МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

√1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

√2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

√4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

√5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \end{cases}$ по формуле преобразования суммы в произведение, из второго ур-я получим:

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{17}$, используя первое ур-е системы получим:

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$, затем раскроем первое уравнение:

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow$ (т.к $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$)

$\sin 2\alpha + 1 = -\sqrt{17}\cos 2\alpha \sin 2\beta$, возведением в квадрат получим $(\sin 2\alpha+1)^2 = 17\cos^2 2\alpha\sin^2 2\beta = 17(1-\sin^2 2\alpha)(1-\cos^2 2\beta) =$

$= 17(1-\sin^2 2\alpha)\left(1-\frac{1}{17}\right) = 16(1-\sin^2 2\alpha)$ теперь решим ур-е:

$17\sin^2 2\alpha + 2\sin 2\alpha - 15 = 0 \Rightarrow \sin 2\alpha = -1$ и $\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$

1) $\sin 2\alpha = -1 \Rightarrow \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{2}$

1.1) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ (иначе $\sin 2\alpha \neq -1$) $\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -1$

1.2) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (по той же причине) $\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -1$.

2) $\sin 2\alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow \cos 2\alpha = \pm\frac{8}{17} \Rightarrow \cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \pm\frac{8}{17}$

2.1) $2\cos^2\alpha - 1 = \frac{8}{17} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow$ 2.1.1) $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$ (знак в синусе противоречит. $\sin 2\alpha = \frac{15}{17}$) $\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$ 2.1.2) $\cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{3}{\sqrt{34}}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$

2.2) $2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{8}{17} \Rightarrow \cos\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{34}}$ 2.2.1) $\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}$ 2.2.2) $\cos\alpha = -\frac{3}{\sqrt{34}} \Rightarrow \sin\alpha = -\frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \frac{5}{3}$.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = -1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

(2) $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases} \overset{y\geq 6x}{\Rightarrow} \begin{cases} y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6 \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} (y-(9x-3))(y-(4x+2))=0 \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases} \Rightarrow$ 1) $\begin{cases} y=9x-3 \geq 6x \text{ (ОДЗ)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x\geq 1 \quad * \\ 9(x-1)^2+81(x-1)^2=90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 90(x-1)^2=90 \end{cases} \Rightarrow$

1) $x-1=1$ и 2) $x-1=-1$

$\underline{x=2}$ $\quad x=0$ $\varnothing$ (т.к по * это неправильно)

$\Downarrow$

$y=15$

2) $\begin{cases} y=4x+2\geq 6x \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\leq 1 \\ 9(x-1)^2+16(x-1)^2=90 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)^2=\frac{90}{25} \Rightarrow$ 1) $x-1=\frac{3}{5}\sqrt{10}$

$x=1+\frac{3}{5}\sqrt{10}>1$ $\varnothing$ (по ОДЗ)

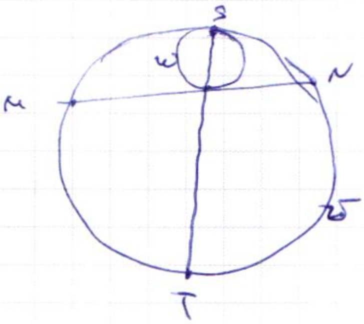
2) $x-1=-\frac{3}{5}\sqrt{10}$

$x=1-\frac{3}{5}\sqrt{10} \Rightarrow y=6-\frac{3}{5}\sqrt{10}$

Ответ: $(x,y)=(2,15);\ \left(1-\frac{3}{5}\sqrt{10},\ 6-\frac{3}{5}\sqrt{10}\right)$.

