МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x+2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Пусть: $x-2=a$; $y-1=b$, $a-2b\geq 0$; $ab\geq 0$

$a\geq 2b$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \quad (1) \\ a^2+9b^2=25 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $a-2b=\sqrt{ab} \Leftrightarrow a^2-4ab+4b^2=ab \Leftrightarrow a^2-5ab+4b^2=0$

Решая кв. ур-е отн. a получим $a=b$; $a=4b$

1) $a=b$

$b^2+9b^2=25$

$b=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

$a=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

2) $a=4b$

$16b^2+9b^2=25$

$b=\pm 1$

$a=\pm 4$.

т.к $a\geq 2b \Rightarrow$ подходят пары чисел $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}; -\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$ и $(4;1)$

тогда: $$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-2=-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y-1=-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{4-\sqrt{10}}{2} \\ y=\frac{2-\sqrt{10}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=2. \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}; \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$ $(6;2)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 1 (Нумеровать только чистовики)

№3.

$$5^{\log_{12}|x^2+18x|}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x.$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$. Пусть: $x^2+18x=a$, т.к $a>0 \Rightarrow |a|=a$

исходное нер-во примет вид

$$5^{\log_{12}a}+a \geq a^{\log_{12}13}$$

при $a\in(0;1]$: $a \geq a^{\log_{12}13}$, т.к $\log_{12}13>1$

и $5^{\log_{12}a}>0 \Rightarrow 5^{\log_{12}a}+a \geq a^{\log_{12}13}$ при $a\in(0;1]$.

~~при~~ $5^{\log_{12}a}=a^{\log_{12}5}$, $\log_{12}5<1$.

$$a^{\log_{12}5} \geq a(a^{\log_{12}13-1}-1)$$

$$a^{\log_{12}5} \geq a(a^{\log_{12}\frac{13}{12}}-1).$$

~~т.к $\log_{12}\frac{13}{12}$~~

$$a^{\log_{12}5} \geq a^{\log_{12}13}-a$$

левая функция - убыв, правая - возраст.

(т.к $\log_{12}5<1$; $\log_{13}13>1 \Rightarrow a^{\log_{12}13}>a^1$)

тогда: равенство убыв. и возр. функции дост.

в мах. 1 точке. Эта точка $a=144$.

т.е. $a\in(0;144]$.

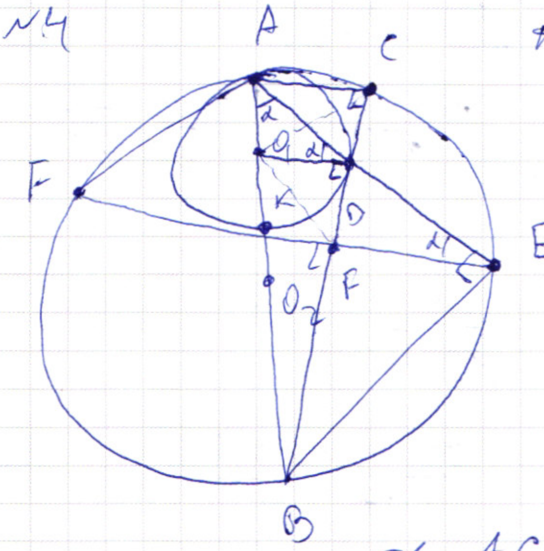
$$\begin{cases} x^2+18x>0 \\ x^2+18x\leq 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty) \\ x^2+18x-144\leq 0 \Rightarrow x\in[-24;6]. \end{cases}$$

Значит, $x\in[-24;-18)\cup(0;6]$.

Ответ: $x\in[-24;-18)\cup(0;6]$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



т.к т. A - общая т. касания ⇒ т. A; O_1; O_2; B лежат на 1 окружности, где O_1 и O_2 - центры ω и Ω соотв.
тогда: т.к AB - диам. Ω ⇒ $AC \perp CB$, $O_1D \perp BC$ (кас) и $EF \perp BC$ (по усл)
⇒ $AC \parallel O_1D \parallel EF$.

