МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}.$$

$$\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}.$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}. \\ \cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5} \end{cases} \to \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2\alpha+2\beta = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi n. \\ 2\beta = \pm\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right)+2\pi l \end{cases} (1) \\ \begin{cases} 2\alpha+2\beta = -\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+\pi+2\pi m \\ 2\beta = \pm\arccos\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right)+2\pi k \end{cases} (2) \end{array}\right.$$

$(n, m, k, l \in \mathbb{Z})$.

(1). $2\alpha \pm \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right) + 2\pi l = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi n.$

$$2\alpha = \left(\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) \pm \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right)\right)+2\pi\cdot q. =$$

$$= \left(-\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right) \pm \left(\pi - \arccos\left(\frac{2}{\sqrt5}\right)\right)\right)+2\pi q. =$$

$$= \begin{cases} \nearrow -\pi+2\pi q. \\ \searrow \pi - 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi q. \end{cases}$$

(2) $2\alpha \pm \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right)+2\pi k = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)+2\pi m.$

$$2\alpha = \left(\pi \mp \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right) + \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)\right)+2\pi\cdot p$$

$$2\alpha = \begin{cases} \nearrow 2\arcsin\frac{1}{\sqrt5}+2\pi p. \\ \searrow 2\pi+2\pi p. \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №1
(Нумеровать только чистовики)

Отсюда: $\left[\begin{array}{ll} \alpha = -\frac{\pi}{2} + \pi k & 1) \\ \alpha = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi m & 2) \\ \alpha = \arcsin\frac{1}{\sqrt{5}} + \pi n & 3) \\ \alpha = \pi + \pi l & 4) \end{array}\right.$

~~$tg\alpha =$~~

1) $tg\alpha = \cancel{-1}. \varnothing.$

2) $tg\alpha = \pm\frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \pm 2.$

3) $tg\alpha = \pm\frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{\frac{2}{\sqrt{5}}} = \pm\frac{1}{2}.$

4) $tg\alpha = 0.$

Ответ: $\pm 2; \cancel{1} \pm\frac{1}{2}; 0.$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y-4x-18y=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} (x-2)-2(y-1) = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25. \end{cases}$$

ОДЗ

$(x-2)(y-1)\geq 0$

Пусть:

$x-2=a$

$y-1=b.$ $\longrightarrow$ $\begin{cases} a-2b = \sqrt{ab} & (1) \\ a^2+9b^2=25 & (2) \end{cases}$

(1): $a-\sqrt{ab}-2b=0.$

~~1) $b\neq 0$, т.к.~~

1) $b\neq 0$ $a\neq 0$ Если $ab\geq 0$, то и $\frac{a}{b}>0$

(т.к. a и b одного знака).

$\frac{a}{b}-\sqrt{\frac{a}{b}}-2=0.$

$\left(\sqrt{\frac{a}{b}}-2\right)\left(\sqrt{\frac{a}{b}}+1\right)=0$

$\frac{a}{b}=4$ $\qquad \sqrt{\frac{a}{b}}=-1.$ $-\varnothing$, т.к $\sqrt{\frac{a}{b}}>0.$

$\boxed{a=4b.}$

~~$\frac{x-2}{y-1}=4. \Rightarrow x-2=4y-4.$~~

Подставим ~~b~~ a в (2):

$16b^2+9b^2=25$

$b^2=1.$ $\longrightarrow$ $b=1$ $a=4$

$\longrightarrow$ $b=-1$ $a=-4.$

2) Если $a = 0$, то ~~чтобы (1) имело решения~~

из (1) у-я следует:

$$-2b = 0.$$

$$b = 0.$$

Тогда (2) у-е не ~~имо~~ решается:

$$\underline{0 + 0 \neq 25}.$$

Значит $a, b \neq 0$.

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} x - 2 = 4 \\ y - 1 = 1 \end{cases} & (6;2) \\ \begin{cases} x - 2 = -4 \\ y - 1 = -1 \end{cases} & (-2;0). \end{array}\right.$$

Ответ: $(6;2)$ $(-2;0)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

ОДЗ:
$x^2+18x>0.$
$x^2+18x\neq 1.$

Прологарифмируем это выражение по основанию 12:

$$\log_{12}5\cdot\log_{12}(x^2+18x)+\log_{12}(x^2+18x)\geqslant\log_{12}|x^2+18x|\cdot\log_{12}13.$$

Заметим, что $x^2+18x=|x^2+18x|$ в силу ОДЗ.

Значит $\log_{12}(x^2+18x)\left(\log_{12}5+1-\log_{12}13\right)\geqslant 0.$

$$\log_{12}(x^2+18x)\cdot\cancel{\log_{12}\frac{60}{13}}\geqslant 0$$

$x^2+18x>1.$

$x^2+18x-1>0.$

$\frac{D}{4}=81+1=82.$ $\to x_1=-18+\sqrt{82}$, $\to x_2=-18-\sqrt{82}.$

$x\in(-\infty;-18-\sqrt{82})\cup(-18+\sqrt{82};+\infty).$

№6.