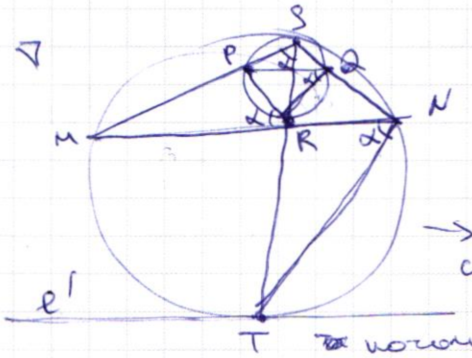
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

④ Докажем лемму:



$\angle MST = \angle TSN \Rightarrow T$ середина дуги $\overset{\frown}{MTN}$

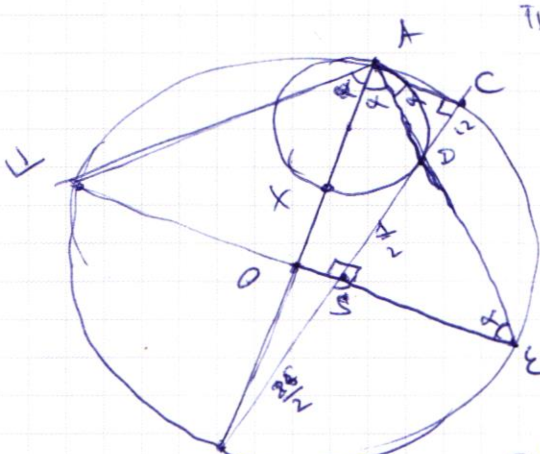
∇



→ Пусть угол $MST=\alpha$, тогда т.к MR касается ω, то по теореме об угле между хордой и касательной $\Rightarrow \angle MST = \angle PRM = \alpha$ и по ~~т~~ поэтому, что точки M, S, N, T и ~~...~~ концикличны получим, что ~~...~~ и $\angle MST = \angle MNT$.

Рассмотрим гомотетию с центром S переводящую ω в Ω, то точка R касания ω ~~а~~ перейдёт в точку T' окружности Ω, а касательную MN в некую касательную l', которая будет параллельна MN. Т.к точки T и T' оба лежат на SR и окружности Ω то $T'=T$ тогда по теореме об угле между хордой и касательной для Ω и l', получим ~~...~~ $\angle(l', TN) = \angle TSN$ и т.к $MN \parallel l'$, то $\angle(l', TN) = \angle MNT = \alpha$, т.е $\angle MSN = \angle TSN = \alpha$. Лемма доказана. ∇

Пусть $EF \cap BC = \{S\}$



Теперь по лемме E есть середина дуги BEC и $EF \perp BC$, тогда ~~...~~ S является серединой CD и ~~...~~ т.к $EF \perp BC$, а то O лежит на $EF \Rightarrow EF$ диаметр Ω. Теперь т.к S середина BC, то $BS = 12\frac{1}{2}$, $SD = \frac{1}{2}$ и $CD = 12$. Пусть $\angle EAB = \alpha$, ~~т~~ т.к AE биссектриса BAC, то $\angle EAC = \alpha \Rightarrow$ т.к ~~...~~ AB и EF диаметры $\Rightarrow \angle ACB = \angle FAE = 90^\circ$, тогда $AC \parallel FE$ и $\angle AEF = \alpha$. По теореме об пересекающихся ~~окружностях~~ хордах для BC и AE получим ~~...~~ $AD \cdot DE = BD \cdot DC = 13 \cdot 12$ также т.к $\triangle ADC$ и $\triangle EDS$ подобны: $\frac{DE}{AD} = \frac{DS}{12} = \frac{1}{24}$, комбинируя получим $AD^2 = 13 \cdot 12 \cdot 24 = 12^2 \cdot 26$ и $DE = \frac{13}{2} \Rightarrow AD = 12\sqrt{26}$ и $DE = \frac{\sqrt{26}}{2}$. В $\triangle$-ке DSE $\sin\alpha = \frac{DS}{DE} = \frac{1}{\sqrt{26}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$ (т.к $\alpha < 90^\circ$) ~~...~~ Также т.к $\angle FAE = 90^\circ \Rightarrow \angle AFE = 90 - \alpha$ и в $\triangle$-ке FAE $2R = FE = \frac{AE}{\sin AFE} = \frac{AD + DE}{\sin(90-\alpha)} =$

$= \frac{26\sqrt{26}}{2\cos\alpha} = \frac{26\sqrt{26}}{2\cdot\frac{5}{\sqrt{26}}} = \frac{5\cdot 26^{13}}{2} = 65 \Rightarrow R = \frac{65}{2}$ (где R радиус Ω), также т.к $\angle AFE = 90-\alpha$, то $\sin(\angle AFE) = \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow \alpha = \arccos\frac{5}{\sqrt{26}} \Rightarrow \angle AFE = 90^\circ - \alpha =$

