МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant\left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

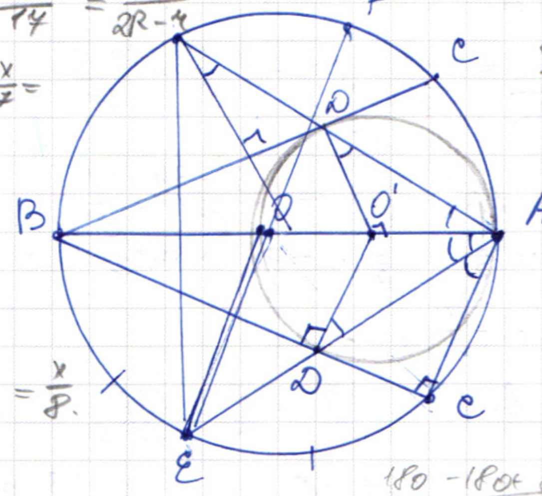
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

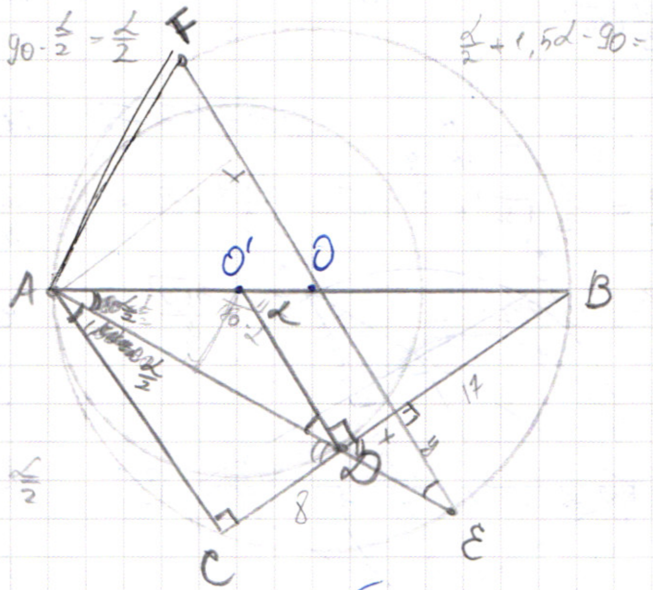
$\frac{17-x}{17}=\frac{R}{2R-y}$

$1-\frac{x}{17}=$

$90-\frac{\alpha}{2}+x=\alpha$ $\quad 90+x=1,5\alpha,\quad x=1,5\alpha-90$

$90-90\cdot\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}$ $\quad \frac{\alpha}{2}+1,5\alpha-90=$





$\frac{y}{AC}=\frac{x}{8}.$

$\frac{180-180+\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}$

$\frac{y}{AC}=\frac{2R-y}{2R}$

$\frac{y}{AC}=\frac{17}{25}=\frac{2R-y}{2R}$ $\quad 25^2+AC^2=4R^2$ $\qquad R=\frac{25}{16}\cdot\frac{136}{15}=\frac{25\cdot17\cdot8}{16\cdot15\cdot3}=\frac{5\cdot17}{6}=$

$34R=50R-25y$ $\quad 25y=16R$ $\quad y=\frac{16}{25}R=0,64R.$

$\frac{0,64R}{AC}=\frac{}{7}$ $\quad AC^2=4R^2-25^2$ $\qquad \frac{25\cdot63}{2\cdot85\cdot64}= =\frac{15}{17}$

$\frac{16^2R^2}{25^2(4R^2-25^2)}=\frac{17^2}{25^2}$ $\quad 16^2R^2=17^2\cdot4\cdot R^2-17^2\cdot25^2$

$(17\cdot25)^2=(34-16)(34+16)R^2=18\cdot50R^2=900R^2$

$R=\frac{30}{17\cdot25}=\frac{6}{17\cdot5}=\frac{17\cdot5}{6}=\frac{50+35}{6}=\frac{85}{6}=14\frac{1}{6}.$

$\frac{y}{AC}=\frac{17}{25}=\frac{O'B}{2R}$ $\quad O'B=2R-y$ $\quad 1-\frac{y}{2R}=\frac{17}{25}$ $\quad \frac{8}{25}=\frac{y}{2R}$

$y=\frac{16}{25}R.$ $\qquad \frac{17}{8}$, 136

$AC^2=4R^2-625=\frac{625\cdot4}{64\cdot4}y^2-625=25^2\left(\frac{y^2}{64}-1\right)=$

$=\frac{25^2(y^2-64)}{8^2}$ $\qquad \frac{y^2\cdot8^2}{25^2(y^2-64)}=\frac{17^2}{25^2}$

$17^2y^2-17^2 8^2=y^2\cdot8^2;$ $\quad (17-8)(17+8)y^2=17^2\cdot8^2$

$y^2\cdot9\cdot25=(15y)^2=(17\cdot8)^2$ $\quad y=\frac{136}{15}=9\frac{1}{15}.$

$\frac{136}{15AC} = \frac{17}{5\cancel{25}} = \frac{17\cdot 8}{3\cancel{15}AC}$ $AC = \frac{40}{3}$ $\frac{3y}{40} = \frac{x}{8} \,|\cdot 40$ $3y = 5x$.

$x = 0,6y$ $0,36y^2 + y^2 = 1,36y^2 = 0,1^2$ $136y^2 = 0,2^2 \cdot 34y^2$.

$\frac{0,2y\sqrt{34}}{AD} = \frac{3y}{40}$ $AD = \frac{0,2\sqrt{34}\cdot 40}{3} = \frac{8}{3}\sqrt{34}$.