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17.$$

Заметим, что на $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$ $f(x) = \frac{12x+11}{4x+3}$ ↘,

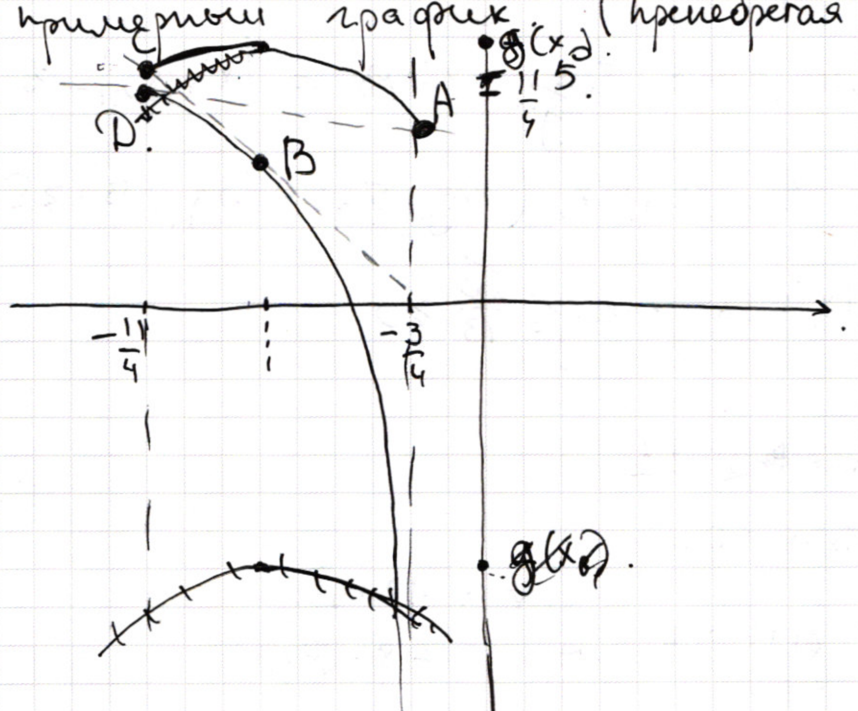
т.к. $f(x) = \frac{12x+11}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$, ~~а $g(x) = -8x^2-30x-17$ ↗~~

~~т.к. у этой параболы $x_в = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8} > -\frac{3}{4}$.~~

$g(x) = -8x^2 - 30x - 17.$

$x_в = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8} = -\frac{7,5}{4}.$

Нарисуем примерный график: (пренебрегая масштабом)



сравним $f\left(-\frac{11}{4}\right)$ и $g\left(-\frac{11}{4}\right)$. $f\left(-\frac{11}{4}\right) = \frac{11}{4}$.

$g\left(-\frac{11}{4}\right) = -8 \cdot \frac{11^2}{4^2} + 30 \cdot \frac{11}{4} - 17 = -2 \cdot \frac{11^2}{4} + 30 \cdot \frac{11}{4} - 17 = \frac{11}{4}(30-22) - 17 =$

$= 22 - 17 = 5 > \frac{11}{4}$

Значит нам подойдут прямые между графиками.

Во ~~первых~~, ~~прямые~~

Это будут все прямые между AD и CB, ~~где~~ где $C = g\left(-\frac{11}{4}\right)$ и

и $A = g\left(-\frac{3}{4}\right)$, а $D = f\left(-\frac{11}{4}\right)$, B - точка кас.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

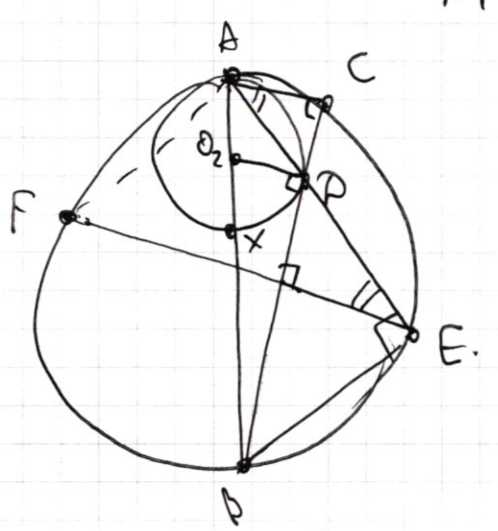
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Дано:

$CD = 8$

$BD = 17$

Найти:

R_Ω - ?

r_ω - ?

Реш: $\angle ACB = 90°$, т.к. опир на AB - диам. Ω.

Тогда $\triangle BO_2D \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{BD}{DC} = \frac{17}{25} \Rightarrow$

$\Rightarrow r = \frac{8}{25} \cdot 2R$.

