МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x - 3}{2x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$$

$$\Rightarrow \cos 2\beta = +\frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow 1^0\ \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow 2\beta = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$$

т.к. $\cos 2\beta > 0$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k \\ 2\alpha+2\beta = \pi-\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+2\pi k \end{array}\right.\quad k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha = -2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)-2\pi n+2\pi k \\ 2\alpha = \pi-2\pi n+2\pi k \end{array}\right.$$

Т.к. $2\pi n-2\pi k$ даёт тот же период, что и $2\pi k$, то заменим:

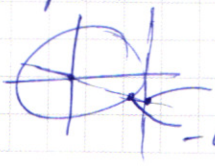
$$\left[\begin{array}{l} \alpha = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+\pi k \\ \alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k \end{array}\right.$$

При $\alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k$ $\operatorname{tg}\alpha$ не определён

При $\alpha = -\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)+\pi k$

$$\operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1-\sin^2\alpha}-1} = \pm\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{17}}-1} = \pm\frac{1}{4}$$

Но при таком α $\operatorname{tg}\alpha < 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}$



Т.к. периоды совпадают, $\operatorname{tg}\alpha$ не изменяется

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

2° $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

т.к. $\cos 2\beta > 0$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha + 2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k \\ 2\alpha + 2\beta = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k, \end{array}\right. k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha = 2\pi k - 2\pi n \\ 2\alpha = \pi + 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + 2\pi k - 2\pi n \end{array}\right.$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = \pi k \\ \alpha = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \pi k \end{array}\right.$$

При $\alpha = \pi k$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = 0$

При $\alpha = \frac{\pi}{2} + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \pi k.$

В нижней точке:

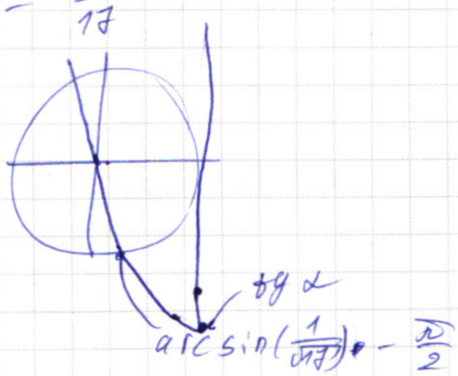
$\sin\alpha = \sin\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right) - \frac{\pi}{2}\right) =$

$= -\cos\left(\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) = -\sqrt{1 - \frac{1}{17}} =$

$= -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{1-\sin^2\alpha} - 1} = \pm\sqrt{\frac{1}{1-\frac{16}{17}} - 1} =$

$= \pm 4$



Но при таком α $\operatorname{tg}\alpha < 0$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -4$

т.к. других случаев нет, то:

Ответ: $0;\ -\frac{1}{4};\ -4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$\exists\ x^2+6x=a$

$\begin{cases} a>0 \\ a\neq 1 \\ 3^{\log_4 a}+a \geq a^{\log_4 5} \end{cases}$, т.к. $a>0$ $|a|=a$

$\begin{cases} a=4^{\log_4 a} \\ a^{\log_4 5}=5^{\log_4 a} \end{cases} \Rightarrow 3^{\log_4 a}+4^{\log_4 a} \geq 5^{\log_4 a}$

$\exists\ \log_4 a = t$

$\Rightarrow 3^t+4^t \geq 5^t$. Заметим, что равенство достигается при $t=2$ $(3^2+4^2=5^2)$. Т.к. $3^t - \uparrow$ и $4^t - \uparrow$, то $(3^t+4^t) - \uparrow$ (возрастающая функция)

При $t<2$, н-п. $3+4>5$

При $t>2$, н.п $3^3+4^3<5^3$

$\Rightarrow$ Нер. во выполняется только при $t\leq 2$

$\Rightarrow \log_4 a \leq 2$

$\begin{cases} a \leq 16 \\ a\neq 1 \\ a>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2+6x-16\leq 0 \\ x^2+6x>0 \\ x^2+6x-1\neq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{D}{4}=9+16=25 \\ x(x+6)>0 \\ \frac{D}{4}=10 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} x_{1,2} = -3 \pm 5 = 2; -8 \\ x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \\ x \neq -3 \pm \sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \in [-8; 2] \\ x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \\ x \neq -3 \pm \sqrt{10} \end{cases}$$