$\frac{y}{\frac{4}{3}\sqrt{34}} = \frac{0,2y\sqrt{34}}{4}$ $4 = 34\cdot\frac{4}{15} = \frac{7\cdot 8}{15}$

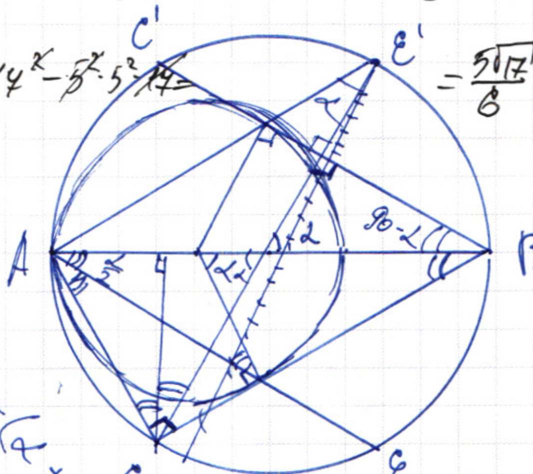
$\frac{y}{AC} = \frac{16}{9}$ $y = \frac{40}{3}\cdot\frac{16}{9} = \frac{40\cdot16}{27}$

$\frac{R-y}{4} = \frac{R}{2R-4}$. ~~$2R^2 = 4R - 2$~~ $2R^2$

$AE = \frac{8}{3}\sqrt{34} + \frac{3}{2}\sqrt{34} = \frac{16+9}{6}\sqrt{34} = \frac{25}{6}\sqrt{34}$ $AB = \frac{85^2}{6^2} - \frac{25^2\cdot 34}{6^2} = \frac{1}{6^2}$

$90 - \alpha = \frac{\alpha}{2}$ $\frac{3}{2}\alpha = 90$ $\alpha = 60$

$5^2\cdot 17^2 - 5^2\cdot 5^2\cdot 17 = \frac{5\sqrt{17}}{6}$



$4 = R - \frac{4}{2}$.

$R = \frac{3}{2}4$. $\frac{85}{6} = \frac{3}{2}\cdot\frac{136}{15\cdot 5}$

$\frac{17\cdot 25}{30} - \frac{3}{2}\cdot\frac{17\cdot 16}{30}$ $3EH\cdot 16 = 9\cdot 40$

$25 = 3\cdot 8$! нет. $EH = 7,5$

$EH = \frac{16}{9}\cdot\frac{3}{40}$

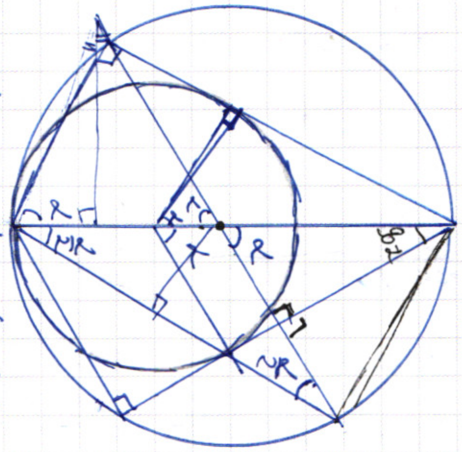
$= \frac{AC}{EH} = \frac{40}{3EH}$

$180 - (\alpha + 180 - 2\alpha) = 180 - \alpha - 180 + 2\alpha = \alpha$

$DE = \frac{8\cdot 17}{\frac{8}{3}\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{17}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{34}$

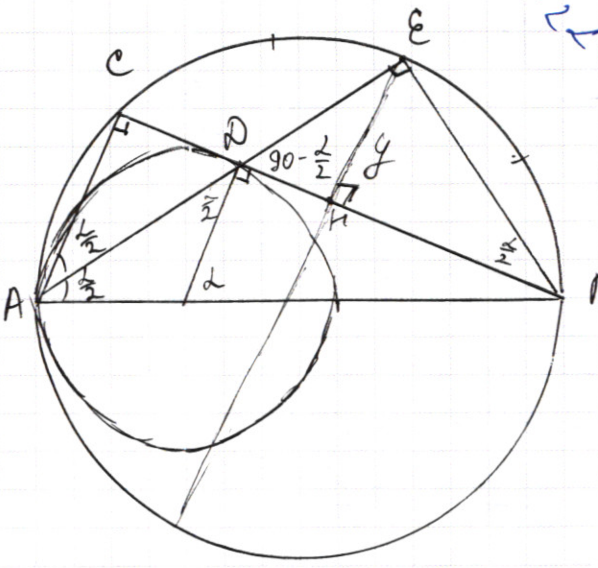
$\frac{BD}{AD} = \frac{DE}{8}$. $\frac{DE}{AD} = \frac{\frac{8}{3}}{\frac{3}{2}} = \frac{16}{9}$.

$90 - \alpha + 90 - \alpha + \alpha + \alpha +$



$AD = \left(\frac{40}{3}\right)^2 + 8^2 = \frac{1}{9}(40^2 + 42^2) = \frac{8^2}{9}(5^2 + 9^2) =$

$81 + 25 = 86 + 20 = 106$



$8^2 + \frac{40^2}{3^2} = 8^2\left(\frac{9+5}{9}\right) = \frac{8}{3}\sqrt{34}$.

$2\left(90 - \frac{\alpha}{2}\right) = 180 - \alpha$

$90 - \frac{\alpha}{2}$

$\frac{108/5}{5/3} -$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\cancel{2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5}}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{4\,2}{\sqrt5}$

$\cancel{-}\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta=\cancel{-}\frac{2}{5}$ $\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$ $2\beta\in\left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right)$

$\cancel{\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\cos 2\alpha\sin 2\beta}$ $\beta\in\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n;\ \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$

$2\alpha+2\beta\in(\pi+2\pi n;\ 2\pi+2\pi n)$ $\alpha+\beta\in\left(\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi+\pi n\right)$

$\cos 4\beta=2\cos^2 2\beta-1.=2\cdot\frac{4}{5}-1=\frac{3}{5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\alpha+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{3}{5}+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\frac{8}{5}\sin 2\alpha+\sin 4\beta\cos 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$t=\sin 2\alpha.$ $\frac{2}{\sqrt5}t+$

$\cancel{2\alpha+2\beta}$ $\pi+2\pi n<2\alpha+2\beta<2\pi+2\pi n$

$-\frac{\pi}{2}+2\pi k<2\beta<\frac{\pi}{2}+2\pi k$ $\Big|\ominus$

$\pi+2\pi n+\frac{\pi}{2}-2\pi k<2\alpha<2\pi-\frac{\pi}{2}+2\pi n-2\pi k.$

$\frac{3\pi}{2}+2\pi(n-k)<2\alpha<\frac{3\pi}{2}+2\pi k.$

$\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$ $|\sin 2\beta|=|\sin(2\alpha+2\beta)|$