$AB \cap \omega = X \Rightarrow BD^2 = AB \cdot XB = (2R-2r)(2R)$

$$\begin{cases} 17^2 = (2R-2r)\,2R \\ r = \frac{8}{25} \cdot 2R. \end{cases} \rightarrow \left(2R - \frac{16}{25}\,2R\right) \cdot 2R = 17^2.$$

$\frac{9}{25} \cdot 4R^2 = 17^2.$

$\frac{3}{5} \cdot 2R = 17.$

$R = \frac{17 \cdot 5}{6} = \frac{85}{6} \Rightarrow r = \frac{136}{15}.$

$\angle AFE = \angle ABE$ как вписс.

$\angle BEA = 90°$ т.к опир на диам. $\Rightarrow \angle ABE = 90 - \angle BAE$.

$\angle BAE = \angle BO_2D/2 = \frac{\arccos \frac{8}{17}}{2}$

$\cos \angle BO_2D = \frac{r}{2R-r} = \frac{\frac{136}{15}}{\frac{170}{6} - \frac{136}{15}} = \frac{1}{\frac{10 \cdot 15}{6 \cdot 8} - 1} = \frac{1}{\frac{25}{2 \cdot 4} - 1} = \frac{8}{17}.$

Значит $\angle AFE = 90 - \dfrac{\arccos\frac{8}{17}}{2}$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

Заметим, что $f(x)+f(\frac{1}{x})=f(1)$.

Посмотрим, чему равно $f(1)$..

$f(1)+f(a)=f(a) \Rightarrow \underline{f(1)=0}$.

Значит $f(x)=-f(\frac{1}{x})$.

Значит для всех $x, y \in \mathbb{N}$, для которых $f(x)<f(y)$, выполняется $f(x/y)=f(x)+f(\frac{1}{y})=$

$=f(x)-f(y)$.

Найдём все $f(x)$ при $x\in[1;24]$:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
f(x)	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0

Итого: 11 – „0" I

7 – „1" II

2 – „2" III

1 – „3" IV

2 – „4" V

1 – „5". VI

~~Заметим, что для каждого числа из какой-то группы кол-во пар, удовлет. условию, равно $n_{\text{чисел в группе}} \cdot \sum n_{\text{в группах с меньшим } f(x)}$.~~

~~(второе число берём меньшее, чтоб не было повторений).~~
~~т.е.~~

~~I 0~~

~~II 77~~

~~III $18 \cdot 2 = 36$.~~

~~IV 20~~

~~V 42~~

~~VI 23.~~

~~198.~~

~~Итого Значит ответ: $100 + 20 + 78 = 198$.~~

Будем выбирать число y, и смотреть, сколько чисел x удовл. условию: $f(y) > f(x)$.

Для числа из ~~каждой~~ I группы ~~$= 0$~~ нет таких x.

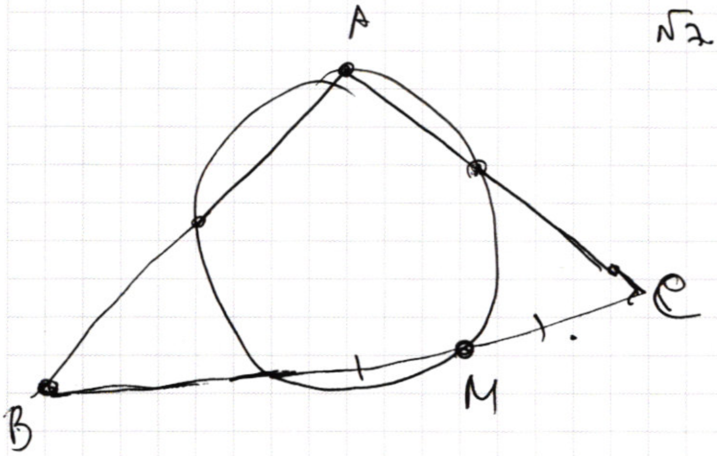
Для числа из II гр. сущ. 11 x. Таким образом:

ответ: $n(\text{II})(n(\text{I})) + n(\text{III})(n(\text{I}) + n(\text{II})) + \ldots + n(\text{VI}) \cdot (n(\text{V}) + \ldots + n(\text{I})) = 0 + 77 + 36 + 20 + 42 + 23 = 198$.

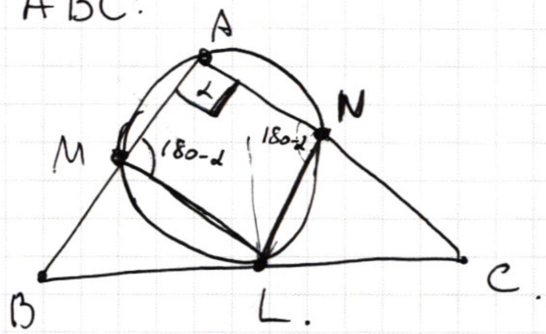
$\boxed{\text{О}: 198}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2



Рассмотрим плоскость ABC:



~~Эт~~ Пусть M N L – середины AB AC и BC

Тогда AMLN – впис. четырехуг., т.к AMLN $\in$ сфере и одной пл.

