МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\cos 2\alpha\sin 4\beta+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha\cos 4\beta+2\sin 2\beta\cos 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$$

$$\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta+1)+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$$

$$2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$$

$$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha)=-\frac{4}{5}$$

$$2\cos 2\beta\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{4}{5}$$

$$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$$

$$\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow \sin 2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2\sin 2\alpha\pm\cos 2\alpha=-1$$

$$4\sin\alpha\cos\alpha\pm(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-1$$

$$4\operatorname{tg}\alpha\pm(1-\operatorname{tg}^2\alpha)=-\frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$4\operatorname{tg}\alpha\pm(1-\operatorname{tg}^2\alpha)=-(\operatorname{tg}^2\alpha-1)$$

$$x=\operatorname{tg}\alpha$$

$4x \pm (1-x^2) = -(x^2+1)$

$4x+1-x^2=-x^2-1 \qquad\qquad 4x-1+x^2=-x^2-1$

$4x=-2 \qquad\qquad 2x^2+4x=0$

$x=-0{,}5 \qquad\qquad 2x(x+2)=0$

$x=0 \quad x=-2$

Ответ: $x=tg\,\alpha \in \{-0{,}5;\ 0;\ -2\}$

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x^2-4x+4)+(9y^2-18+9)=25 \\ x-2y=\sqrt{y(x-2)-(x-2)}=\sqrt{(x-2)(y-1)} \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} t=x-2 \\ v=y-1 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow x-2y=t-2v$$

$$\begin{cases} t-2v=\sqrt{tv} \\ t^2+9v^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-4tv+4v^2=tv \\ t^2+9v^2=25 \\ t\geq 2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2-5tv+4v^2=0 \\ t^2+9v^2=25 \\ t\geq 2v \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{matrix} t=4v \\ t=v \end{matrix}\right. \\ t^2+9v^2=25 \\ t\geq 2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{matrix} \begin{cases} t=v \\ 10v^2=25 \end{cases} \\ \begin{cases} t=4v \\ 25v^2=25 \end{cases} \end{matrix}\right. \\ t\geq 2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{matrix} t=v=\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \\ t=4v=\pm 4 \end{matrix}\right. \\ t\geq 2v \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{matrix} t=v=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ t=4v=4 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} x-2=y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x-2=4y-4=4 \end{matrix}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{matrix} \begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \end{matrix}\right.$$

Ответ: $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right);\ (6;\ 2)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

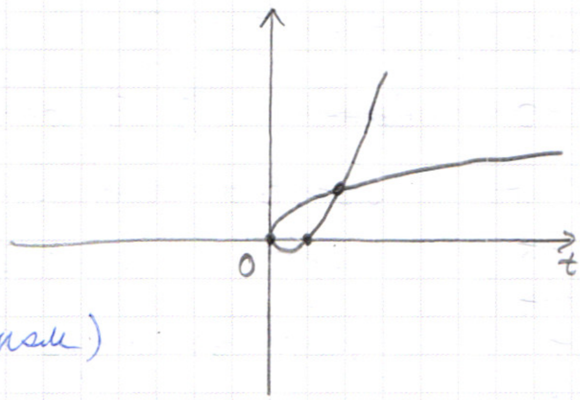
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3
$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$t=x^2+18x>0$ т.к. $\log_{12}(x^2+18x)$ не имеет смыс. при $x\leq 0$

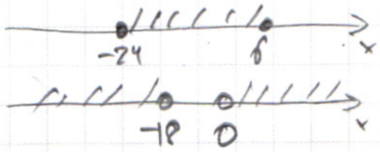
$$5^{\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13}$$
$$t^{\log_t 5\cdot\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13}$$
$$t^{\log_{12}5}+t\geq t^{\log_{12}13}$$
$$t^{\log_{12}5}\geq t^{\log_{12}13}-t$$



Из графика перес. в двух точках $t=0$ и $t=12^2$ (подбором)

$t\in(0;144]$

$$\begin{cases}x^2+18x-144\leq 0\\ x^2+18x>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(x-6)(x+24)\leq 0\\ (x+18)x>0\end{cases}\Leftrightarrow x\in[-24;-18)\cup(0;6]$$



Ответ: $x\in[-24;-18)\cup(0;6]$

№5

$f(2)=f(2)+f(1)\Rightarrow f(1)=0$

$f(yy^{-1})=f(1)=f(y)-f\left(\frac{1}{y}\right)=0\Rightarrow f(y)=-f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)<0$

$f(x)<f(y)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=f(4)+f(2)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=0$

$f(15)=1$

$f(16)=\cancel{3}0$

$f(17)=4$

$f(18)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

$f(22)=2$

$f(23)=5$

$f(24)=0$

В промежутке $[1;24]$

~~f(x)=0 — 11 знач~~ Значений x, что $f(x)=$:

0: 11 шт

1: 6 шт

2: 2 шт

3: 1 шт

4: 2 шт

5: 1 шт

Тогда кол-во пар где $f(y)=5$

$\cancel{1\cdot 22}$ $1\cdot(11+6+2+1+2)=22$

кол-во пар где $f(y)=4$

$2\cdot(1+2+6+11)=40$

и т.д.