$(\sin(2\alpha+2\beta)-\sin 2\beta)(\sin(2\alpha+2\beta)+\sin 2\beta)=0.$

$(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta(\cos 2\alpha-1))(\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta(\cos 2\alpha+1))=0.$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

2. $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{x \cdot y - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ x^2 - 4x + 4 + 9y^2 - 18y + 9 = 13 + 12 = 25 = 5^2 \end{cases}$

$(x-2)^2 + 3^2(y-1)^2 = 5^2$

$\frac{AO}{OE} = \frac{8}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{9}$

$y = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{18}_{2}} \cdot \frac{\cancel{40}^{5}}{\cancel{3}} = 7{,}5$

$\frac{\frac{85}{6} - \frac{15}{2}}{\frac{136}{15}} = \frac{\frac{85}{6}}{2 \cdot \frac{85}{6} - \frac{136}{15}}$

<u>№1</u> $\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = 2 \sin \frac{2\alpha + 4\beta + 2\alpha}{2} \cdot \cos \frac{2\alpha + 4\beta - 2\alpha}{2} =$

$= 2 \sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

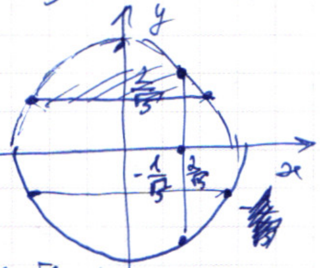
$2 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) \cdot \cos 2\beta = -\frac{4}{5} \quad | \cdot \left(-\frac{\sqrt5}{2}\right)$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$,

$OE = \sqrt{AC^2 + 8^2}$

$AC = \frac{254}{17} = \frac{\cancel{25}^{5} \cdot \cancel{136}^{8}}{\cancel{17} \cdot \cancel{15}_{3}} = \frac{40}{3}$

$OE = \frac{8}{3} \sqrt{25 + 9} = \frac{8}{3}\sqrt{34}$.



$-\pi + 2\pi n < 2\alpha + 2\beta < 2\pi n$.

$-\frac{\pi}{2} + 2\pi k < 2\beta < \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ | ⊕

$-\frac{3\pi}{2} + 2\pi(n+k) < 2\alpha + 4\beta < \frac{\pi}{2} + 2\pi(n+k)$

$\frac{AO}{17} = \frac{8}{OE}$ $\quad \frac{136}{2} \; 272$

$\frac{8\sqrt{34}}{3 \cdot 17} = \frac{8}{OE}$ $\quad OE = \frac{3\sqrt{34}}{2}$

$-\pi + 2\pi n < 2\alpha + 2\beta < 2\pi n$

$-\frac{\pi}{2} - 2\pi k < -2\beta < \frac{\pi}{2} - 2\pi k$ | ⊕ $\quad -\frac{3\pi}{2} + 2\pi(n-k) < 2\alpha < \frac{\pi}{2} + 2\pi(n-k)$

$\frac12 \quad \frac{2}{\sqrt5} \quad \frac{\sqrt3}{2}$

$\sqrt5 \quad 4 \quad \sqrt{15}$

$5 < 16 > 15$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$ $\quad u^2 + v^2 = 1$ $\quad \frac{85}{6}$ $\quad 850 \; 272 \; 578$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$u \frac{2}{\sqrt5} + v \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad 2 \cdot \frac{85}{6} - \frac{136}{15} =$ $\quad 850 - 272$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 4\beta = -\frac{4}{5}$ $\quad 850 | \frac{2}{425}$ $\quad \cos 4\beta = 2 \cdot \frac{4}{5} - 1 = \frac{3}{5}$

$0{,}6u + \sin 4\beta v = -\frac{4}{5}$ $\quad 0{,}6u + 2\sin 2\beta \cdot \frac{2}{\sqrt5} v = -\frac{4}{\sqrt5}$

$|\sin 2\beta| = |\sin(2\alpha + 2\beta)| = \frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \frac{2}{\sqrt5} u + v \sin\beta = -\frac{1}{5}$

$|\cos 2\beta| = |\cos(2\alpha + 2\beta)| = \frac{2}{\sqrt5}$ $\quad \frac{\cancel{85}^{5} \cdot \cancel{15}^{5}}{\cancel{6}_{2} \cdot \cancel{289}_{17}} = \frac{578}{30} = \frac{289}{15}$ $\quad 136 | \frac{4}{34}$ $\; 12 \; 16$

$\frac{2}{\sqrt5} u + \sin 2\beta \cdot v = -\frac{1}{\sqrt5} \quad | \cdot \frac{4}{\sqrt5}$ $\quad$ ~~$\frac{8}{5} u + \frac{4}{\sqrt5} \sin 2\beta v = -\frac{4}{5}$~~

$1{,}6u + 2\sin 2\beta \cdot \frac{2}{\sqrt5} \cdot v = -\frac{4}{5}$ $\quad 0{,}6u +$

~~$\frac{\frac{85}{6} - \frac{46}{}}{136 \cdot 2} \cdot 15$~~ $= \frac{85}{2 \cdot 85 \cdot 5}$

$\frac{85}{6} - \frac{15}{2} = \frac{85 - 45}{6} = \frac{40}{6} = \frac{20}{3}$ $\quad \frac{\cancel{20} \cdot \cancel{15}}{\cancel{3} \cdot \cancel{136}} = \frac{25}{34}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)-\sin 2\beta = 2\sin \alpha \cdot \cos\frac{2\alpha+4\beta}{2}$

$2\sin\alpha \cdot \cos(\alpha+2\beta)\cdot 2\cdot\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos\alpha=0$

$\sin 2\alpha \cdot \sin(2\alpha+4\beta)=0.$

а) $\sin 2\alpha=0.$ $2\alpha=\pi n.$ $\alpha=\frac{\pi}{2}n.$

$tg\,\alpha=0$, либо $tg\,\alpha$ не сущ. против. усл.