Значит $\cancel{\angle A + 2}$ $\angle AML + \angle ANL = 180 = 180 - \angle A +$
$+ 180 - \angle A$. (т.к. $ML \parallel AC$ и $NL \parallel BC$)

Значит $\angle A = 90^\circ$.

~~Значит~~

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$

$f(11/4) = \frac{-33+11}{-11+3} = \frac{-22}{-8} = \frac{22}{8} = \frac{11}{4},$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$ $g(x_0)^2$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

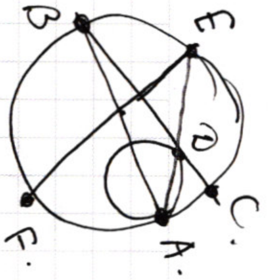
$\cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$

$2\alpha \pm \arccos\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi n = \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + 2\pi m$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25.$



$x - xy + 2y - 2 = x(1-y) + 2(y-1) = (2-x)(y-1).$

$-\left(\frac{11}{4}\right)^2 \cdot 8 + \frac{30}{4}\cdot\frac{11}{4} - 17.$

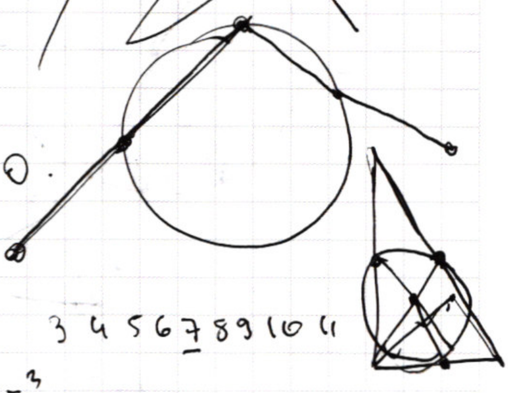
$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{(x-2)(y-1)}. \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

$\underset{a}{\shortparallel}$ $\underset{b.}{\shortparallel}$

$\frac{30^2}{30^2}$

$\frac{30^2}{16} - 17$

$-\frac{11^2\cdot 2}{4}$



$$\begin{cases} a-b = \sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25. \end{cases}$$

$a - \sqrt{ab} - b = 0.$

$\frac{a}{b} - \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} - 1 = 0.$

3 4 5 6 7 8 9 10 11

$ax^2+bx+c=0.$

$a\frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = 0.$

$-\frac{b^2}{4a} + c = 0$

$8 - \frac{30^2}{16} - 17 = 0.$

$-\frac{15^3}{4} - 17$

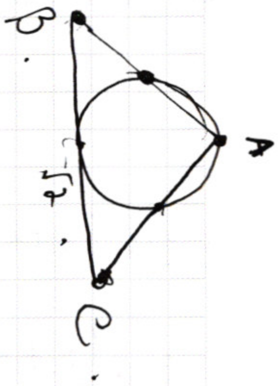
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x.$$



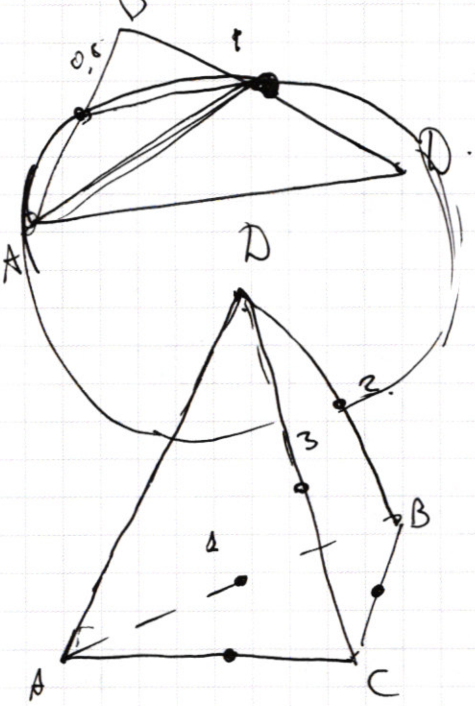
$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \geqslant 13^{\log_{12}|x^2+18x|}.$$

$$\cancel{5}\; 13^{\log_{12}|x^2+18x|} - 5^{\log_{12}(x^2+18x)} - x^2 - 18x \geqslant 0.$$