$= \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{5}{\sqrt{26}}$. Теперь пусть AB пересекает ω во второй раз в точке X. Так как AX диаметр ω, что $\angle ADX = 90^\circ$ и по теореме синусов в $\triangle ADX$ получим:

$2r = AX = \frac{AD}{\sin\angle AXD} = \frac{AD}{\sin(90-\alpha)} = \frac{AD}{\cos\alpha} = \frac{12\sqrt{26}}{\frac{5}{\sqrt{26}}} = \frac{12}{5}\cdot 26 \Rightarrow r = \frac{6}{5}\cdot 26 =$

Ответ: $\angle AFE = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{5}{\sqrt{26}}$; $R = 32{,}5$; $r = 31{,}2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) По условию задачи $f(ab)=f(a)+f(b)$, тогда для $N=p_1^{\alpha_1}\cdot p_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot p_n^{\alpha_n}$ получим $f(N)=f(p_1^{\alpha_1})+f(p_2^{\alpha_2})+\ldots+f(p_n^{\alpha_n})=$ $=\alpha_1 f(p_1)+\alpha_2 f(p_2)+\ldots+\alpha_n f(p_n)$ * Теперь из того, что $f(p)=\left\lfloor \frac{p}{4}\right\rfloor$ для простого p получим:

$$\begin{cases} f(2)=0 \quad f(3)=0 \\ f(5)=1 \quad f(7)=1 \\ f(11)=2 \\ f(13)=3 \\ f(17)=4 \quad f(19)=4 \\ f(23)=5 \end{cases} \quad **$$

Тогда по * и ** находим:

$0=\underline{f(2)=f(3)}=f(4)=f(6)=f(8)=f(9)=f(12)=f(16)=$
$=f(18)=f(24)=f(27)$

$1=f(5)=f(7)=f(10)=f(14)=f(15)=f(20)=f(21)=f(28)$

$2=f(11)=f(22)=f(25)$

$3=f(13)=f(26)$

$4=f(17)=f(19)$

$5=f(23)$

мы вычислили все $f(n)$ для $4\le n\le 28$. Теперь из $f\left(\frac{x}{y}\right)$ по условию $f(ab)=f(a)+f(b)$ подставляя $a=x$ $b=\frac{1}{y}$ получим $f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$ и подставляя $a=\frac{1}{y}$ $b=y$ получим $f\left(\frac{1}{a}\right)=f(1)-f(a)$ и подставив $a=y$ $b=1$ получим $f(1)=0$ т.е.:

$$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y) \quad \text{и} \quad f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \iff f(x)<f(y)$$

Осталось посчитать кол-во пар чисел, в которых числа будут из разных рядов наверху. Не будем считать f-и которые подчёркнуты: $0<1$ даст нам $9\times(8+3+2+2+1)=9\times16=144$ пар и $1<2$ даст $8\times(3+2+2+1)=8\times8=64$ пар и $2<3$ даст $3\times(2+2+1)=15$ и $3<4$ даст $2\times(2+1)=6$ и $4<5$ даёт $2\times1=2$ пары чисел и всего:

Ответ: $144+64+15+6+2=231$ пар чисел.

③ Т.к в правой части содержится $\log_5(26x-x^2)$, то $\underline{26x-x^2>0} \Rightarrow 0<x<26$ $(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2) \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

Теперь ясно, что $x=1$ и $x=25$ являются решениями неравенства. Рассмотрим промежутки $0<x<1$ $1<x<25$ $25<x<26$. ~~С помощью следующих вычислений можно получить что 0 и 26 не являются решениями нер-ва.~~

1) $0<x<1$ т.к для этого случая имеем $26x-x^2<25$ или $(x-1)(x-25)<0$, также $26x-x^2<26x<26$, то

2) т.к максимум функции $f=26x-x^2$ достигается при $x=13$ и $f_{max}=169$, то разделим этот случай на 2 подслучая $1<x<13$ и $13<x<25$

2.1) $1<x<13$ $25<26x-x^2<169$ значения f ~~убывают~~ возрастают т.к $f'>0$ при $\underline{x<13}$.