⇒ $\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$ ⇒ $\frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA}$ ⇔ $\frac{17}{25} = \frac{2R-r}{2R}$

где R - рад. Ω; r - рад. ω. ⇒ $R = \frac{25}{16}r$

по т. о сек. и кас: $BK \cdot BA = BD^2$, где K - т. перес. BA и ω. $(2R-2r) \cdot 2R = 17^2$. Отсюда получим подставляя вместо $R = \frac{25}{16}r$, что $r = \frac{136}{15}$; $R = \frac{85}{6}$
тогда: ~~пусть~~: $\angle O_1AE = \alpha$ ⇒ т.к $\triangle O_1AD$ - р/б ($O_1A = O_1D = r$)
⇒ $\angle BO_1D = 2\alpha$ (внешний)
$\triangle BO_1D$: $\sin 2\alpha = \frac{BD}{BO_1} = \frac{17}{2R-r} = 17 : \frac{289}{15} = \frac{15}{17}$.

тогда: т.к $2\alpha < 90^\circ$ ⇒ $\cos 2\alpha = \sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = \frac{8}{17}$

тогда: $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$. т.к $\triangle ABE$ - п/у (AB - диам)
⇒ $\sin BAE = \cos ABE = \sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}}$ ⇒ $\angle ABE = \angle AFE$ (опир. на 1 дугу $\overset{\frown}{AE}$) $= \arccos\frac{3}{\sqrt{34}}$

$\triangle AO_2D \sim \triangle ABE$ (т.к $O_2D \perp AE$ и $BE \perp AE$) $\Rightarrow$

$$\frac{AO_2}{AB} = \frac{AD}{AE} = \frac{2R-2r}{2R} = \frac{9}{25} \Rightarrow AD = \frac{9}{25}AE; \; DE = \frac{16}{25}AE$$

По т. о хордах: $BD \cdot DC = AD \cdot DE$

$$17 \cdot 8 = \frac{9}{25}AE^2 \cdot \frac{16}{25}$$

$$AE = \sqrt{\frac{17 \cdot 8 \cdot 25^2}{9 \cdot 16}} = \frac{25}{6}\sqrt{34}$$

$\angle ADC = \angle BDE = 90^\circ - \alpha$

$\Rightarrow \angle FEA = \alpha$.

тогда: по т. син. $\triangle AFE$: $\frac{AF}{\sin\alpha} = \frac{AE}{\sin AFE} = 2R$

$$AF = 2R\sin\alpha = \frac{85}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{\cancel{85}^{5}\sqrt{34}}{2 \cdot \cancel{17}_1} = \frac{5\sqrt{34}}{2}.$$

тогда: т.к $\angle AFE = \angle ABE = 90 - \alpha$ и $\angle AEF = \alpha$

$\Rightarrow \triangle AFE$ - п/у $\Rightarrow \triangle AFE = \triangle ABE$ (по кат. и остр. ∠)

$\Rightarrow S_{AFE} = S_{ABE} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AE \cdot \sin\alpha =$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{85}{\cancel{3}} \cdot \frac{25}{6}\cancel{\sqrt{34}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\cancel{\sqrt{34}}} = \frac{85 \cdot 25}{12} = \frac{2125}{12}.$$

Ответ: $R = \frac{85}{6}$; $r = \frac{136}{15}$; $\angle AFE = \arccos\frac{3}{\sqrt{34}}$

$S_{AFE} = \frac{2125}{12}.$

☐ черновик ☐ чистовик Страница № 4

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

Запишем $f(x)$ для всех простых $x \le 24$:

т.к 1-не простое $\Rightarrow f(1\cdot x) = f(1) + f(x) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$; $f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$; $f(5) = 1$; $f(7) = 1$;

$f(11) = 2$; $f(13) = 3$; $f(17) = 4$; $f(19) = 4$; $f(23) = 5$.

тогда: $f(2x) = f(x)$; $f(3x) = f(x)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$.

тогда: $f(4) = f(2) + f(2) = 0$; $f(6) = 0$; $f(8) = 0$

$f(9) = 0$; $f(10) = 1$; $f(12) = 0$; $f(14) = 1$

$f(15) = 1$; $f(16) = 0$; $f(18) = 0$; $f(20) = 1$

$f(21) = 1$; $f(22) = 2$; $f(24) = 0$

$f(\frac{2}{n}) = f(\frac{1}{n})$ и $f(\frac{3}{n}) = f(\frac{1}{n})$, $n \in N$.