т.к. $\sqrt{10} \approx 3,1$, то $-3-\sqrt{10} < -6$, и $-3-\sqrt{10} > -8$

$-3+\sqrt{10} \approx 0,1 \Rightarrow -3+\sqrt{10}$ находится между 0 и 2

$\Rightarrow$ Ответ: $x \in [-8; -3-\sqrt{10}) \cup (-3-\sqrt{10}; -6) \cup$

$\cup (0; -3+\sqrt{10}) \cup (-3+\sqrt{10}; 2]$

№4

Дано: AB – диаметр Ω

$EF \perp BC$. BC касается ω

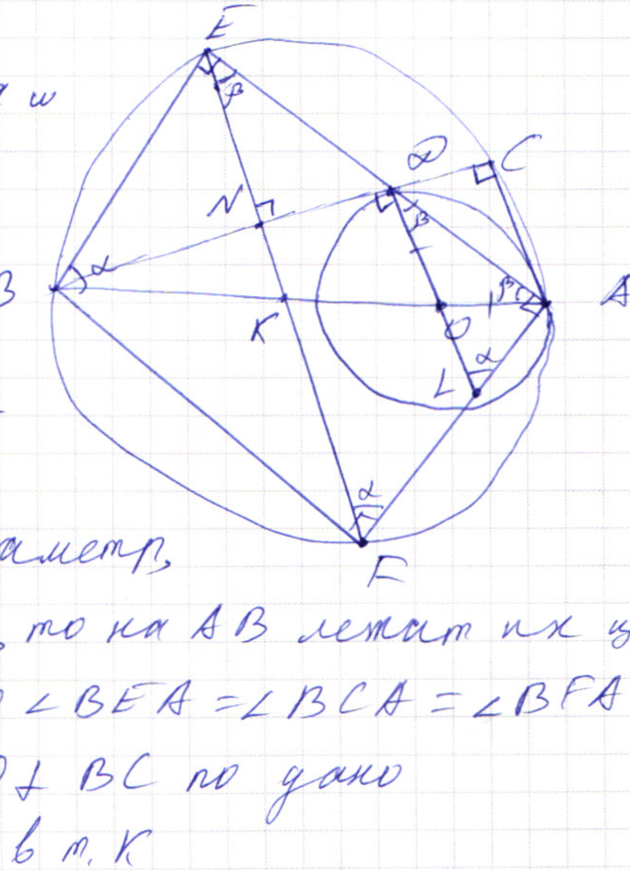
$CD = \frac{5}{2}$ $BD = \frac{13}{2}$

т. A – т. кас. окр.

Найти: R; r, $\angle AFE$,

S_{AEF}, где R – рад. Ω

r – рад. ω



Решение: т.к. AB – диаметр,

а A – т. кас. двух окр., то на AB лежат их центры.

т.к. AB – диаметр, то $\angle BEA = \angle BCA = \angle BFA = 90°$

$\exists$ т. O – центр. $\omega \Rightarrow OD \perp BC$ по дано

$\exists$ $EF \cap BC$ в т. N, а AB в т. K.

$\exists \angle EBA = \alpha$, и $\angle FEA = \beta$

Заметим, что $OD \parallel EF$, т.к. они оба $\perp BC$.

Продлим DO до $\cap$ с AF в т. L

$\angle EBA = \angle EFA$, как вписанные, опирающиеся

на $\cup AE \Rightarrow \angle EFA = \alpha$. $\angle DLA = \alpha$, т.к. $DL \parallel EF$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(\frac{x}{y} \cdot k\right) - f(k)$

при $k = y$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

т.е $f(y)$ должно быть больше $f(x)$

У нас 1 f даёт 5 $\Rightarrow$ при $f(y) = 5$ все x с меньшим $f(x)$ подходят. аналогично:

$24 + 22 \cdot 2 + 2 \cdot 20 + 3 \cdot 17 + 7 \cdot 10 = 229$

Ответ: 229 пар.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\angle ODA = \beta$, т.к. $DO \parallel EK$

т.к. O – ц. ω, то $DO = OA \Rightarrow \triangle AOD$ – равнобед.