2.2) $13<x<25$ $25<26x-x^2<169$ значения функции ~~возрастают~~ убывающее т.к $f'<0$ при $x>13$

3) $25<x<26$, также как и в 1) $26x-x^2>25$ и $26x-x^2=x(26-x)<$ <26. т.к ~~...~~ при стремлении x к 26 $26-x$ стремится к 0. и $\max(x(26-x)) \leq \max(x)\cdot\max(26-x)<$ $<25\cdot 1=\underline{25}$.

при $x=13$ получим $13^{2\log_5 12}+13^2=13^{2\log_5 13}$ $<=>$

Ответ: $x\in[1;13)\cup(13;25]$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad f(p) = \lfloor \frac{p}{4} \rfloor$ $\qquad x, y \in N$

$4 \le x, y \le 28$

$a \to \frac{x}{y} \quad b \to y$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(11) = 2$

$f(13) = 3$

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$

$f(23) = 5$

$\underline{b=1}$

$f(a) = f(a) + f(1)$

$\boxed{f(1)=0}$

$f(x) - f(y) < 0$

$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = -f(p)$

при $\underline{p \ge 5}$ $\quad f\left(\frac{1}{p}\right) = < 0$

$\frac{4}{4, 5, 6}$

$a = p \quad b = \frac{1}{q}$

$\lfloor x \rfloor \ge x - 1$

$\lfloor x \rfloor + 1 > x$

$x > y$, т.о. $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ $\quad (m, n) = 1$, т.о.

$f\left(\frac{m}{n}\right) = f(m) + f\left(\frac{1}{n}\right) =$

$m = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \qquad n = q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots$

$\underline{p \ge q} \quad f(p) \ge f(q)$

$= f(p_1) + f(p_2) + \ldots +$

$+ f\left(\frac{1}{q_1}\right) + f\left(\frac{1}{q_2}\right) + \ldots \ge$

$\ge \left(\lfloor \frac{p_1}{4} \rfloor + \lfloor \frac{p_2}{4} \rfloor + \ldots\right) - \left(\lfloor \frac{q_1}{4} \rfloor + \lfloor \frac{q_2}{4} \rfloor + \ldots\right) \ge$

$\ge \sum\left(\frac{p_1}{4} - 1\right) - \sum$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha + \cos 2\alpha \sin 2\beta \cdot \sqrt{17} = -1$

$\sin 2\alpha + 1 = -\sqrt{17}\cos 2\alpha \sin 2\beta$

$(\sin 2\alpha + 1)^2 = 17\cos^2 2\alpha\left(1 - \frac{1}{17}\right) =$

$= 16\cos^2 2\alpha$

$t^2 + 2t + 1 = 16(1 - t^2)$

$17t^2 + 2t - 15 = 0$

$D = 4 + 1020 = 1024$

$t_{1,2} = \frac{-2 \pm 32}{34} = -1;\ \frac{15}{17}$

$\sin 2\alpha = -1 \Rightarrow \cos 2\alpha = 0$

$2\cos^2\alpha - 1 = 0$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \pm 1}$

$\sin 2\alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow \cos 2\alpha = \pm\frac{8}{17}$

$2\cos^2\alpha = 1 \pm \frac{8}{17}$

$\sin\alpha + \sin\beta =$

$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} + \frac{\alpha-\beta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2} - \frac{\alpha-\beta}{2}\right)$

$= \sin\alpha + \sin\beta$

$\frac{\sqrt{2}}{2\sin\alpha} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{+5}{17\sqrt{17}}$ 5

$\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$2\cos^2\beta - 1 = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos\alpha = \pm\frac{5}{\sqrt{34}}$

$\cos\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{34}}$

1020

$\times\frac{60}{17}$

$2\cos^2\alpha = \frac{25}{17};\ \frac{8}{17}$

$\sqrt{26}\left(12-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$= \sqrt{26}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{2}$

$120 + 36$

$156 : 5 = 31{,}2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

②

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(\cancel{3}x-\cancel{1})^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \\ y-6x=\sqrt{\cancel{xy}(y-6)(x-1)} \le (y-6)^2 \end{cases}$$