$f(\frac{5}{n}) = 1 + f(\frac{1}{n}) \Rightarrow f(\frac{5}{n}) > f(\frac{3}{n})$

тогда: $f(\frac{1}{5}) = \cancel{1}$; $f(\frac{1}{7}) = \cancel{1}$; $f(\frac{1}{11}) =$

тогда: $f(\frac{p}{p}) = f(p) + f(\frac{1}{p})$, $f(\frac{p}{p}) = f(1) = 0$, $f(p) \ge 0$

$\Rightarrow f(\frac{1}{p}) < 0$ где p-простое $f(\frac{1}{p}) = -f(p)$

$\Rightarrow f(\frac{1}{5}) = -1$; $f(\frac{1}{7}) = -1$; $f(\frac{1}{11}) = -2$; $f(\frac{1}{13}) = -3$

$f(\frac{1}{17}) = -4$; $f(\frac{1}{19}) = -4$; $f(\frac{1}{23}) = -5$.

т.е. подходят пары числа: $x = 1, 2, 3$ $y = 5; 7; 11; 13;$ $17; 19; 23$ — $3 \cdot 7 = 21$ пара

$x = 5; 7$ $y = 11; 13; 17; 19; 23$ — $2 \cdot 5 = 10$ пар

$x = 11$ $y = 13; 17; 19; 23$ — 4 пары

$x = 13$ $y = 17; 19; 23$ — 3 пары

$x = 17; 19$ $y = 23$ — 2 пары.

~~т.е. всего $21 + 10 + 4 + 3 + 2 = 40$ пар.~~

~~Ответ: 40~~ пар.

Имеем $f(\frac{a}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a}) = f(1) = 0 \Rightarrow f(a) = -f(\frac{1}{a})$

для $x = 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24$. $y = 10, 14, 15, 20, 21, 22$ — 48 вар.

Для $x = 10, 14, 15, 20, 21$ $y = 22$ — 5 вар.

т.е. всего вар. $21 + 10 + 4 + 3 + 2 + 48 + 5 =$

$= 93$ пары.

Ответ: 93 пары.

☐ черновик   ☑ чистовик   Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

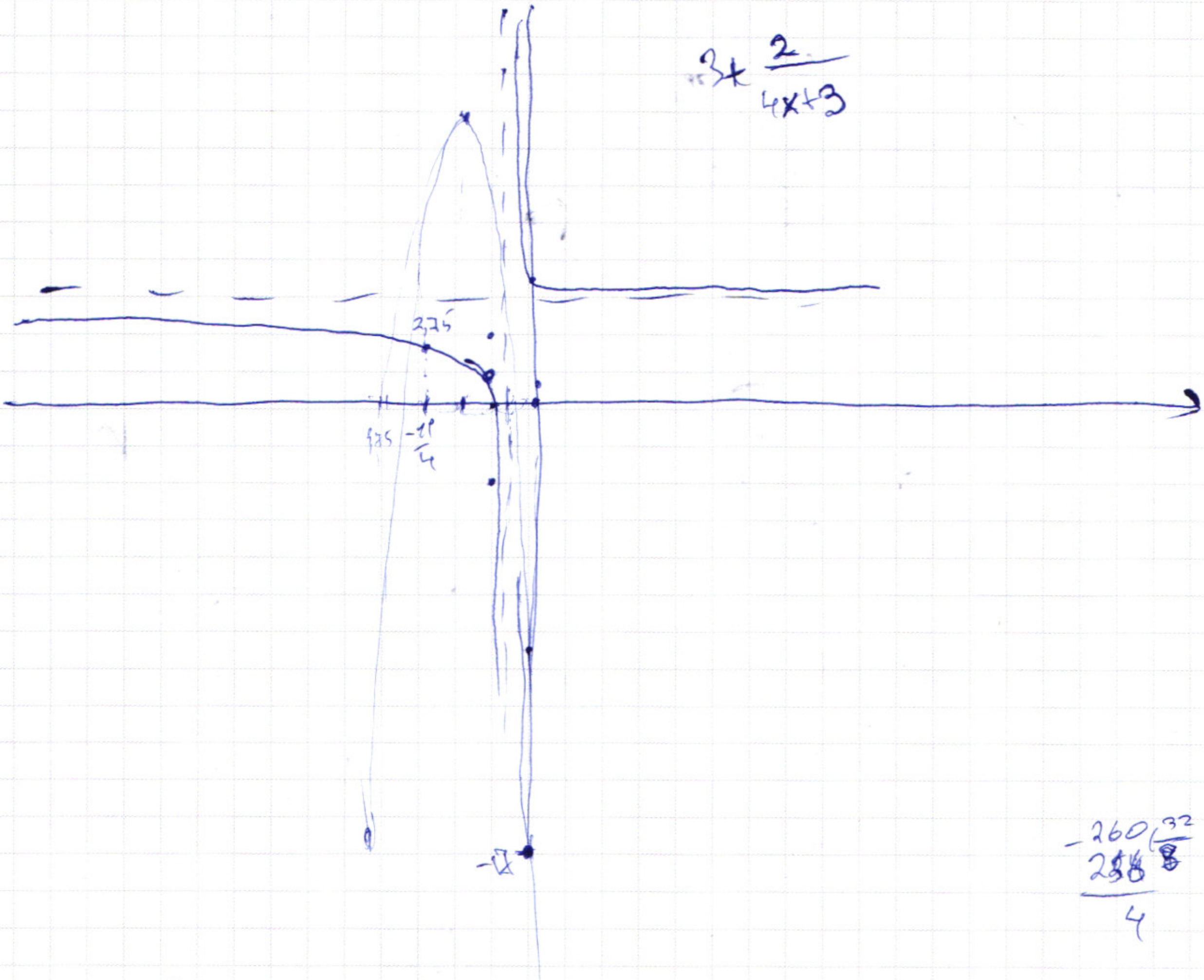
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3+\frac{2}{4x+3}$