тогда $\sin(2\alpha+4\beta)=0.$ $\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\cdot -\frac{4}{5}+\cos 2\alpha \sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}\ /\cdot(-5\sqrt5)$

$8 - 5\sqrt5\cos 2\alpha\sin 2\beta = 5.$

$|\cos 2\alpha|=\frac{3}{5}$

$3=\cancel{5\sqrt5}\cdot\pm\frac{3}{5}\cdot\pm\frac{1}{\sqrt5}$ $\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha>0.$

N1 $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=$

$=-\frac{4}{5}$; $2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5}.$

$2\cdot(-\frac{1}{\sqrt5})\cdot\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$; $\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$

$|\sin 2\beta|=\sqrt{1-\frac{4}{5}}=\frac{1}{\sqrt5}.=|\sin(2\alpha+2\beta)|$

$\sin^2 2\beta=\sin^2(2\alpha+2\beta)$

$(\sin(2\alpha+2\beta)-\sin 2\beta)(\sin(2\alpha+2\beta)+\sin 2\beta)=0$

$\underline{2\cdot\sin\frac{2\alpha+2\beta-2\beta}{2}}\cdot\underline{\cos\frac{2\alpha+2\beta+2\beta}{2}}\cdot 2\cdot\sin\frac{2\alpha+2\beta+2\beta}{2}\cdot\underline{\cos\frac{2\alpha+2\beta-2\beta}{2}}=0$

$\sin 2\alpha\cdot\sin(2\alpha+4\beta)=0$

а) если $\sin 2\alpha=0$ $2\alpha=\pi n$, $\alpha=\frac{\pi}{2}n.$

тогда $tg\,\alpha=0$ или $tg\,\alpha$ не сущ. Против. условию!

б) $\sin(2\alpha+4\beta)=0.$

$\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$. $|\cos 2\alpha| = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$.

$2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{5}$ $|\cos^2\alpha - \sin^2\alpha| = \frac{3}{5}$

$2\cos^2\alpha - 1 = \frac{3}{5}$ $2\cos^2\alpha = \frac{8}{5}$ $\cos^2\alpha = \frac{4}{5}$ $\cos\alpha = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{3}{5}$ $2\cos^2\alpha = \frac{2}{5}$ $\cos^2\alpha = \frac{1}{5}$ $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\sin\alpha = -\frac{4}{5\sqrt{5}}$ $\sin\alpha = \mp\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin\alpha = \mp\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$\cancel{tg\alpha = \frac{-\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{-\frac{2}{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{2}}$

$\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$. $tg\alpha = \cancel{-\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}} = \sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}} = \sqrt{\frac{\frac{2}{5}}{\frac{8}{5}}}} = -\frac{1}{2}$

$= \sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}}} =$

$\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $\cos\alpha\cdot\sin\alpha < 0$. $tg\alpha = -\frac{1}{2}$; -2

$\sin 2\alpha = 2\,tg\alpha\cdot\cos^2\alpha$ $-\frac{4}{5} = 2\,tg\alpha$.

а) $tg\alpha = 0$.

<u>N2</u> $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2 + (3(y-1))^2 = 12+13 = 5^2 \end{cases}$ $x - 8x + 8 > 0$ $(x-2)(4x-5) > 0$

$\cancel{x^2 - 4xy + 4y^2 = xy - x - 2y + 2}$ $x^2 - 5xy + x + 2y + 4y^2 - 2 = 0$.

$\cancel{x^2 - 5xy + x + 2y + 4y^2 - 2 = 0}$. $(x-2y)^2 = (x-2)(y-1)$.

$t = 3y$ $\cancel{x \le 2 \quad (2-2y)^2 = 0,\ y = 1}$.

$\begin{cases} x - \frac{2}{3}t = \sqrt{(x-2)(\frac{t}{3}-1)} \\ (x-2)^2 + (t-3)^2 = 5^2 \end{cases}$ $-7x + 8 > 0$, $x < \frac{8}{7} < \frac{5}{4}$ $32 < 35$

$\frac{8}{7}$ $\frac{5}{4}$ $\frac{8}{7}$ 2

$x < \frac{8}{7}$.

$4y^2 + 2y - 5xy + x^2 + x - 2 = 0$.

$4y^2 + y(2-5x) + x^2 + x - 2 = 0$.

$D = (2-5x)^2 - 4\cdot 4\,(x^2+x-2) = 25x^2 - 20x + 4 - 16x^2 - 16x + 32 =$

$= 9x^2 - 36x + 36 = (3x-6)^2 \ge 0$.

$y = \frac{5x - 2 \pm (3x-6)}{2}$; $y = \frac{5x-2+3x-6}{2} = \frac{8x-8}{2} = 4x - 4$.

$y = \frac{5x-2-3x+6}{2} = \frac{2x+4}{2} = x+2$.

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-2y)=\sqrt{(x-2)(y-1)}$ $\quad x>2y \quad (x-2)(y-1)>0.$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=12.$

$a=x-2, \quad b=3y-3. \quad 2y=\frac{(3y-3+3)}{3}\cdot 2=\frac{2}{3}(b+3)$

$\sqrt{\frac{ab}{3}}=a+\cancel{2}-\frac{2}{3}b-\cancel{2}=a-\frac{2}{3}b.$

$a^2+b^2=12$

$225-144$
$\frac{144}{81}=9^2$

$a-\frac{2}{3}b=\sqrt{\frac{ab}{3}} \;|\cdot 3 \quad 3a-2b=\sqrt{3ab}$

$y=\frac{b}{3}+1=1-0,5\sqrt{10}$

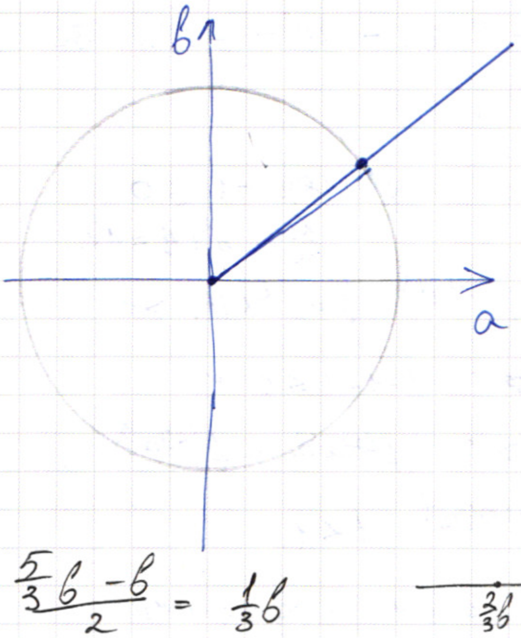
$9a^2-12ab+4b^2=3ab.$

$9a^2-15ab+4b^2=0. \;|:b^2 \quad 9\left(\frac{a}{b}\right)^2-15\frac{a}{b}+4=0$

$\frac{a}{b}=\frac{15\pm\sqrt{15^2-4\cdot 36}}{18}=\frac{15\pm 9}{18}=\frac{1}{3};\ \frac{4}{3}.$