$\Rightarrow \angle DAO = \beta$, но из $\triangle BEA$ $\angle BAE = 90 - \alpha$

$\Rightarrow 90 - \alpha = \beta \Rightarrow \alpha + \beta = 90^\circ \Rightarrow \angle DAL = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle EAF$ опирается на диаметр $\Rightarrow EF$ – диаметр. $\Rightarrow K$ – т. $\cap$ диаметров $\Rightarrow K$ – ц. Ω

$\cos\alpha = \frac{EB}{2R}$ из $\triangle EAB$

~~$\angle BED = 90 - \beta = \alpha \Rightarrow$ в $\triangle EDB$ $\sin\alpha =$~~

$\angle BDE = 90 - \beta = \alpha \Rightarrow$ в $\triangle BED$ $\sin\alpha = \frac{EB}{BD}$

$\angle CBA = \alpha - \beta = 2\alpha - 90^\circ$

$\cos(2\alpha - 90^\circ) = \frac{BC}{2R}$

$\sin 2\alpha = \frac{9}{2R}$

$2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{9}{2R}$

$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{9BD}{4REB}$

$\Rightarrow \frac{9BD}{4R \cdot EB} = \frac{EB}{2R}$

$9BD = 2EB^2$

$\Rightarrow EB = \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \frac{13}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{13}$

$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{13}}{\frac{13}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{EB}{2R}$

$4R = \sqrt{13}\, EB$

$R = \dfrac{\frac{3}{2}\cdot 13}{4} = \dfrac{39}{8}$

В $\triangle BDO$ $\quad DO = \sqrt{BO^2 - BD^2}$. Заметим, что $KO = R - r$

$\Rightarrow DO = \sqrt{(2R-r)^2 - \left(\frac{13}{2}\right)^2} = r$

$4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2} - \frac{169}{4} = \cancel{r^2}$

$r = R - \dfrac{169}{16R} = \dfrac{845}{312} = \dfrac{65}{24}$

$\alpha = \arcsin \dfrac{3}{\sqrt{13}}$

$S_{EAF} = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot EB \cdot 2R = \dfrac{117}{16}$

Ответ: $R = \dfrac{39}{8}$; $r = \dfrac{65}{24}$; $\alpha = \arcsin\dfrac{3}{\sqrt{13}}$

$S_{AEF} = \dfrac{117}{16}$

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$, где p – простое.

,	2	3	5	7	11	13	17	19	23
f	0	0	1	1	2	3	4	4	5

Найдём все f через них

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$		
$f(6) = 0$	$f(15) = 1$	$f(24) = 0$
$f(8) = 0$	$f(16) = 0$	$f(25) = 2$
$f(9) = 0$	$f(18) = 0$	$f(26) = 3$
$f(10) = 1$	$f(20) = 1$	$f(27) = 0$
$f(12) = 0$	$f(21) = 1$	
$f(14) = 1$	$f(22) = 2$	

0 ; 10
1 ; 7
2 ; 3
3 ; 2
4 ; 2
5 ; 1

$f(ab) - f(a) = f(b)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \qquad 3y-2x\geq 0 \quad y\geq \frac{2x}{3}$$

$$\begin{cases} 9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9y^2+4x^2-15xy+2x+3y-2=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=0 \end{cases}$$

$$-9y^2-9x^2+18x+12y+12=0$$

$$-5x^2-15xy+20x+15y+10=0$$

$$x^2+3xy-4x-3y-2=0$$

$$x^2+x(3y-4)-(3y+2)=0$$

$$D=9y^2-24y+16+4(3y+2)=9y^2-12y+24=$$

$$=(3y-2)^2+20>0$$

$\cancel{(2x-3}$

$$3y(x-1)=-x^2+4x+2$$

$$y=\frac{x^2-4x-2}{3(1-x)}\geq\frac{2x}{3}$$

$$x^2-6x-2\geq 0$$

$$(x-3)^2-11\geq 0$$

$$(x-3)^2\geq 11$$

$$\Rightarrow x\in[-\infty;-\sqrt{11}+3]\cup[\sqrt{11}+3;+\infty)$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$$