Тогда общ. кол-во пар

$1\cdot 22+2\cdot 20+1\cdot 19+2\cdot 14+6\cdot 11=181$

Ответ: 181.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\left[\begin{array}{l} \frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17 \\ x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right) \end{array}\right.$$

Для всех a и b $\Rightarrow$

$$\begin{cases} \max\left(\frac{12x+11}{4x+3}\right) \leq \min(ax+b) \\ \max(ax+b) \leq \min(-8x^2-30x-17) \end{cases}$$

$f(x) = \frac{12x+11}{4x+3} \searrow$ на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$\max(f(x)) = f\left(-\frac{11}{4}\right) = \frac{11}{4}$

$g(x) = -8x^2-30x-17 \nearrow$ на промеж.

$\min(g(x)) = g\left(-\frac{11}{4}\right) = 5$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{11}{4} \leq -\frac{11}{4}a+b \\ -\frac{3}{4}a+b \leq 5 \\ a \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{11}{4} \leq -\frac{3}{4}a+b \\ -\frac{11}{4}a+b \leq 5 \\ a < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 11+11a \leq 4b \\ 4b \leq 3a \\ a \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 11+3a \leq 4b \\ 4b \leq 5+11a \\ a < 0 \end{cases} \end{array}\right.$$

~~$0 \leq a \leq \frac{9}{8}$~~

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 \le a \le \frac{9}{8} \\ b \le \frac{3}{4}a \\ b \ge \frac{11}{4}a + \frac{11}{4} \end{cases} \\ \begin{cases} a \cancel{\ge} \frac{6}{7} \\ a \cancel{\le} 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

Ответ:

$$\begin{cases} a \in \left[0; \frac{9}{8}\right] \\ b \le \frac{3}{4}a \\ b \ge \frac{11}{4}a + \frac{11}{4} \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 6

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17 \qquad \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$$

$$3+\frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

$$f(x) = 3+\frac{2}{4x+3}$$

$$f'(x) = \frac{-8}{(4x+3)^2}$$

$$f\left(-\frac{11}{4}\right) = 3+\frac{2}{-11+3} = 3-\frac{1}{4} = \frac{11}{4} \le \frac{-11a}{4}+b$$

$$g(x) = -8x^2-30x-17$$

$$g'(x) = -16x-30=0$$

$$16x=-30$$

$$8x=15$$

$$x=\frac{15}{8}$$

$$g\left(-\frac{11}{4}\right) = -\frac{8\cdot 11^2}{16}+\frac{30\cdot 11}{4}-17 = -\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-17 = 22-17=5 \ge -\frac{3a}{4}+b$$

$$\begin{cases} \frac{11}{4} \le \frac{-11a}{4}+b \\ \frac{-3a}{4}+b \le 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 11 \le -11a+4b \\ -3a+4b \le 20 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 11+11a \le 4b \\ 4b \le 20+3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le \frac{9}{8} \\ \frac{11}{4}+\frac{11a}{4} \le b \le 5+\frac{3}{4}a \end{cases}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} t} - t^{\log_{12} 13} \geq t$

$5^{\log_{12} t} - t^{\log_{12} 13} \geq t$

$t^{\log_t 5 \log_{12} t} - t^{\log_{12} 13} \geq t$

$t^{\frac{\ln 5}{\ln t} \cdot \frac{\ln t}{\ln 12}} - t^{\log_{12} 13} \geq t$

$t^{\log_{12} 5} - t^{\log_{12} 13} \geq t$

$t^{\log_{12} 5} \geq t^{\log_{12} 13} - t$

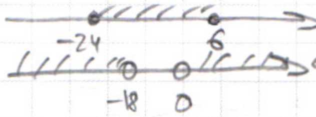
$t^{\log_{12} 5} = t^{\log_{12} 13} - t \Rightarrow t = 12^2$