$a=\frac{1}{3}b; \quad a=\frac{4}{3}b. \quad a>\frac{2}{3}b \Rightarrow \underline{a=\frac{4}{3}b}. \quad b=\frac{3}{4}a.$

$\frac{2}{3}b=\sqrt{\frac{4}{3}b\cdot\frac{b}{3}}=\frac{2}{3}b$ ✓. $\quad b\geq 0,\ a\geq 0.$



$(a;b)=(4;3).$

$\begin{cases} 4^2+3^2=25 \ ✓ \\ 4-2=\sqrt{\frac{4\cdot 3}{3}} \ ✓ \end{cases}$

$a=x-2$
$x=a+2=2-0,5\sqrt{10}$

$x-2=4, \quad x=6.$

$3y-3=3, \quad y-1=1,\ y=\underline{2}$

Ответ: $(8;2)$.

$-0,5\sqrt{10}+2=2-0,5\sqrt{10}$

$\frac{\frac{5}{3}b-b}{2}=\frac{1}{3}b$

$a-\frac{2}{3}a=\sqrt{a\cdot 3a}$

$a^2+9a^2=25 \; 10a^2=25, \quad a^2=2,5 \quad a^2=\frac{5}{2} \quad a=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=-\frac{\sqrt{10}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$x > 0$ $\cancel{ОДЗ}$: $D(y) = (0; \infty)$.

$f(ab) = f(a) + f(b)$. $f(p) = [p/4]$

$f(1) + f(p) = f(p) \Rightarrow f(1) = 0$. $\log_z 1 = 0$.

$f(2) = [\frac{1}{2}] = 0$. $[\log_z 2] = 0$. $z^0 < 2$

$f(3) =$ $[\log_z 3] = 0$ $z^0 < 3$

$[\log_z 5] = 1$. $z < 5$ $z < \sqrt{11} < 5$

$[\log_z 7] = 1$ $\cancel{z = 2, 3}$. $3 < \sqrt{11} < \sqrt{4}$.

$[\log_z 11] = 2$. $z^2 < 11$.

$f(\frac{x}{y}) < 0$ $f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$.

$\frac{12x + 11}{4x + 3} \le ax + b \le -8x^2 - 30x - 17$.

$f(x) = \frac{12x+11}{4x+3} = \frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$f'(x) = \frac{12(4x+3) - 4(12x+11)}{(4x+3)^2} = \frac{48x + 36 - 48x - 44}{(4x+3)^2} = -\frac{8}{\cancel{4}}$ $\cancel{<0}$.

$f_{max}(x) = f(-\frac{11}{4}) = 3 + \frac{2}{-3-11} = 3 - \frac{1}{4} = 2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$.

$-\frac{11}{4}a + b \geqslant \frac{11}{4}$

$g(x) = -8x^2 - 30x - 17$ $g'(x) = -8 \cdot 2x - 30 = -16x - 30$

$x = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8} = -\frac{7,5}{4}$. $+$ $-$

$-\frac{11}{4}a + b \le$ $\frac{13}{12} - 1 - \frac{5}{12} \le 0$. ✓. $x^2 + 18x - 1 \le 0$

$\frac{D}{4} = 9^2 + 1 = 82$.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \geqslant |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13}$ $t = x^2 + 18x > 0$

$5^{\log_{12} t} + t \geqslant t^{\log_{12} 13}$ $t = 1$ $1 - 1 - 1 \le 0$ ✓

$t^{\log_{12} 5} + t \geqslant t^{\log_{12} 13}$ $t \geqslant 1$. $t^{\log_{12} \frac{13}{12}} > t^{\log_{12} \frac{5}{12}}$

$12^{\log_{12} t \cdot \log_{12} 5} + 12^{\log_{12} t} \geqslant 12^{\log_{12} 13 \cdot \log_{12} t}$ $t < 1$.

$a^{\log_{12} 5} + a \geqslant a^{\log_{12} 13}$ $a = t$. $t \le 1$ - однозначно.

$t^{\log_{12} 5} \geqslant t(t^{\log_{12} 13 - 1} - 1)$

$t^{\log_{12} 5} + t \geqslant t^{\log_{12} 13}$ $t^{\log_{12} 13} - t^{\log_{12} 5} - t \le 0$

$t \ne 0$ $t^{\log_{12} \frac{13}{12}} - t^{\log_{12} \frac{5}{12}} - 1 \le 0$.

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x \geq 2y$ $\quad x \geq 8x-8 \quad 7x \leq 8,\ x \leq 1\frac{1}{7}$