$x^2+6x=t \qquad (x+3)^2=t+9 \geq 0 \Rightarrow t \geq -9$

$3^{\log_4 t}+t \geq |t|^{\log_4 5} \qquad t>0$

$t \geq |t|^{\log_4 5}-3^{\log_4 t} \qquad t \neq \pm 1$

$v^{\log_a u}=u^{\log_a v}$

$\log_a v \cdot \log_a u=\log_a u \cdot \log_a v$

$t \geq |t|^{\log_4 5}-t^{\log_4 3}$

$t \geq t^{\log_4 5}-t^{\log_4 3}$

$\log_4 5>\log_4 3$

$t \geq t^{\log_4 3}\left(t^{(\log_4 5-\log_4 3)}-1\right)$

$t \geq t^{\log_4 3}\left(t^{\log_4 \frac{5}{3}}-1\right)$

$4^{\log_4 t} \geq t^{\log_4 3}\left(t^{\log_4 \frac{5}{3}}-1\right)$

$4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}-3^{\log_4 t}$

$\log_4 t=\cancel{0}\, a$

$4^a \geq 5^a-3^a$

$4^a+3^a-5^a \geq 0$

$4^a+3^a \geq 5^a$, т.к $4^a \nearrow$, $3^a \nearrow$, то и $4^a+3^a \nearrow$

равенство при $a=2$ $\quad 4^2+3^2=5^2$

при $a=3$ $\quad \cancel{16}\ 64+27 \vee 125$

$64+27<125$

$\Rightarrow a \leq 2 \Rightarrow \log_4 t \leq 2$

$\begin{cases} t \leq 16 \\ t>0 \\ t \neq 1 \end{cases} \Rightarrow t \in (0;1) \cup (1;16]$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+6x>0 \\ x^2+6x<1 \end{cases} \quad D=36+4=32=2^5 \\ \begin{cases} x^2+6x>1 \\ x^2+6x \leq 16 \end{cases} \quad \cancel{D=32}\ D= \end{array}\right.$

$x(x+6)>0$

$x_{1,2}=\frac{-6 \pm 4\sqrt{2}}{2}=-3 \pm 2\sqrt{2}$

$x=-3 \pm 2\sqrt{2}$

$x^2+6x-1<0$

$\frac{D}{4}=9+1=10$

$x_{1,2}=-3 \pm \sqrt{10}$

$\Rightarrow \begin{cases} x \in (-3-\sqrt{10};\ \cancel{0}\ -3+\sqrt{10}) \\ x \in (-\infty;-6) \cup (0;+\infty) \end{cases}$

$\Rightarrow x \in (-3-\sqrt{10};-6) \cup (0;-3+\sqrt{10})$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

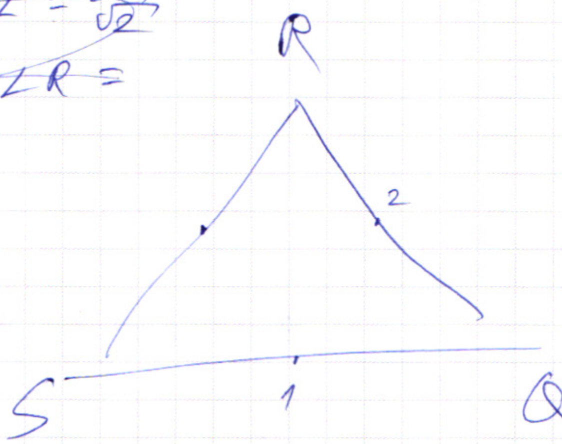
ШИФР

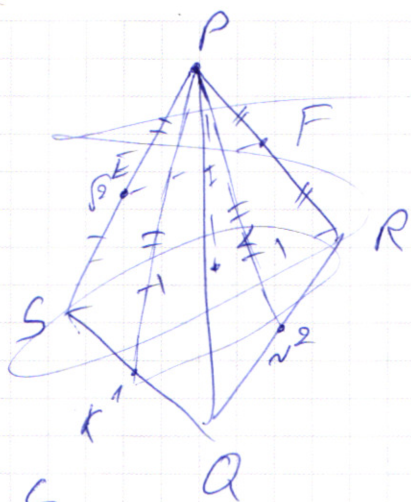
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$PL = \frac{1}{\sqrt{2}}$~~