$\cancel{\log_{12}13}$

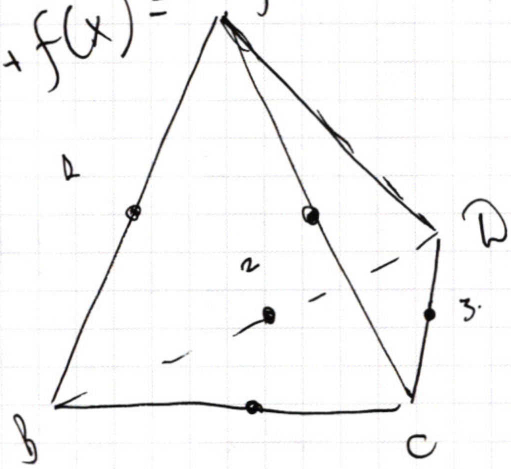
$$\log_{12}|x^2+18x| \cdot \log_{12}13 - \log_{12}5 \cdot \log_{12}(x^2+18x)$$

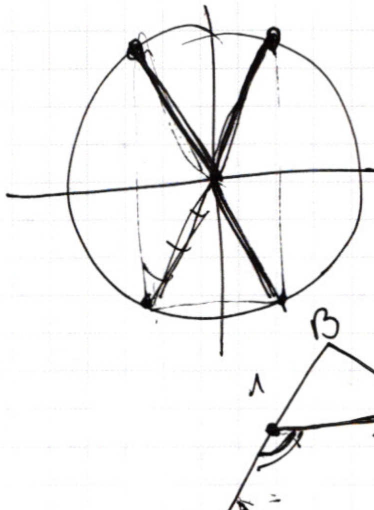
$$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right).$$

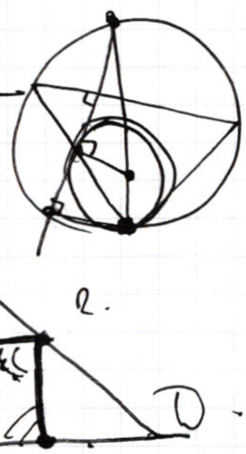


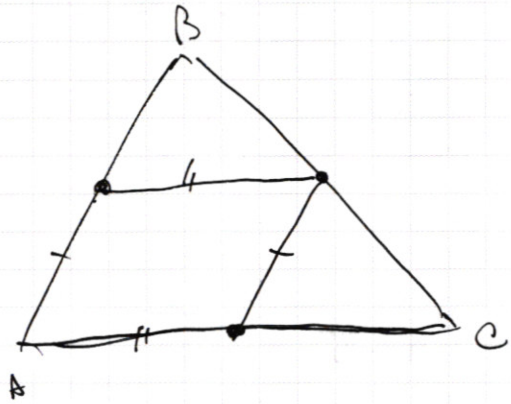
$f(ab)=f(a)+f(b)$.