$y^2-\cancel{\ }12xy+36x^2=xy-6x-y+6$

$(x-1)^2+(y_1-2)^2=10$ $\qquad y^2-y(13x-\cancel{1})+36x^2+6x-6=0$

$D=169x^2-26x+1-$

$-144x^2-24x+24=$

$3y_1-6x=\sqrt{3y_1x-6x-3y_1+6}$

y_1-2x

$=25x^2-50x+25=$

$=25(x-1)^2$

$9x-3\ge 6x$

$y_{1,2}=\dfrac{13x-1\pm 5(x-1)}{2}=$

$3x\ge 3$

1) $\boxed{x\ge 1}$ $\qquad$ 2) $4x+2\ge 6x$ $\qquad = 9x-3;\ 4x+2$

$x\le 1$

③ $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\ge x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x-x^2\ge 0 \Rightarrow x^2-26x\le 0 \Rightarrow (26x-x)^{\log_5 12}+$

$+26x\ge x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$x(26-x)\ge 0$

$x\in[0;26]$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}\ \cancel{\ge 0\ (x^2-26x)}+1+26x-x^2\ge 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$t^{\log_5 12}+t\ge 13^{\log_5(26x-x^2)}=13^{\log_5 t}$

$t^{\log_5 12}+13^{\log_5 t}\ge 13^{\log_5 t}$

при $26\ge x\ge 25$

при $\cancel{x=25}$ $t\cancel{=25}$

$26\ge 26x-x^2=x(26-x)\le 25$

$26x-x^2=x(26-x)=25$

$x^2-26x+25\ge 0$

$\cancel{t=1}$ $t=25$

$(x-25)(x-1)\ge 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \qquad x > \frac{2}{3}$$

$$8 - 6x \geq (ax+b)(3x-2)$$

$$8-6x \geq 3ax^2 - 2ax + 3bx - 2b \qquad 56-24$$

$$3ax^2 + x(3b-2a+6) - 2b - 8 \leq 0$$

$$D = 9b^2 - 12ab + 36 - 24a + 36b + 4a^2 + 12a(2b+8) =$$

$$= 9b^2 + 12ab + 36b + 72a + 4a^2 + 36 =$$

$$= 9(b^2+4b+4) + 4(a^2+$$

$$18x^2 - x(51+a) + 28 - b \leq 0$$

$D =$

$51^2 - 4 \cdot 18 \cdot 28$

$$x = \frac{51 \pm 22}{36} = \frac{73}{36};$$

51×51: $2500 + 101$

72×28: 576, 144, 2016

$2016 + 2500$

$2500 - 2016 = 484$

$$\frac{2}{3} > \frac{-(3b+2a+6) \pm \sqrt{(3b-2a+6)^2 + 12a(2b+8)}}{6a} \geq 2$$

$$\frac{4a + 3b + 6 \mp \sqrt{(3b-2a+6)^2 + 12a(2b+8)}}{6a} > 0$$

$$10a + 3b + 6 \mp \sqrt{(3b-2a+6)^2 + 12a(2b+8)}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(26x-x^2)^{\log_5 12} + (26x-x^2) \ge 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x-x^2>0$