$t \in (0; 144]$

$0 < x^2 + 18x \leq 144$

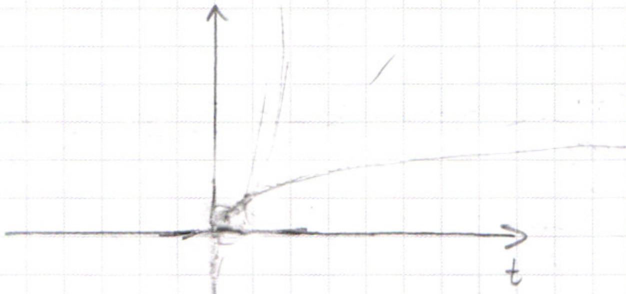
$\begin{cases} x^2 + 18x - 144 \leq 0 \\ x^2 + 18x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

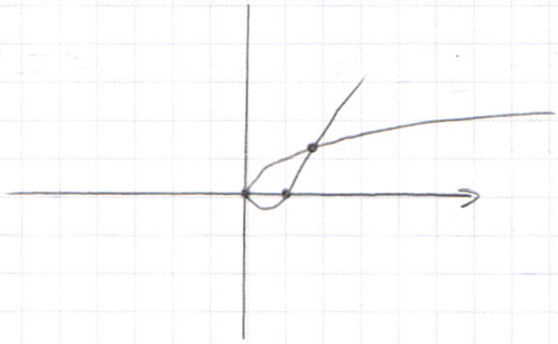
$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-6)(x+24) \leq 0 \\ x(x+18) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$  $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-24; -18) \cup (0; 6]$

$t = x^2 + 18x = x(x+18)$





$18^2 + 4 \cdot 144 =$

$= 4(9^2 + 12^2) = 30^2$

$81 + 144 = 225$

$\frac{-18 \pm 30}{2} = 6 \quad -24$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

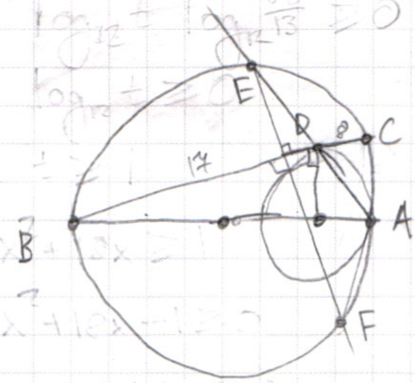
$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

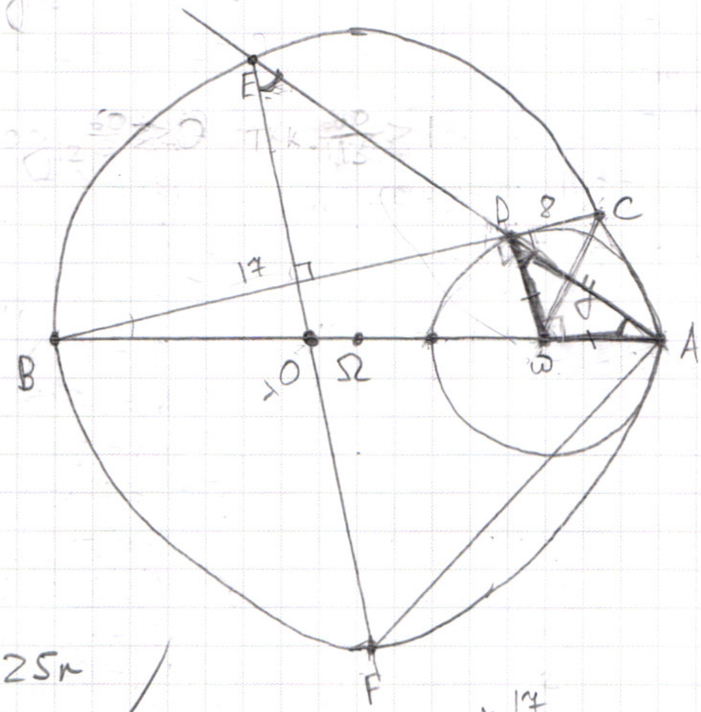
$x^2+18x=t>0$ т.к.

$5^{\log_{12}t}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$ $\qquad 5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t} \geq t^{\log_{12}13}-t$ $\qquad \log_{12}t\log_{12}5 \geq \log_{12}(t^{\log_{12}13}-t)$

4.