~~$\Rightarrow LR =$~~



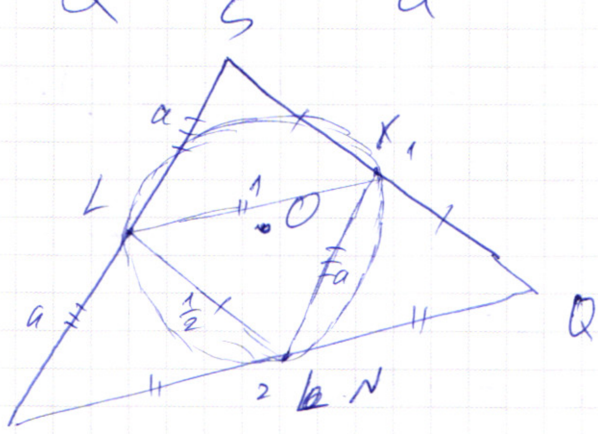


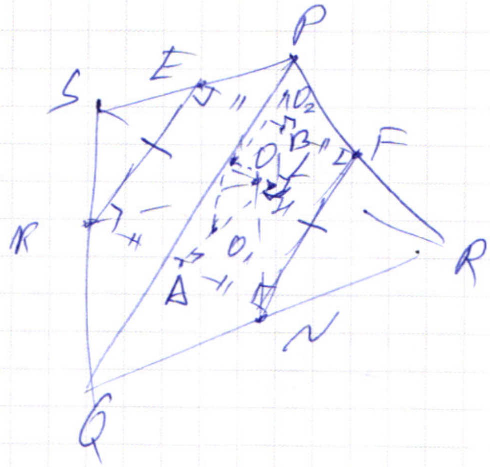
~~$O_2 \in$~~ $\perp KN$

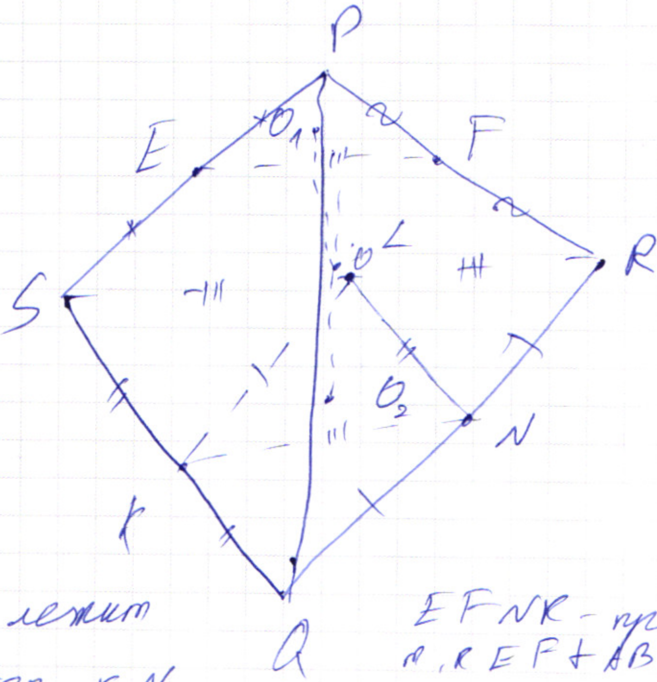
Если O_1O и $OO_2 \perp$, то т. $O_1, O, O_2 \in 1$ пл α, которая $\perp (RSQ)$ и и (SPR)

$\exists O_1H \perp SR \Rightarrow O_2H \perp SR$, R

т.к. $OH \perp SR$







$\Rightarrow O_1H \perp KN$ в т. A, но O_1 лежит на сер. перп. к $KN \Rightarrow A$ — сер KN

~~$\Rightarrow H$ — сер SR~~ Также $EF = KN$

$EFNK$ — прям т.к. $EF \parallel AB$

$\Rightarrow PQ \perp SR$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$$

$$\cos 2\beta = +\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha) = -\cos\alpha$

$\cos(\arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}})) = \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

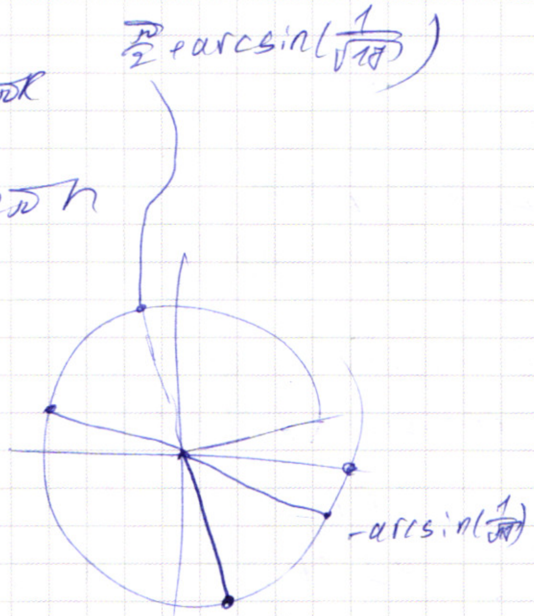
1^0 $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow 2\beta = \arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}})$