$0<x<26$

$26x-x^2$

$26-2x=0$

$\boxed{x=13}$

$13^{2\log_5 12} + 13^2 \ge 13^{\log_5 13^2}$

$13^{2\log_5 12-2} + 1 \ge 13^{2\log_5 13-2}$

$\cancel{13^{2\log_5 \frac{12}{5}} + 1 \ge 13^{2\log_5}}$

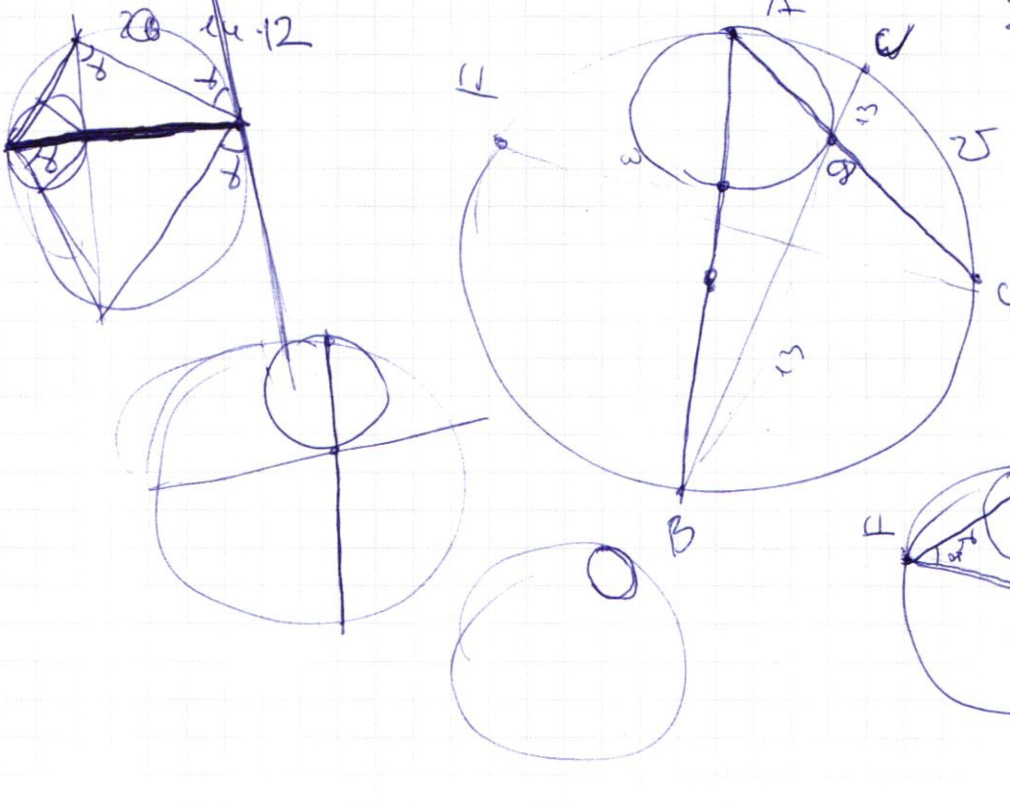
$78-8$ $(0;13]$ ↗ $[13;26)$ ↘

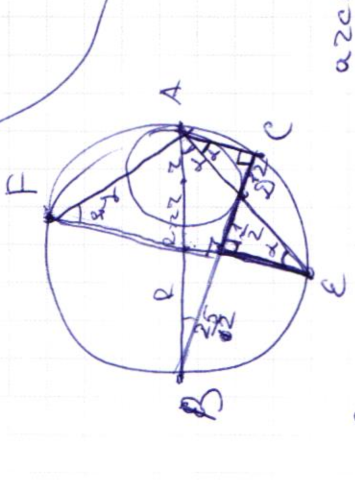
$26x-x^2$

$x>13$

$(26-x^2)^{\log}$

$24 \cdot 12$





$\frac{ED}{AD} = \frac{\frac{1}{2}}{12^2} = \frac{1}{24}$

$ED \cdot AD = 12 \cdot 13$

$ED^2 = \frac{13}{2} = 12^2 \cdot 26$

$AD^2 = 12 \cdot 13 \cdot$

$\frac{AE}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{R}{\sin\alpha}$

$\boxed{AE = 2R\cos\alpha}$

$\frac{AF}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{R}{\cos\alpha}$

$AF = 2R\sin\alpha$

$168 = (R-r)2R$

$\frac{AE \cdot AF}{2} = \frac{4R^2\sin\alpha\cos\alpha}{2} = 2R^2\sin\alpha\cos\alpha$

$\frac{25}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$0 < x < 1$ $\quad x(26-x)$ $\quad 1 < x < 25$

$25 < 26x - x^2 \le 169$ $\quad 0 < 26x - x^2 < 25$

$LHS > 25^{\log_5 12} + 25 = 169$

$RHS \le 13^{\log_5 169} = 13$

$25 < x < 26$ $\quad 26 - 2x = 0$

$x = 13$

$26x - x^2$ $\quad 13^{2\log_5 12} + 13^2 \ge 13^{2\log_5 13}$

$f(0) = 0$ $\quad f(1) = 25$

$1 < x < 13$

$26 > 26x - x^2 > 25$

$x^2 - 26x + 25 < 0$ $\quad 25 < t < 169$

$(x-1)(x-25)$

$26x - x^2$ $\quad 80 + 24$

$x^2 - 26x + 26 < 0$ $\quad 4 \cdot 143$ $\quad 25 < x < 1$

$D = 676 - 104 = 572$ $\quad 25 < x < 26$

$x_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{572}}{2} = 13 \pm 2\sqrt{143}$