$$\begin{array}{r} -260 \,|\, 32 \\ 256 \quad 8 \\ \hline 4 \end{array}$$

$$f(x_0) = -\frac{b^2}{4a} + c = \frac{-900}{-32} - 17 = 28{,}125 - 17 = 11{,}125$$

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{15}{17} \cdot \frac{85}{3} \cdot \frac{85}{3} \cdot$$

$$= \frac{85 \cdot 25}{12}$$

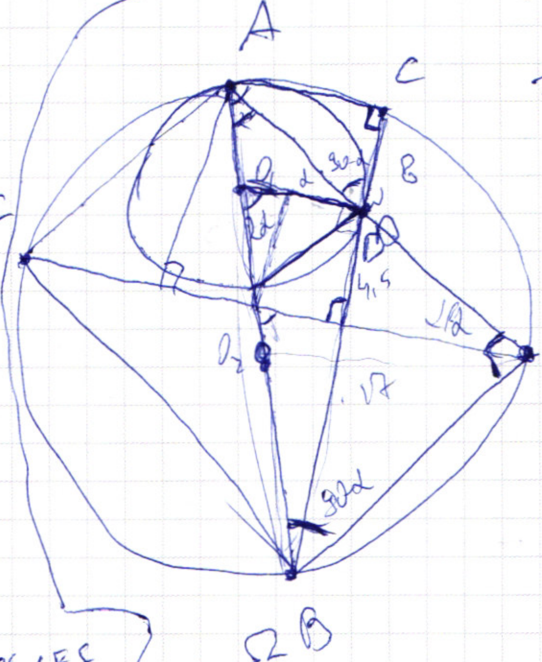
☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$\sin 2\alpha = \frac{\cancel{17}\cdot 15}{289} = \frac{15}{17}$ $\quad \frac{2R-2r}{2R}$ $\quad \frac{9}{25}$

$\cos 2\alpha = \frac{8}{17}$

ACHODHEF



$\frac{BD}{BC} = \frac{2R-r}{2R}$

$\frac{17}{25} = \frac{2R-r}{2R}$

$\sin\alpha = \sqrt{\frac{\cos 2\alpha + 1}{2}}$

$\sqrt{\frac{9}{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$34R = 50R - 25r$

$25r = 16R$

$R = \frac{25}{16}r$

$\sin\alpha = \frac{3}{\sqrt{34}} = \cos AFE$

$\cos = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$AFE = \arccos\frac{3}{\sqrt{34}}$

$AD^2 = (2R-2r)\cdot 2R$

$17^2 = 4R^2 - 4Rr$

$1 - \frac{8}{R} = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

$\frac{\frac{25}{8}-1}{\frac{25}{8}} = \frac{\frac{17}{8}}{\frac{25}{8}} = \frac{17}{25}$