$$f\left(\frac{1}{x}\right) + f(x) = A\, f(1).$$

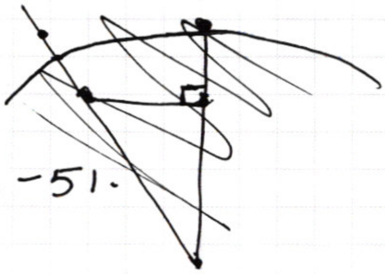






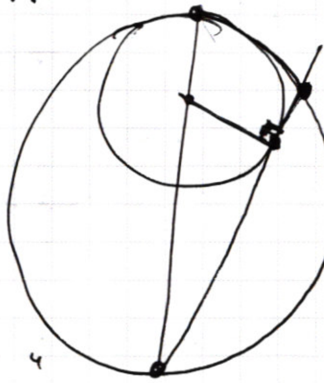


$\frac{12x+11}{4x+3} \le -8x^2-30x-17.$



$12x+11 \ge -32x^3-24x^2-120x^2-90x-\cancel{68}\,68x-51.$

$12x+11 \ge -32x^3-144x^2\cancel{-15}\cancel{-188x}\,158x-51.$



$0 \ge -32x^3-144x^2-170x-62$

$16x^3+72x^2+85x+31 \le 0.$

~~$32x^2+144x+85$~~

$48x^2+144x+85=0.$

$\frac{D}{4}=1104.$

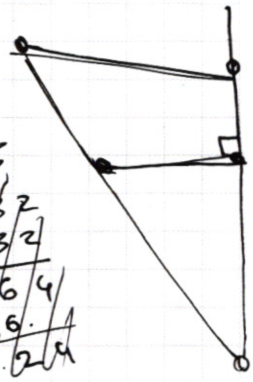
$x_1,x_2=\frac{-72\pm\sqrt{1104}}{48}$

$3+\frac{2}{4x+3}=3+\frac{0,5}{x+0,75}$

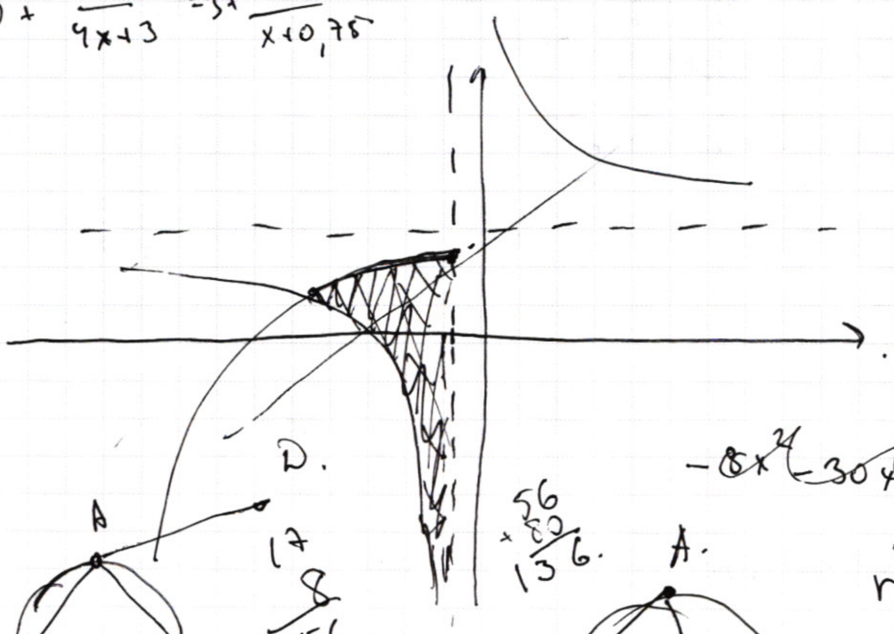
$$\begin{array}{r} 72 \\ \times 72 \\ \hline 144 \\ 504 \\ \hline 5184 \\ 4080 \\ \hline 1104 \end{array}$$

276.

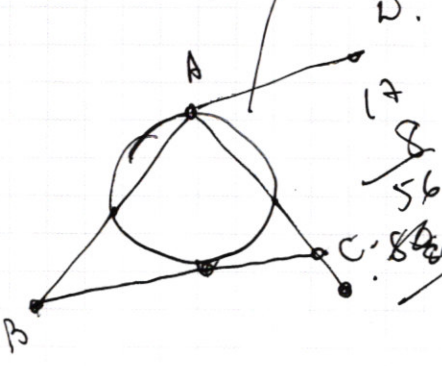
$$\begin{array}{r} 85 \\ \times 48 \\ \hline 680 \\ 340 \\ \hline 4080 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 32 \\ 32 \\ \hline 64 \\ 96 \\ \hline 1024 \end{array}$$



$\frac{30}{-16}=$



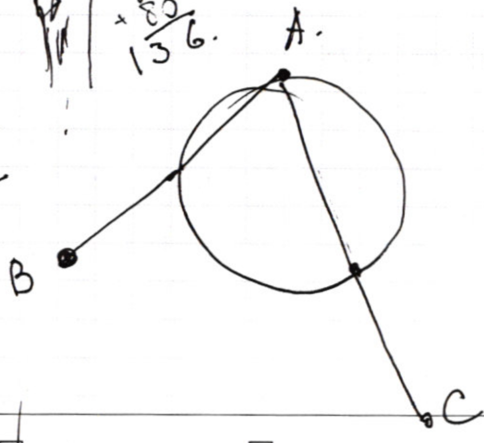
$\frac{17}{8}$ 56

C: 8 80

$56+80=136.$

$-8x^2-30x-17 \ge$

$r^2+(2R-r)^2$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

МФТИ

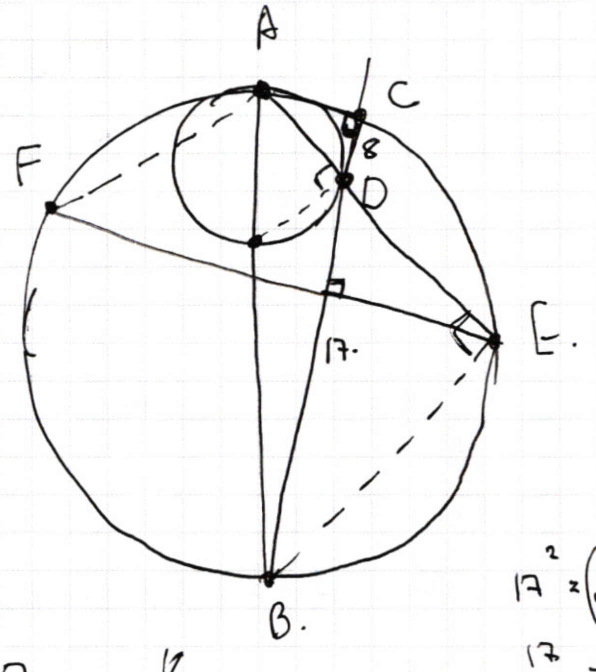
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

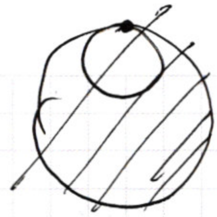
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