$\cancel{\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}}}$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = -\arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}})+2\pi k \\ 2\alpha+2\beta = \pi+\arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}})+2\pi k \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = -2\arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}})+2\pi n \\ 2\alpha = \pi+2\pi n \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \alpha = -\arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}})+\pi k \\ \alpha = \frac{\pi}{2}+\pi n \end{array}\right.$$



$\cancel{\Rightarrow \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}}$

~~при~~ $\cancel{\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}}$

$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(-\arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}})) =$

$=.$

$2\beta = \pi - \arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}}) + 2\pi k$

$\operatorname{tg}^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$ $\qquad 1-\sin^2 x = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x+1}$

$\operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{1-\sin^2 x} - 1$

$\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1-\frac{1}{17}}-1} = \sqrt{\frac{17}{16}-1} = -\frac{1}{4}$

$\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{\frac{1}{1-\frac{16}{17}}-1} = -\sqrt{17-1} = -4$

2^0 $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow$ Ответ: $0; -4; -\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha = 2\pi k \\ 2\alpha = \pi + 2\arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}}) + 2\pi n \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} \alpha = \pi k \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ \alpha = \frac{\pi}{2}+\arcsin(\frac{1}{\sqrt{17}})+\pi n \end{array}\right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{\cancel{8}4}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{\cancel{8}4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta)$

1° $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow \sin(2\alpha+4\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \sin 2\beta\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{17}$

$\cos 2\beta = \cos(2\alpha+2\beta)$

$\Rightarrow 2\alpha = 2\pi k \Rightarrow \alpha = \pi k \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0$

2° $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta - \sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

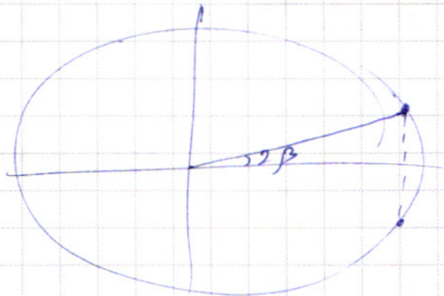
$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \left(\frac{-4}{\sqrt{17}}\right. +$

$1^0\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow 2\alpha = 2\pi k$

$\Rightarrow \alpha = \pi k \Rightarrow tg\alpha = 0.$

$2^0\ \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$



$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \left(\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$-\frac{4}{17} \pm \frac{4}{17} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2.1^0\ \cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$, но $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow 2\alpha = 2\pi k \Rightarrow tg\alpha = 0$

$2.2^0\ \cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$-\frac{8}{17} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha = 0$

$2\alpha = \pi k$

$\alpha = \frac{\pi k}{2}$

$1^0\ \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha =$

$= -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\cancel{\sin}\cos 2\alpha =$

$= -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{4\sin 2\alpha +}$

$1.1^0\ \cos 2\alpha = 0 \Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$

$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{2}$

$\Rightarrow \sin 2\alpha = \pm 1$

$\Rightarrow \sin(2\alpha+2\beta) = \pm\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\varnothing$

$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha + 2\beta = \arcsin(-\frac{1}{\sqrt{17}}) + 2\pi n \\ 2\alpha + 2\beta = \pi + \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}} + 2\pi n \end{array}\right.$

$\Rightarrow \cos 2\alpha \neq 0 \Rightarrow$ ~~поделим~~

$\sin(2\alpha + \gamma) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$,

~~где $\gamma = 2\beta$~~

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} x^2+6x-1>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-3-\sqrt{10})\cup(-3+\sqrt{10};+\infty) \\ x^2+6x-16\le 0 \Rightarrow x\in[-8;2] \end{cases}$

$\frac{D}{4}=9+16=25 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\in[-8;-3-\sqrt{10})\cup(-3+\sqrt{10};2] \\ x\in(-3-\sqrt{10};-6)\cup(0;-3+\sqrt{10}) \end{array}\right.$

$x_{1,2}=-3\pm5=2;-8$

$\Rightarrow$ Ответ: $x\in[-8;-3-\sqrt{10})\cup(-3-\sqrt{10};-6)\cup(0;-3+\sqrt{10})\cup(-3+\sqrt{10};2]$

