+12x=9x^2b-4b+$

$\sqrt{10}+1$ $1-\sqrt{10}$ $1+\sqrt{10}$ $+12bx\geq 0$

$-\sqrt{10}+1$ $9t^2+81t^2=90$

$\sqrt{(x-1)(y-6)}$ $x\geq 1$ $y\geq 6$ $x<1$ $t^2=1$

$y<6$

$g+t$ $g\neq$ $g\geq 6t$ $140+60+70$ $t^2=\frac{18}{5}$ $9t^2+16t^2=90$

$25t^2=90$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos(2\cos^2 2\beta - 1) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(\alpha+\beta)=$

$\cancel{2\cos^2 2\beta = \frac{2}{17}}$

$\sin(\alpha) + \sin(\beta)$

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - \cancel{1}) + \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta \cdot \cos 2\beta + \cancel{\sin 2\alpha} = -\frac{2}{17}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} \cdot + \cos 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{\sin 2\alpha \cdot \cos 2\alpha}$

$tg\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha}$

$\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha) = -\frac{1}{17}$

$\sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1$

$\cancel{\cos 2\beta}$

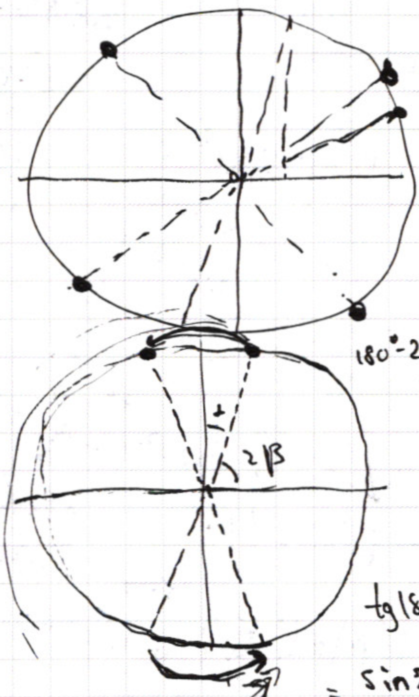
$\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha = 1$

$\cos 2\alpha$

$\frac{1}{tg 2\alpha} = \frac{1}{2tg\alpha} - \frac{tg\alpha}{2}$ $tg 2\alpha = 4$

$\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{17}$

$\boxed{\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}}$



36·

$2\alpha =$ $\qquad$ $\frac{1}{17}$

3·2

$\begin{cases} y-6x = \sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y-45=0 \end{cases}$ $\quad y \geq 6x$ $\quad \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cancel{(3x-3)^2}$ $9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$9t^2 + g^2 = 90$

$\sqrt{gt} =$

$y^2 + 36x^2 - 12xy = xy - 6x - y + 6$

$tg(180° - 2\beta) = \frac{\sin 2\beta}{-\cos 2\beta} = \frac{4\sqrt{17}}{\sqrt{17}\cdot 1} = 4$

$tg\, 90° - \beta =$

=

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

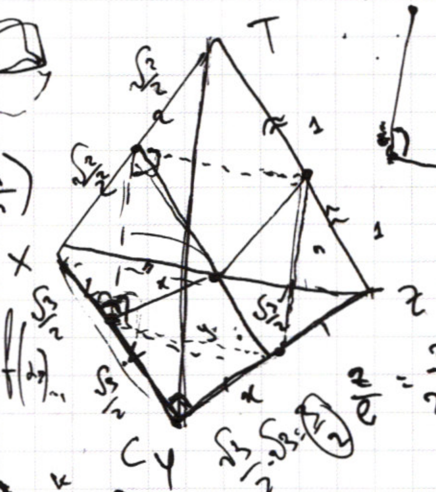
$\frac{13}{25} = \frac{2R-r}{2R}$

$26R = 50R - 25r$

$25r = 24R$

$f(m) - f(n) = f\left(\frac{m}{n}\right)$

$f(p_1) + f(p_2) + \ldots - f(q_1) - f(q_2) \ldots$



$XY = 2\sqrt{3}$

$TX = 2\sqrt{2}$

$TZ = 2$

$XZ - ?$

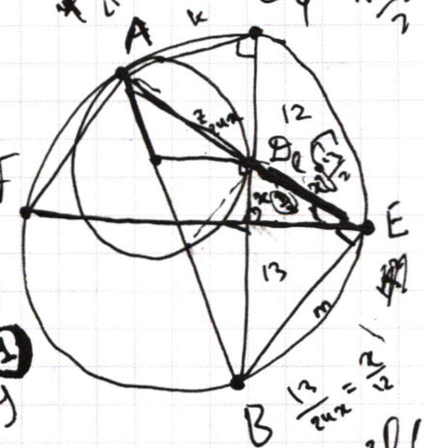
$\frac{2}{\ell} = \frac{2r}{2R-2r} = \frac{2r}{\frac{25r}{12} - 2r}$