$CD = 8$

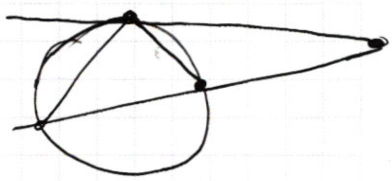
$BD = 17.$

2	3	5	7	11	13	17	19	23.
0	0	1	1	2	3	4	4	5.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

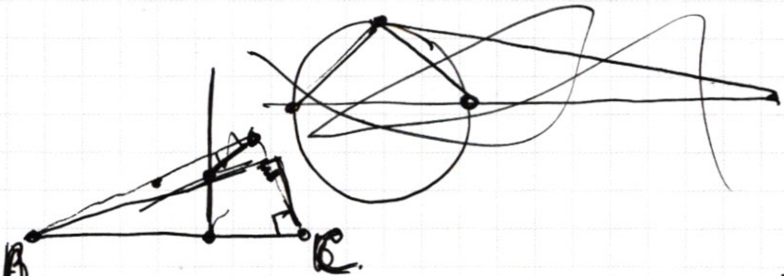
0 1 0

1.



$17^2 = (2R-2r)^2 \cdot (2R)$

$\frac{17}{2R} =$



$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 8 \\ \hline 136 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 225 \\ -136 \\ \hline 89 \end{array}$$

$8x^2+30x+17.$

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b.$

$D_1 = 225-17\cdot 8 =$

$= 225-136 =$

$=$

$\frac{12x+11}{4x+3} \le -8x^2-30x-17.$

$ax+b \le -8x^2-30x-17.$

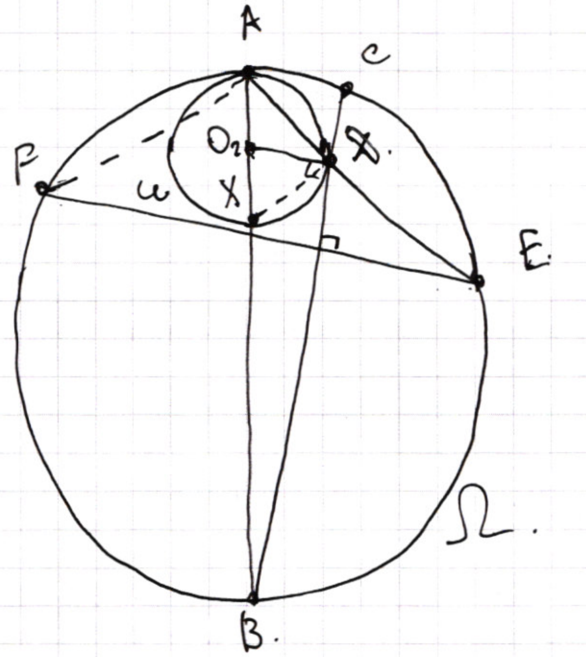
$12x+11 \ge 4ax^2+4bx+3ax+3b.$

$4ax^2+(4b+3a-12)x+3b-11 \le 0.$

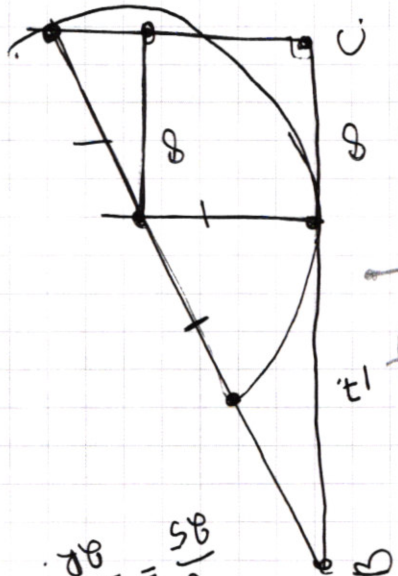
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Дано:
$CD = 8.$
$DB = 17.$
Найти:
r_ω, R_Ω
$\angle AFE$
$S_{\triangle AFE}$.



$\frac{78}{1} = \frac{58}{8}$

Реш: ~~Пусть AE ∩ BC = X~~. Пусть $AB \cap \omega = X$. Тогда докажем, что $\triangle ADB \sim \triangle BXD$:

$BX \cdot XA = DB^2 \Rightarrow \frac{BX}{DB} = \frac{DB}{XA}$ и $\angle B$ – общий $\Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle ADB \sim \triangle BXD$.

Значит $BX \cdot XA = (2R - 2r) \cdot 2r = BD^2$

$\cancel{AX \frac{BD}{AB} = \frac{BD}{2R} =}$

Пусть центр ω – O_2. Тогда $O_2D \perp BC$ и:

$-r^2 + (2R - r)^2 = \cancel{AB} AO_2^2 + O_2D^2 = BD^2$ – по т. Пифа.