$KO_2=R-r$

$\frac{BN}{ND}=\frac{R}{R-r}$

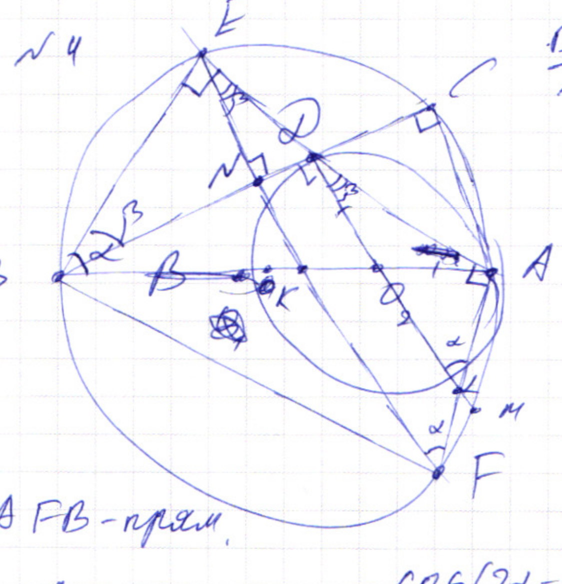
$BN+ND=\frac{13}{2}$

$ND\left(\frac{R}{R-r}+1\right)=\frac{13}{2}$

Найти: R и r, $\angle AFE$

S_{AFE}

№4



$CD=\frac{5}{2}$ $BD=\frac{13}{2}$

$\Downarrow$

$CB=9$

$O_2D\perp BC \Rightarrow O_2D \parallel EF$

$O_2D=r=O_2A \Rightarrow EAFB$ - прям.

$\angle EBA=\angle EFA=\angle DLA$

$\triangle ADL \sim \triangle AEF \Rightarrow \frac{AD}{AE}=\frac{AL}{AF}=\frac{DL}{EF}$

$\cancel{\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{BC}{2R} \Rightarrow \cos\alpha=\frac{9}{2R}}$

$\angle ABD=\pi-90+\alpha-\beta-90=\alpha-\beta$

$\cos\beta=\frac{EB}{BD}$

$90-\alpha=\beta \Rightarrow \alpha+\beta=90$

$\Rightarrow \beta=90-\alpha \Rightarrow \angle EAF=90^\circ$.

$\Rightarrow EF$ - диаметр

$\cos(\alpha-\beta)=\frac{9}{2R}$

$\Rightarrow \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\frac{EB}{BD} \Rightarrow \sin\alpha=\frac{EB}{BD}$

$\cos(2\alpha-\frac{\pi}{2})=\frac{9}{2R}$

$\Rightarrow \sin 2\alpha=\frac{9}{2R}$

$\Rightarrow 2\cdot\frac{EB}{BD}\cdot\cos\alpha=\frac{9}{2R}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$ND = \frac{\frac{13}{2}(R-r)}{R+R-r} = \frac{13(R-r)}{2(2R-r)}$$

$$\Rightarrow BN = \frac{13R}{2(2R-r)}$$

$$S_{AEF} = \frac{EB \cdot EA}{2} = \frac{1}{2} \cdot EB \cdot 2R\sin\alpha = \frac{3}{2}\sqrt{13} \cdot \frac{39}{8} \cdot \frac{3}{\cancel{\sqrt{13}}} = \frac{117}{16}$$

$$CA = \sqrt{4R^2 - 81}$$

$$O_2D = \sqrt{(2R-r)^2 - \frac{169}{4}} = r$$

$$\frac{O_2D}{R}$$

$$4R^2 - 4Rr + \cancel{r^2} - \frac{169}{4} = \cancel{r^2}$$

$$16R^2 - 16Rr - 169 = 0$$

$$r = \frac{-169 + 16R^2}{16R} = R - \frac{169}{16R}$$

$$\cos\alpha = \frac{EB}{2R}$$

$$\cos\alpha = \frac{9BD}{4R\,EB}$$

$$\begin{array}{r} 39 \\ \times\, 39 \\ \hline 351 \\ 117 \\ \hline 1521 \end{array}$$

$$EB^2 \cdot \cancel{4R}^{2} = \cancel{2}R \cdot 9BD$$

$$EB = \sqrt{\frac{9 \cdot \frac{13}{2}}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{13}$$

$$\sin\alpha = \frac{EB}{BD} = \frac{\frac{3}{2}\sqrt{13}}{\frac{13}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{13}} = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{EB}{2R}$$

$$\Rightarrow 4R = EB \cdot \sqrt{13}$$

$$R = \frac{EB \cdot \sqrt{13}}{4} = \frac{\frac{3}{2} \cdot 13}{4} = \frac{39}{8} \approx 4{,}9$$

$$\Rightarrow r = \frac{39}{8} - \frac{169}{2 \cdot 39} = \frac{39^2 - 169 \cdot 4}{8 \cdot 39} = \frac{1521 - 676}{312} = \frac{921 - 76}{312} = \frac{851 - 6}{312} = \frac{845}{312} = \frac{169 \cdot 5}{3 \cdot 104} = \frac{13^2 \cdot 5}{3 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot \cancel{13}} = \frac{65}{24} \approx 2{,}7$$