$(-x^2+y^2+z^2+2yz)(x^2-y^2-z^2)=25r$

$\dfrac{-17^2+8^2+25^2+50\sqrt{r^2+8^2}\,)(17^2-8^2-25^2)=r}{25}$

$\dfrac{(64-289+625+50\sqrt{r^2+8^2}\,)(289-64-625)}{25}$

$r^2=y^2-8^2$

$r=x^2-17^2$

$S=\frac{1}{2}25r$

$p=\dfrac{x+y+25}{2}$

$S=\sqrt{p(p-x)(p-y)(p-25)}$

$\dfrac{\sqrt{(x+y+z)(-x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)}}{2}$

$$\begin{array}{r} \times 17 \\ 17 \\ \hline +119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 25 \\ 25 \\ \hline +125 \\ 50 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \times 625 \\ 289 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f(x)-f(y)<0$

$f(x)<f(y)$

0: 11 шт

1: 6 шт

2: 2 шт

3: 1 шт

4: 2 шт

5: 1 шт

$1\cdot 22+2\cdot 20+1\cdot 19+2\cdot 17+6\cdot 11=$

$=22+40+19+34+66=$

$=\underline{181}$

$f(zyy^{-1})=f(z)+f(yy^{-1})=$

$=\cancel{0+}f(y)+f(y^{-1})=0$

$f(y)=-f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(z)=f(z)+f(1)\Rightarrow f(1)=0$

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=1$

$f(8)=f(4)+f(2)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(10)=f(2)+f(5)=1$

$f(11)=2$

$f(12)=f(3)+f(4)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=f(7)+f(2)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(17)=4$

$f(18)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

$f(22)=2$

$f(23)=5$

$f(24)=0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$ $\sin2\alpha\cos4\beta+\cos2\alpha\sin4\beta+$
$+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin2\alpha\cos4\beta+2\sin2\beta\cos2\alpha\cos2\beta+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin2\alpha(\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta+1)+2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha=-\frac{4}{5}$

$2\sin2\alpha\cos^2 2\beta+2\sin2\beta\cos2\beta\cos2\alpha=-\frac{4}{5}$

$2\cos2\beta(\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha)=-\frac{4}{5}$

$2\cos2\beta\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{4}{5}$

$\frac{2\cos2\beta}{\sqrt5}=\frac{4}{5}$

$\cos2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}\pm\cos2\alpha\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin2\alpha\pm\cos2\alpha=-1$

$4\sin\alpha\cos\alpha\pm(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-1$

$4\operatorname{tg}\alpha\pm(1-\operatorname{tg}^2\alpha)=-\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$4\operatorname{tg}\alpha\pm(1-\operatorname{tg}^2\alpha)=-(\operatorname{tg}^2\alpha+1)$

Пусть $\operatorname{tg}\alpha=x$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$4x \pm (1-x^2) = -(x^2+1)$

$4x + 1 \cancel{-x^2} = \cancel{-x^2} - 1$ $\qquad$ $4x \cancel{-1} + x^2 = -x^2 \cancel{-1}$

$4x = -2$ $\qquad$ $2x^2 + 4x = 0$

$x = -0{,}5$ $\qquad$ $2x(x+2) = 0$

$x = 0 \quad x = -2$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -\frac{1}{2} \\ tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -2 \end{array}\right.$

2. $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$

$(x^2 - 4x + 4) + (9y^2 - 18 + 9) = 25$ $\qquad$ $x - 2y = \sqrt{y(x-2) - (x-2)} = \sqrt{(x-2)(y-1)}$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 5^2$

$\left.\begin{array}{l} x - 2 = t \\ y - 1 = v \end{array}\right\} \Rightarrow x - 2y = t - 2v$

$\begin{cases} t - 2v = \sqrt{tv} \\ t^2 + 9v^2 = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 4tv + 4v^2 = tv \\ t^2 + 9v^2 = 25 \\ t \geq 2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 - 5tv + 4v^2 = 0 \\ t^2 + 9v^2 = 25 \\ t \geq 2v \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (t-v)(t-4v) = 0 \\ t^2 + 9v^2 = 25 \\ t \geq 2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = 4v \\ t = v \end{array}\right. \\ t^2 + 9v^2 = 25 \\ t \geq 2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} \begin{cases} t = v \\ 10v^2 = 25 \end{cases} \\ \begin{cases} t = 4v \\ 25v^2 = 25 \end{cases} \end{array}\right. \\ t \geq 2v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} t = v = \pm\sqrt{\frac{5}{2}} \\ t = 4v = \pm 4 \end{array}\right. \\ t \geq 2v \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = v = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ t = 4v = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2 = y - 1 = -\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x - 2 = 4y - 4 = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 - \sqrt{\frac{5}{2}} \\ y = 1 - \sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $\left(2 - \sqrt{\frac{5}{2}}; 1 - \sqrt{\frac{5}{2}}\right), (6; 2)$