$2R - r =$

$= \frac{17}{8}r = \frac{17}{8}\cdot\frac{17\cdot 16}{2\cdot 5\cdot 3} = \frac{289}{15}$

$17^2 = \frac{4\cdot 25^2}{16^2}r^2 - 4\cdot\frac{25}{16}r^2$

$\frac{25}{12}\cdot 2\sqrt{34}$

$17^2 = 4r^2\left(\frac{25^2}{16^2} - \frac{25}{16}\right)$

$85 \cdot 25 = 425 + 170 = 2125$

$\frac{17}{17} = 289 - 17 = 272$

$= \frac{25}{6}\sqrt{34}$

$17 = 4r^2\cdot\left(\frac{25\cdot 9}{16^2}\right)$

$\frac{\cancel{17}\cdot 16}{2\cdot 5\cdot 3} : \frac{15}{\cancel{17}\cdot 17} = \frac{8}{17}$

$\frac{17}{\cancel{136}}\cdot\frac{25}{46} =$

$17^2 = \frac{2^2 r^2\cdot 5^2\cdot 3^2}{16^2}$

$r = \sqrt{\frac{17^2\cdot 16^2}{2^2\cdot 5^2\cdot 3^2}} = \frac{17\cdot 16}{2\cdot 5\cdot 3} = \frac{272}{30} = \frac{136}{15}$

$3^{11} - 3$

$2^{11} - 2$

$(3-2)(3^{21} + 3\cdot 2 + 2^{21})$

$R = \frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{16}}\cdot\frac{17\cdot\cancel{16}}{2\cdot 5\cdot 3} = \frac{85}{6}$

$\frac{85}{3}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{85\cdot 5\cdot\sqrt{34}}{3\cdot 2\cdot 17} = \frac{25\sqrt{34}}{6}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\sin 2\alpha = x;\ \cos 2\beta = y.$

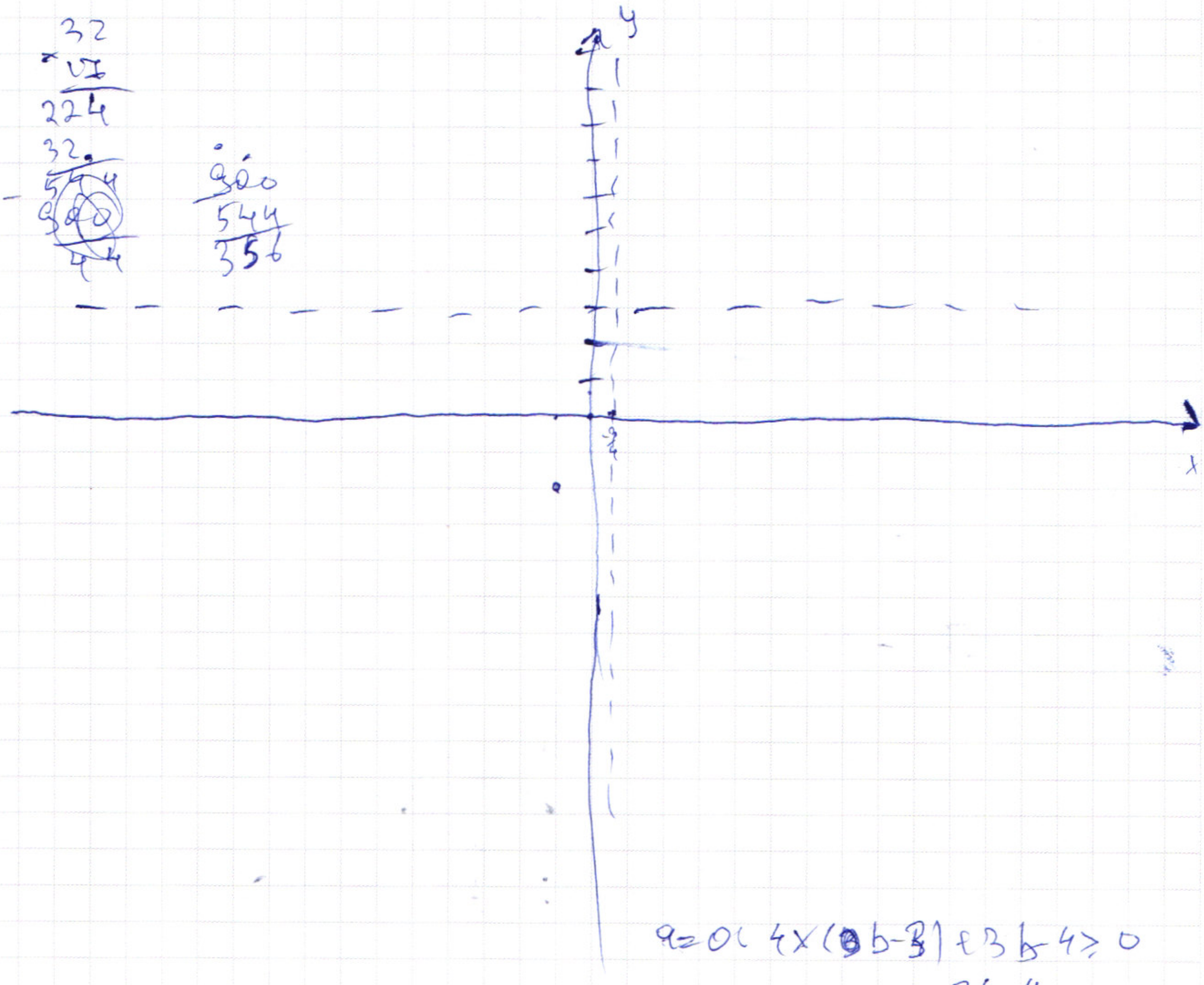
$$\begin{cases} (1-x^2)(1-y^2) = \frac{1}{5} + \frac{2xy}{\sqrt{5}} + x^2y^2 \\ \end{cases}$$