$\Rightarrow$ Ответ: $R = \frac{39}{8}$; $r = \frac{65}{24}$

$$\alpha = \arcsin\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$S_{EAF} = \frac{117}{16}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5   2 3 5 7 11 13 17 19 23

f   0 1 1 2 3 4 4 5

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/4]$, для p – пр.

$\begin{cases} x\in[3;27] \\ y\in[3;27] \\ x,y\in\mathbb{N} \\ f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \end{cases}$

$f(a)=f(ab)-f(b)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(\frac{x}{y}k\right)-f(k)$

при $k=y$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)$

1; 7

0; 10

2; 3

3; 2

4; 2

5; 1 $\Rightarrow S=25$

$\exists f(y)=5$

$\Rightarrow f(x)$ что либо из 24 случаев.

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=$

$f(4)=f(3)+f\left(\frac{4}{3}\right)=f(2)+f(2)=0$

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(8)=f(4)+f(2)=0$

$f(9)=f(3)+f(3)=0$

$f(10)=f(5)+f(2)=1$

$f(12)=f(4)+f(3)=0$

$f(14)=f(7)+f(2)=1$

$f(15)=f(5)+f(3)=1$

$f(16)=f(4)+f(4)=0$

$f(18)=f(9)+f(2)=0$

$f(20)=f(10)+f(2)=1$

$f(21)=f(7)+f(3)=1$

$f(22)=f(2)+f(11)=2$

$f(24)=f(2)+f(12)=0$

$f(25)=f(5)+f(5)=2$

$f(26)=f(2)+f(13)=3$

$f(27)=f(3)+f(9)=0$

$24+22\cdot2+2\cdot20+\cancel{3\cdot17}+\cancel{10\cdot7}$

$3\cdot17+7\cdot10$

$24+44+40+51+70=68+91+70=159+70=229$

$\Rightarrow$ Ответ: 229 случаев/пар

№ 6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

$$\begin{cases} \dfrac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \\ ax+b \geqslant 8x^2-34x+30 \end{cases}$$

$x \in (1;3]$

$\cancel{\Rightarrow b=2,\ a=0}$

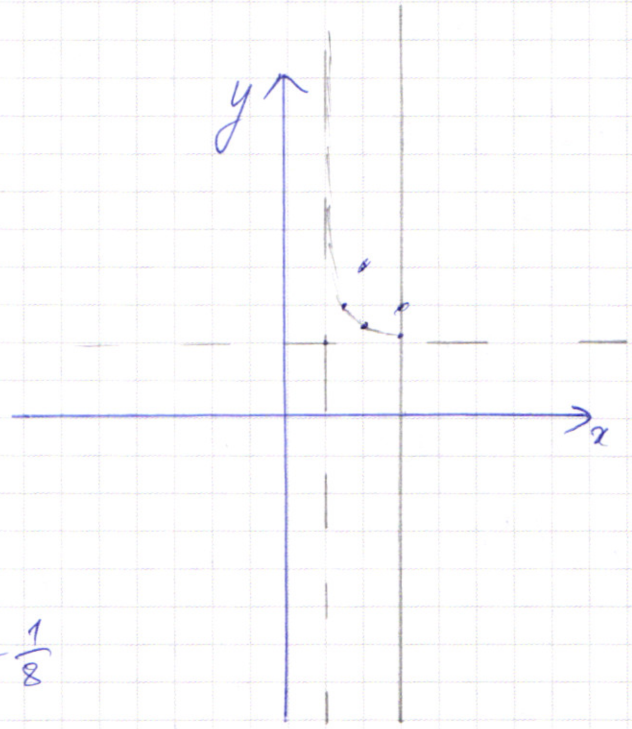
$\cancel{x=\frac{y-b}{a}=3}$

$\cancel{y=3a+b}$

$f(x)=2+\frac{1}{2x-2}=2+\frac{1}{2(x-1)}$

$g(x)=8x^2-34x+30$

$f(3)=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$



$f'=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}\right)'=$

$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-1}{(x-1)^2}\right)$

$f'(3)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{8}$