Итого:

$$\begin{cases} (2R - 2r) \cdot 2r = BD^2 \\ (2R - r)^2 - r^2 = BD^2 \end{cases} \quad 4R^2 - 4Rr = BD^2.$$

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{\cancel{BC}\ BD}{BC} = \frac{16}{25}.$$

$$* \ 1 - \frac{r}{2R} = \frac{16}{25}.$$

$$\frac{r}{2R} = \frac{9}{25}.$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

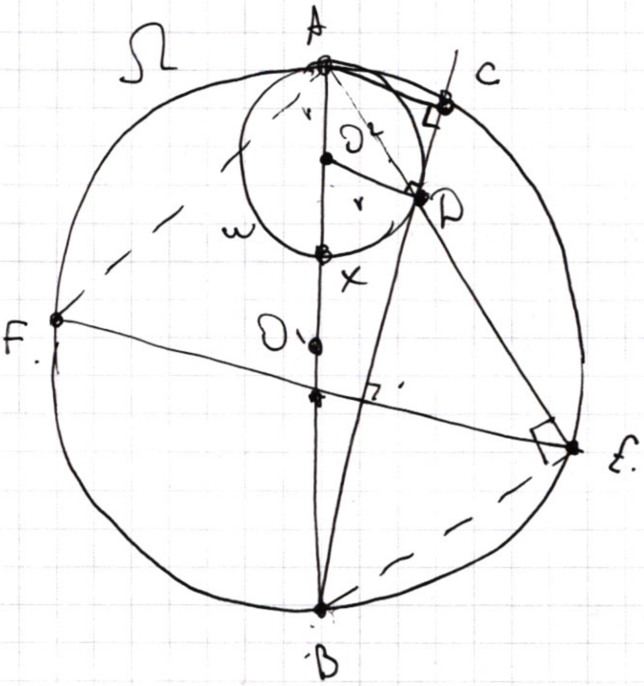
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Дано: AB - диам Ω.

CD = 8

BD = 17.

$\Omega \cap \omega = A$.

Найти:

~~A~~ R_Ω -? r_ω -?

$\angle AFE$

$S_{\triangle AFE}$.

Реш: $\angle ACB = 90^\circ$, т.к он опир. на диаметр.

Тогда $\triangle BO_2D \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{BD}{BC} = \frac{\cancel{8}\,\cancel{16}\,17}{25}$.

Пусть $AB \cap \omega = X$.

Тогда $BD^2 = AB \cdot XB = (2R-2r)(2R)$

$$\begin{cases} \cancel{2r = \frac{16}{25}2R} \quad \cancel{r = 2R - \frac{16}{25}R = \frac{34}{25}} \quad r = \frac{8}{25}\cdot 2R. \\ (2R - \frac{\cancel{16}\,8}{25}2R)\cdot 2R = 17^2 \quad \rightarrow \quad \cancel{\frac{8\sqrt{17}}{5}}\cdot 2R = 17. \end{cases}$$

$R = \frac{5\sqrt{17}}{6} \rightarrow r = \frac{17\cdot 8}{3\cdot 5} = \frac{136}{15}$.

~~$\angle AFE = \angle ABE$ – опираются на одну дугу.~~

~~Найдём AD по т. косинусов:~~

~~$AB^2 + BD^2 - 2\cos\angle ABC \cdot AB \cdot BD = 4R^2 + 17^2 - 2\cdot\frac{BD}{BO_2}\cdot 2R\cdot 17 = AD^2$~~

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

~~$4R^2+17^2-2\cdot\frac{17}{2R-r}\cdot 2R\cdot 17 = AD^2$.~~

~~$4\cdot\left(\frac{85}{6}\right)^2$~~

$2R\cdot\frac{\sqrt{17}}{5}=17$

$R=5\sqrt{17}$

~~$2R\cdot\frac{\sqrt{17}}{5}=17.$~~

~~$R=\frac{5\sqrt{17}}{2}\rightarrow r=\frac{4\sqrt{17}}{5}$~~

$\angle AFE=\angle ABC$ – т.к. они опир. на 1 дугу.

$AD^2=AB^2+BD^2-2\cos\angle ABC\cdot AB\cdot BD=4R^2+BD^2-$

$-2\cdot\frac{BD}{BO_2}\cdot AB\cdot BD=4R^2+BD^2-4R\cdot BD^2\cdot\frac{1}{2R-r}=$

$=\frac{25}{4}\cdot 17\cdot 4+17^2-4\cdot\frac{5\sqrt{17}}{2}\cdot 17^2\cdot\frac{1}{\sqrt{17}\cdot\left(\frac{5}{2}-\frac{4}{5}\right)}$.

~~$=25\cdot 17+17^2-10\cdot 17^2\cdot\frac{10}{17}=24\cdot 17+17=17\cdot 41.$~~

$=25\cdot 17+17^2-10\cdot 17^2\cdot\frac{5}{21}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)