$\frac{30}{16} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8} = 1{,}875$

$$\frac{12x+4}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17.$$

$32 \cdot 7 = 224$

$900 - 544 = 356$



$a=0:\ 4x(3b-3)+3b-4 \ge 0$

$x \ge \frac{3b-4}{4b-3} = \frac{3}{4} - \frac{1{,}75}{4b-3}$

$12x+4 \le (ax+b)(4x+3)$

$12x+4 \le 4ax^2 + x(3a+4b) + 3b$

$4ax^2 + x(3a+4b-12) + 3b - 4 \ge 0$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5}$

$$\begin{cases} \sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin2\alpha\cos4\beta+\sin4\beta\cos2\alpha+\sin2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$2\sin2\alpha\cos2\beta\sin2\beta + 2\sin2\beta\cos2\alpha\cos2\beta+\sin2\alpha = -\frac{4}{5}$

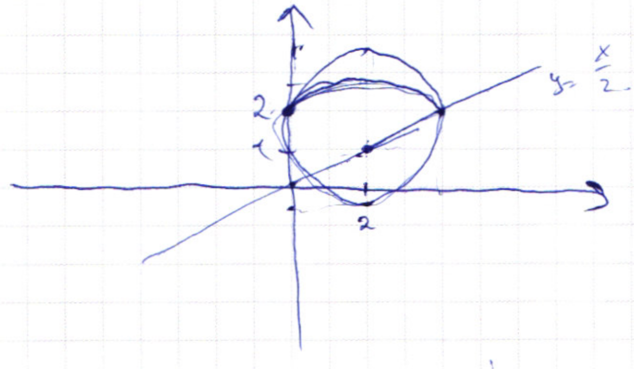
$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta+\sin2\beta\cos(2\alpha+2\beta)$

$= -\frac{1}{\sqrt5}\cos2\beta+\sin2\beta\cos(2\alpha+2\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5}$

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

$x^2-4y+4y^2 = xy-x-2y+2$



$x-2=a$; $y-1=b$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-4y+4y^2-xy+x+2y=2 \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$5y^2-16y-5x+xy=10$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

$f(\frac{1}{y}) = f(1) + f(\frac{1}{y}) =$

$f(1) = 0$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$12 \cdot 12$

$24 \cdot 6$

$= 2\sqrt{a^{\log_{12} 5+1}} = 2a^{\log_{12}\frac{60}{12}\cdot\frac{1}{2}}$

$\log_{12} 13 \cdot a^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1$

$-\sin(2\alpha+4\beta) \cdot \sin 2\alpha = \cos^2(2\alpha+2\beta) = \frac{\cos(4\alpha+4\beta)+1}{2}$