$x \geq 2x+4 \quad x \leq -4.$

$12 \cdot 30 = 360$

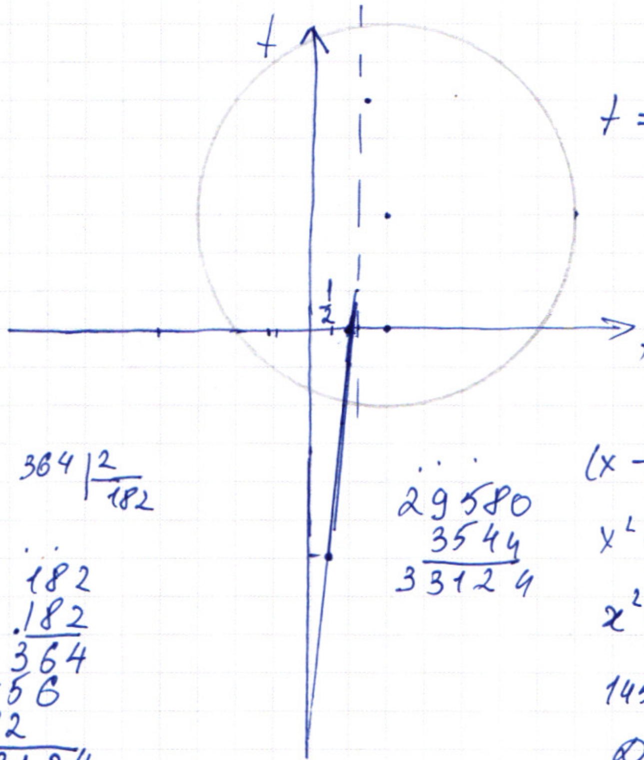
$(x-2)(y-1) \geq 0 \qquad (x-2)(4x-5) > 0.$

$(x-2)(x+1) > 0$

$\frac{8}{7}\ \ \frac{5}{4}\ \ 2 \qquad x \leq \frac{8}{7}$

$-4\ \ -1\ \ 2$

$x \leq -4.$



$f = 12x-12 \qquad f = 3x+6.$

$f \geq -2. \qquad 12 \cdot \frac{8}{7} - 12 = \frac{12}{7}$

$x \geq -3.$

$f = 12x-12., \quad x \leq \frac{8}{7}$

$(x-2)^2 + (12x-15)^2 = 5^2$

$x^2 - 4x + 4 + 144x^2 - 2 \cdot 12 \cdot 15x + 225 = 25$

$x^2 - 4x + 4 + 144x^2 - 360x + 200 = 0$

$145x^2 - 364x + 204 = 0.$

$\frac{D}{4} = 182^2 - 145 \cdot 204 = 33124 - 29580 =$

$= 3544. = 8 \cdot 443$

$\frac{8}{3} + \frac{3}{2}\sqrt{34} = \frac{16+9}{6}\sqrt{34} = \frac{25\sqrt{34}}{6}$

$\sqrt{\frac{85}{6} \cdot \frac{85}{6} - \frac{25 \cdot 2534}{6 \cdot 6}} = \frac{5 \cdot \sqrt{17}}{6} = \frac{17-30}{6}.$

$364 \,|\, 2 \to 182$

$182 \cdot 182$: 364, 1456, 182, 33124

$145 \cdot 204$: 580, 000, 290, 29580

$33124 - 29580 = 3544$

$29580 + 3544 = 33124$

$3544 \,|\, 8 = 443$: 32, 34, 32, 24

№3 $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x>0, \quad x \in (-\infty; -18) \cup (0; \infty)$

$x^2+18x = t$

$5^{\log_{12} t} + t^{\log_{12}12} \geqslant t^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12} t} \geqslant t^{\log_{12}13} - t = t(t^{\log_{12}13-1} - 1).$

$\cancel{5^{\frac{\log_5 t}{\log_5 12}}}$ $\quad 12^{\log_{12}5 \cdot \log_{12} t} + t \geqslant t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5} + t^1 \geqslant t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5} + t \geqslant t^{\log_{12}13}$

$t \geqslant t^{\log_{12}5}(t^{\log_{12}\frac{13}{5}} - 1) \mid : t$

$t^{\log_{12}5} - t^{\log_{12}13} + t \geqslant 0 \quad \mid : t$

$t^{\log_{12}5}(t^{\log_{12}2,6} - 1) \leqslant t \mid : t$

$t^{\log_{12}5-1} \quad (t$

$\cancel{t^{\log_{12}5-1} - t^{\log_{12}13-1} \geqslant -1}$

$\cancel{t^{\log_{12}13-1} - t^{\log_{12}5-1} \leqslant 1.}$

$\cancel{t^{\log_{12}5-1} \quad (t}$

$12^{\log_{12}5 \cdot \log_{12} t} + t^{\log_{12}12} \geqslant t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5} + t^{\log_{12}12} \geqslant t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}\frac{5}{13}} + t^{\log_{12}\frac{12}{13}} \geqslant 1.$

$\log_t(t^{\log_{12}5} + t) \geqslant \log_{12}13$

$\log_t t + \log_t t$

$t^{\log_{12}\frac{5}{13}} + t^{\log_{12}\frac{12}{13}} \geqslant 1.$

$t^{\log_{12}\frac{5}{13}}(1 + t^{\log_{12}\frac{5}{13}}) \geqslant 1$ $\qquad \frac{12}{13} : \frac{5}{13} = \frac{12}{5} = 1 - \log_{12}5$

$t^{\log_{12}5 - \log_{12}13}(1 + t^{\log_{12}5}) \geqslant 1.$

$a = t^{\log_{12}5} \qquad t^{\log_{12}13} = a^{\frac{\log_{12}13}{\log_{12}5}} = a^{\log_5 13}$

$a : a^{\log_5 13} \geqslant \frac{1}{1+a}. \qquad a(a+1) = a^{\log_5 13}$

$t^{\log_{12}\frac{13}{12}} = t^{\log_{12}\frac{5}{12}} + 1.$

$t = 12 \quad \frac{13}{12} \leqslant \frac{17}{12}.$

$\log_{12}\frac{13}{12} > 1$

$\log_{12}\frac{13}{12} \neq \cancel{\log} \cancel{12}\, 0 = \log_{12}1.$

> 1

$< 2.$

$\frac{5}{12} \log_{\frac{13}{12}} 2$

$<$

$2 = \cancel{\log}\, \frac{5}{12}^{\log_{\frac{13}{12}}2} + 1.$

$\log_{12}\frac{13}{12} > \log_{12}\frac{5}{12}$

$\log_{12}\frac{5}{12} < 0.$

$t^{\log_{12}\frac{13}{12}} \leqslant 2 = t^{\log_t 2}$

$\log_{\frac{13}{12}} 2 < 0.$

$\log_{12}\frac{13}{12}$

$\log_t 2$

$\log_2 t \cdot \log_{12}\frac{13}{12}$ $\quad 1.$

$\log_2 t$

$\log_{12}\frac{13}{12} \cdot \log_{12} t$

$\frac{\log_{12} 2}{\log_{12} t} \quad \log_{12} t$

$t = 12^{\log_{\frac{13}{12}} 2}.$

$\log_{12} 2$

$\log_{\frac{13}{12}} 2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$;

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$. $|\sin 2\beta| = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = |\sin(2\alpha+2\beta)|$

Поэтому заметим, что $|\sin 2\beta| = |\sin(2\alpha+2\beta)|$, т.е.