$26 > 26x > 26x - x^2$ $\quad 26 > 26x - x^2 > 25$

$(26x - x^2)^{\log_5 12} + 26x - x^2 \ge 13^{\log_5 (26x - x^2)}$

$LHS > 169$ $\quad x^2 - 26x + 25 < 0$

и $\quad RHS < 13^{\log_5 26}$ $\quad (x-25)(x-1) < 0$

$x(26-x)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$>\cancel{1}69$ $\quad 26-2x \quad \underline{x>13}$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2)\geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$13^{2\log_5 12}+13^2\geq 13^{2\log_5 13}$$

$$2=1+\frac{13^2}{13^2}>1+\frac{13^2}{13^{2\log_5 12}}\geq 13^{2\log_5\frac{13}{12}}$$

$$2^{\log_5\frac{13}{12}}>3$$

$$13^{\log_{13}3}$$

$$13^{\log_5\frac{13}{12}}>13$$

$$13^{2\log_5}$$

$$2^{\log}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$\frac{8-6x}{3x-2} = ax+b = 18x^2 - 51x + 28$

$\frac{51-22}{36} = \frac{29}{36}$

$\frac{51+22}{36} = \frac{73}{36}$

$1 < x < 25$

$0 < 26x - x^2 < 25$

$\frac{29}{36} > \frac{2}{3}$ $\quad \left(x - \frac{73}{36}\right)\left(x - \frac{29}{36}\right)$

12

$\left(26x - x^2\right)^{\log_5 12} + \left(26x - x^2\right) \geq 13^{\log_5 (26x - x^2)}$

$\boxed{x < 1}$

$26x - x^2 \leq 25$

$x^2 - 26x + 25 \geq 0$

при $x \geq 1$

$(x-1)(x-26) > 0$

$5^{2\log_5 12}$

$144 + 25 \geq 13^{\log_5 25} = 169$

$x > 1$

$26x - x^2 > 25$

$x \geq 25$

LHS $\leq 13^{2\log_5 12} + 13^2$

$x^2 - 26x + 25 < 0$

$(x-25)(x-1) < 0$

$144 + 25 \geq 13$

26

$26x - x^2 - 25 < 0$

$1 < x < 25$

$(x-25)(x-1) < 0$

$26x - x^2 < 25$

2

$0 < x < 1$

$13^{\log_5 (26x - x^2)} < 13$

$25x + x - x^2$

$169 \geq 26x - x^2 > 25$

$(26x - x^2)^{\log_5 12} + (26x - x^2) >$

$13^{\log_5 (26x - x^2)} <$

$144 + 25 \geq 169$

$> 144 + 25$

< 13

25

RHS

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x) < f(y)$

$f(p_1)+f(p_2)+\dots+f(p_r) < f(q_1)+f(q_2)+\dots+f(q_s)$

$f(16) < f(17), 18, \dots, 28$ $\quad 28-17$

$4f(2)=0 \quad \frac{17}{4} = \dots$

$f(4) = 2f(2) = 0 < f$ (любой ...)

$f(5) = 1$

$f(12) = 2f(2)+f(3)$

$f(16) \quad f(15)$

$f(4) = f(8) = f(16)$

$= f(3) = f(9) = f(27)$

t

$169 \geq 26x - x^2 \geq 0$

$0 < t < 169$

$f(5) \neq f(7) <$

$1 = f(5) = f(7) = f(10) = f(15) = f(20) = f(14) = f(21) = f(28)$

f

$23+208$

$\cancel{f(3) = f(4) = f(8) = f(9)}$

$0 = f(4) = f(6) = f(8) = f(9) = f(12) = f(16) = f(18) = f(24) =$

$= f(27)$

$t^{\log_5 12} + t \geq 13^{\log_5 t}$

$2 = f(11) = f(22)$

$\log_5 12 +$

$3 = f(13) = f(26)$

$4 = f(17) = f(19)$

$5 = f(23)$