$-2\sin(2\alpha+4\beta) \cdot 2\sin 2\alpha = \cos(4\alpha+4\beta)+1$

$\cos 4\alpha \cos 4\beta - \sin 4\alpha \sin 4\beta + 1 + 2\sin 2\alpha \cos 4\beta + 2\sin 4\beta \cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha = 0$

$\log_{12} 5 \cdot a^{\log_{12}\frac{5}{12}} + 1 \geq \log_{12} 13 \cdot a^{\log_{12}\frac{13}{12}}$

$5^{\log_{12} a} \ln 5 + 1 \geq \log_{12} 13 \cdot a^{\log_{12}\frac{13}{12}}$

$\frac{25}{144}$

$a^{\log_{12} 5} + a \geq a^{\log_{12} 13}$

$\sin\alpha \cdot \sin\beta =$

$25 + 144 = 169$

$2\sin\frac{(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)}{2} \sin\frac{(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)}{2}$

$5^{\log_{12} a} =$

$324 + 576 = 900 = 30^2$

$= (12^{\log_{12} 5})^{\log_{12} a} =$

$y(x-2) - x + 2 = 0 \qquad x = 2$

$= a^{\log_{12} 5}$

$y = 1$

$x = \frac{-18 \pm 30}{2} = -24; 6$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2+18x=a,\ a>0$

$\begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab \\ a^2+9b^2=25 \end{cases},\ ab\geq 0$

$x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$5^{\log_{12}a}+a\geq a^{\log_{12}13},\ a\neq 1$

$(a-b)(a-4b)=0$

$a=b \quad a=4b$

$\left(5^{\log_{12}a}\right)^{\log_a 12}+a^{\log_a 12}\geq\left(a^{\log_{12}13}\right)^{\log_a 12}$

$a=b$:

$5+12\geq 13$

$17\geq 13$

$a\neq 1$

$10b^2=25$

$b=\pm\frac{5}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{2}=a$

$1+1\geq 1$ – нет

$a=4b$:

$12^{\log_{12}a\cdot\log_{12}5}$

$a^{\log_{12}5}$

$25b^2=25$

$x^2+18x\neq 1$

$a^0\geq a^{\log_{12}\frac{13}{12}}-a^{\log_{12}\frac{5}{12}}$

$x^2+18x-1\neq 0$

$b=\pm 1$

$a=\pm 4$.

$D=18\cdot 18+4=328=4\cdot 82$

$a^{\log_{12}\frac{5}{12}}\geq a^{\log_{12}\frac{13}{12}}-1 \quad x\neq -9\pm\sqrt{82}$

$x-1=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

Ответ: $x\in(-\infty;-18)\cup(0;+\infty)$

$y-1=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

$a^{\log_{12}5-1}\geq a^{\log_{12}13-1}-1 \quad 25+144=169 \quad a^{\log_{12}5-1}\geq \log$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

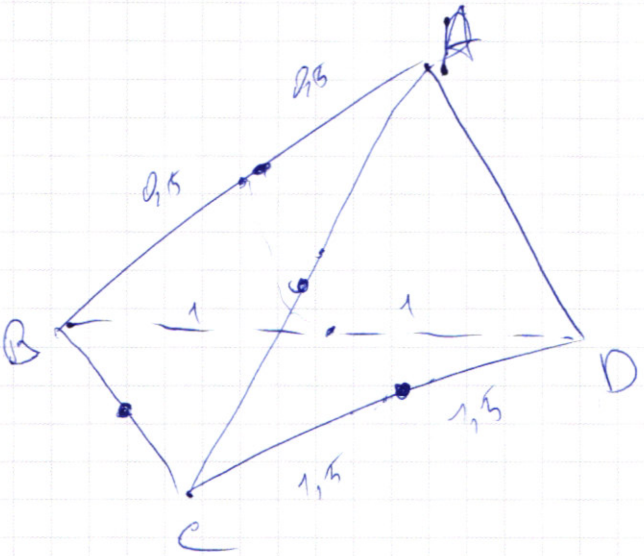
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$2\alpha = x$; $2\beta = y$

$$\begin{cases} \sin x \cos y + \sin y \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin x \cos 2y + \sin 2y \cos x + \sin x = -\frac{4}{5} \end{cases}$$