$\sin^2 2\beta = \sin^2(2\alpha+2\beta)$; $\sin^2(2\alpha+2\beta)-\sin^2 2\beta = 0$.

$(\sin(2\alpha+2\beta)-\sin 2\beta)(\sin(2\alpha+2\beta)+\sin 2\beta) = 0$.

$\left(2\sin\left(\frac{2\alpha+2\beta-2\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+2\beta+2\beta}{2}\right)\right)\cdot\left(2\sin\left(\frac{2\alpha+2\beta+2\beta}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+2\beta-2\beta}{2}\right)\right) = 0$

$\underline{2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\cdot\underline{2\cdot\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta)} = 0$.

$\sin 2\alpha\cdot\sin(2\alpha+4\beta) = 0$

а) $\sin 2\alpha = 0$. тогда $2\alpha = \pi n$, ~~но т.к.~~ $n\in\mathbb{Z}$

$\alpha = \frac{\pi}{2}n$. т.к. $tg\,\alpha$ определён, $\alpha = \pi n$, $\underline{tg\,\alpha = 0}$.

б) $\sin(2\alpha+4\beta) = 0 \Rightarrow \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$|\cos 2\alpha| = \sqrt{1-\frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$. $|2\cos^2\alpha - 1| = \frac{3}{5}$

$\left[\begin{array}{l} 2\cos^2\alpha = \frac{8}{5} \\ 2\cos^2\alpha = \frac{2}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2\alpha = \frac{4}{5} \\ \cos^2\alpha = \frac{1}{5}. \end{array}\right.$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2\,tg\,\alpha\cdot\cos^2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$tg\,\alpha = -\frac{2}{5\cos^2\alpha}$. $\left[\begin{array}{l} tg\,\alpha = -\frac{2\cdot 5}{5\cdot 4} = -\frac{1}{2} \\ tg\,\alpha = -\frac{2\cdot 5}{5\cdot 1} = -2. \end{array}\right.$

Ответ: -2; $-0{,}5$; 0.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 2 $\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}; \\ x^2 + 9y^2 - 4x + 18y = 12; \end{cases}$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{x(y-1) - 2(y-1)}; \\ x^2 - 4x + 4 - 4 + 9y^2 - 18y + 9 - 9 = 12; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \quad \text{ОДЗ: } x \geq 2y; \ (x-2)(y-1) \geq 0 \\ (x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25 = 5^2. \ \text{— график окр-ти.} \end{cases}$$

Пусть $a = x - 2$; $b = 3y - 3$. Тогда $x = a + 2$, $y = \frac{b+3}{3} = \frac{b}{3} + 1$.

Система принимает вид:

$$\begin{cases} a + 2 - 2\cdot\frac{b}{3} - 2\cdot 1 = \sqrt{a\cdot\frac{b}{3}} \\ a^2 + b^2 = 5^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a - \frac{2}{3}b = \sqrt{\frac{ab}{3}} \\ a^2 + b^2 = 5^2. \end{cases}$$

Заметим, что $a \geq \frac{2}{3}b$, $ab \geq 0$ должны быть.

Рассм. $a - \frac{2}{3}b = \sqrt{\frac{ab}{3}} \ |\,{}^\wedge 2.$

$a^2 - \frac{4}{3}ab + \frac{4}{9}b^2 = \frac{ab}{3}$ $\qquad a^2 - \frac{5}{3}ab + \frac{4}{9}b^2 = 0$ (1)

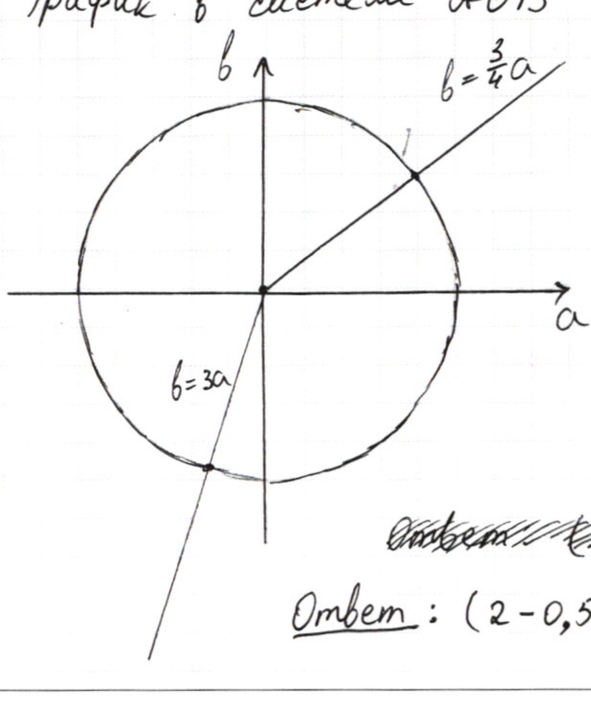
Рассм. (1) как квадратное отн. a:

$D = \frac{25}{9}b^2 - \frac{16}{9}b^2 = \frac{9}{9}b^2 = b^2$

$a = \frac{\frac{5}{3}b \pm |b|}{2}$. Если $b > 0$, $\boxed{a = \frac{4}{3}b}$ $a = \frac{1}{3}b$! $(a \geq \frac{2}{3}b.)$

Если $b < 0$, $\boxed{a = \frac{1}{3}b}$, $a = \frac{4}{3}b$! $(a \geq \frac{2}{3}b)$.

График в системе AOB выглядит сл. образом:



$$\begin{cases} b = \frac{3}{4}a, \ a, b > 0 \\ b = 3a, \ a, b < 0 \\ a^2 + b^2 = 5^2 \end{cases}$$

$(a,b) = (4;3)$ — решение.