$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$

$\frac{2}{\ell} = 24$

$f\left(\frac{m}{n}\right)$

$\frac{4}{5}$



$R, r - ?$

$\angle AFE - ?$

$S(\triangle AEF) - ?$

$CD = 12$

$BD = 13$

$f(4) - f(5)$

$f(2) + f(2)$

$f(5) = f(1)$

$x \cdot y$

$\frac{13}{24x} = \frac{2}{12}$

$AD \cdot DE = 12 \cdot 13$

$f\left(\frac{1}{k}\right)$

4 ... 28

5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,

$f\left(\frac{x}{y}\right)$

$f(\ell)$

$\frac{12}{x} = \frac{AD}{DE}$

$x \cdot 13 = 24x^2$

$\frac{13}{2} = x$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f\left(\frac{1}{2}\right)$

$DE \cdot AD = 12 \cdot 13$

$\frac{DE^2 - 12}{x} = 12 \cdot 13$

$f(a) + f(b)$

$f(p_1) + f(p_2) + \ldots$

$m^2 + \ell^2 = 13^2$

$z^2 = k^2 + 12$

$z \cdot \ell = 12 \cdot 13$

$\frac{12}{13} = \frac{r}{2R}$

$\frac{12}{25} = \frac{r}{2R}$

$\log_5 25$

$\frac{m}{n}$

$(13x)'$

$26x - x^2 \geq 25$

$12^2 + 5^2 = 13^2$

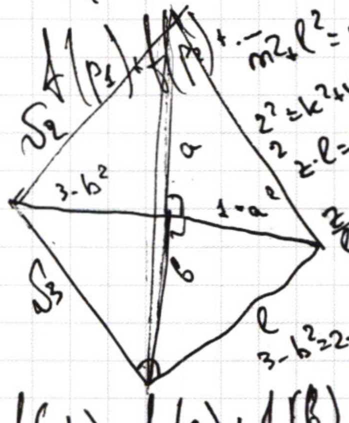
$(x-25)(x-1)$

$x \geq 25$

$x \leq 1$

$x^2 - 26x$

$n > 5$



$\frac{z}{\ell} = \frac{12}{13}$

$z = \frac{12\ell}{13}$

$\ell^2 \cdot \frac{12}{13} = 12 \cdot 13$

$3 - b^2 = 2 - a^2$

$25r = 24R$

19, 17, 13, 26, 11, 22, 7, 21, 14, 28

23

-5

5, 10, 15, 20, 25

$\frac{25}{23}$

$13 \cdot 13 = 169$

$\frac{169}{13 \cdot 13}$

$\frac{2}{13^2} = \frac{12}{\ell}$

$z\ell = 12 \cdot 13$

$\ell^2 = 13^2$

$5^{2\log_5 12}$

12^2

$\frac{m}{k}$

$26 \cdot 13 - 13 \cdot 13$

$12^2 + 5^2 \geq 13^2$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$b^2 - a^2 = 1$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$4 - b^2 - a^2 - ?$

$(5^2)^{\log_5 12}$

$+ 5^2 \geq 13^2$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$2 = \log_5 t$

13, 19, 26

$(x; y)$

$4 \leq x \leq 28$, $4 \leq y \leq 28$

$f(x/y) < 0$

23, 19, 17

19

$13^{\log_5 169} =$

$\ell^2 = b^2 - a^2 + 1 + 3$

$2\sqrt{2}$

$t^{\log_5 12}$

$\log_5 t$

$13^2 = 2 \cdot n$

$0 < 2 < \log_5 169$

$\ell^2 = b^2 + 1 - a^2$

$\ell^2 + 3 = x^2$

$+ t \geq 13$

$x^2 = 8$

$12^2 + 5^2 = 13^2$

13^x

$5^2 = t$

$5^2 = t$, 17

$2 = \log_5 (26x - x^2)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)