$a^2 + (3a)^2 = 25$, $10a^2 = 25$, $a^2 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$.

$a = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = -0{,}5\sqrt{10}$, $b = -1{,}5\sqrt{10}$ — реш.

~~Ответ: x=~~ $(x;y) = (6;2)$ и $(x;y) = (2 - 0{,}5\sqrt{10};$

Ответ: $(2 - 0{,}5\cdot\sqrt{10};\ 1 - 0{,}5\sqrt{10})$, $(6;\ 2)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

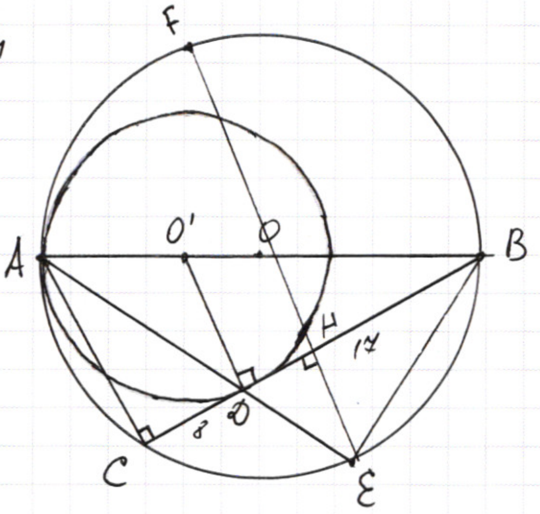
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4

O - центр Ω

O' - центр ω



Рассм. $\triangle BO'D$ и $\triangle BAC$ — они подобны по I пр: $\angle BDO' = \angle BCA = 90^\circ$ ($\angle BCA = 90^\circ$, т.к. стягивает диаметр AB и вписанный, $\angle BDO' = 90^\circ$, т.к. D — т. касания, $O'D$ — радиус). $\angle B$ — общ.

Тогда $\frac{O'D}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{BO'}{BA}$ $\quad BO' = AB - O'A = 2R - r$, где R — радиус Ω, r — радиус ω, $BA = 2R$, $BD = 17$, $BC = 17 + 8 = 25$, $O'D = r$, $AC^2 = 4R^2 - 25^2$ по т. Пифагора в $\triangle ABC$. Тогда $1 - \frac{r}{2R} = \frac{17}{25}$ $\quad r = \frac{16}{25} R$.

$$\frac{16^2 R^2}{\cancel{25^2} AC^2} = \frac{17^2}{\cancel{25^2}} \qquad 16^2 R^2 = 17^2 \cdot 4R^2 - 17^2 \cdot 25^2$$

$$(17 \cdot 25)^2 = (34 - 16)(34 + 16)R^2 = 18 \cdot 50 R^2 = 900R^2,$$

$$R = \frac{17 \cdot 25}{30} = \frac{85}{6} = 14\frac{1}{6}.$$

$$r = \frac{16}{25} R = \frac{17 \cdot 16}{30} = \frac{136}{15} = 9\frac{1}{15}.$$

Докажем, что EF проходит через O. Пусть $\angle BO'D = \alpha \Rightarrow$ $\angle AO'D = 180 - \alpha$ и $\angle O'AD = \angle O'DA = \frac{\alpha}{2}$ из р/б $\triangle AO'D$.

$O'D \parallel OE$ (обе $\perp BC$) $\Rightarrow \angle AO'D = \angle AOE$ и $\angle AEO = \frac{\alpha}{2}$, т.к $\triangle AO'D \sim \triangle AOE$ по I пр.

$\angle BEA = 90^\circ$, т.к AB - диаметр, $\angle BEA$ - впис.

$\angle ADC = \angle BDE$ как вертик. $\Rightarrow \triangle ACD \sim \triangle BED$.

Задача 3 $\quad 5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x;$

ОДЗ: $x^2+18x>0$, $x\in(-\infty;-18)\cup(0;\infty)$

Пусть $x^2+18x=t>0$ тогда:

$5^{\log_{12}t}+t \geqslant t^{\log_{12}13}$ $\quad (x^2+18x>0 \Rightarrow |x^2+18x|=x^2+18x.)$

$(12^{\log_{12}5})^{\log_{12}t}+t \geqslant t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}5}+t \geqslant t^{\log_{12}13} \quad |:t>0$

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}}+1 \geqslant t^{\log_{12}\frac{13}{12}}.$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AD = \sqrt{AC^2 + DC^2}$; $AC = \frac{25 \cdot 4}{17} = \frac{40}{3}$ $AD = \frac{8}{3}\sqrt{34}$.

$\frac{DE}{CD} = \frac{BD}{AD}$, $DE = \frac{8 \cdot 17}{AD} = \frac{3}{2}\sqrt{34}$

$\frac{AD}{DE} = \frac{16}{9}$. $\triangle ADC \sim \triangle EDH$ по I признаку

$\frac{AC}{EH} = \frac{AD}{DE} = \frac{16}{9}$ $EH = 7,5$.

Если EF проходит через O, то будет выполняться равенство $\frac{OH}{O'D} = \frac{BO}{BO'}$ в $\triangle BOH \sim \triangle BO'D$ по I призн.

т.е $\frac{R - EH}{4} = \frac{R}{2R-4}$; иначе равенство не будет выполняться.

$\frac{\frac{85}{6} - \frac{15}{2}}{\frac{136}{15}} = \frac{\frac{85}{6}}{2 \cdot \frac{85}{6} - \frac{136}{15}}$; $\frac{25}{34} = \frac{25}{34}$; тождество верно.

Тогда EF – диаметр, $\angle EAF = 90^\circ$ $\cos AEF = \frac{7,5}{\frac{3}{2}\sqrt{34}} =$

$= \frac{5}{34}\sqrt{34}$. $\angle AEF = \arccos \frac{5\sqrt{34}}{34}$; $\angle AFE = 90^\circ - \arccos\frac{5\sqrt{34}}{34}$.

т.к. O ~~AB~~ – ~~ось~~ точка симметрии, $AF = BE = \sqrt{AB^2 - AE^2} =$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)