

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения  $\operatorname{tg} \alpha$ , если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}.$$

4. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Прямая, проходящая через точку  $E$  перпендикулярно  $BC$ , повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $F$ . Найдите радиусы окружностей, угол  $AFE$  и площадь треугольника  $AEF$ , если известно, что  $CD = 12$ ,  $BD = 13$ .
5. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/4]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $4 \leq x \leq 28$ ,  $4 \leq y \leq 28$  и  $f(x/y) < 0$ .
6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $(\frac{2}{3}; 2]$ .

7. [6 баллов] Данна пирамида  $XYZT$ , вершина  $Y$  которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра  $TY$ . Известно, что  $XY = \sqrt{3}$ ,  $TX = \sqrt{2}$ ,  $TZ = 2$ . Найдите длину ребра  $XZ$ . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} N2 \quad & \left( y - 6x = \sqrt{x(y - 6x - y + 6)} \right), \quad \left\{ y - 6 - 6(x-1) = \sqrt{(x-1)(y-6)}, \quad (3) \right. \\ & \left\{ 3x^2 + y^2 - 18x - 12y = 55; \quad \left\{ 9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90; \right. \right. \end{aligned}$$

Рассмотрим  $y - 6 = b$ ,  $x - 1 = a$ , тогда:

$$\begin{cases} b - 6a = \sqrt{ab}, \quad (1) \\ 9a^2 + b^2 = 90; \quad (2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \Rightarrow & b^2 + 36a^2 - 12ab = ab \Rightarrow (by (2)) \quad 90 + 27a^2 = 13ab \Rightarrow \\ \Rightarrow b = & \frac{90 + 27a^2}{13a} = \frac{9(10 + 3a^2)}{13a} \Rightarrow (by (2)): a^2 + \frac{9(10 + 3a^2)^2}{189a^2} = 60 \Rightarrow \\ \Rightarrow & 162a^4 - 162a^2 + 900 + 81a^4 + 540a^2 = 0 \Rightarrow 250a^4 - 1150a^2 + 900 = 0 \\ \Rightarrow & 10a^4 - 46a^2 + 36 = 0 \end{aligned}$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{2116 - 14400} = \sqrt{7742} = \sqrt{7742} = 26$$

$$a^2 = \frac{90 \pm 26}{20}, \quad a_1 = 7, \quad a_2 = 3,6$$

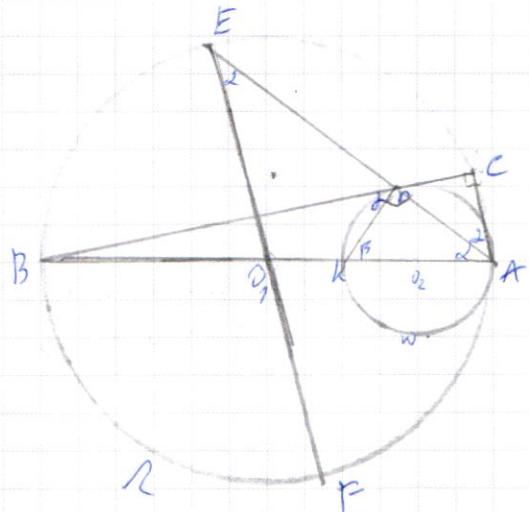
$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{90}{13} = 9 \quad (\text{н.к. } b = \frac{90 + 27a^2}{13a}), \quad 9 - 6 = \sqrt{9 \cdot 7} \quad \& \quad 9 + 9^2 = 90 \Rightarrow \text{решение} \\ b_2 &= \frac{90 + 27 \cdot \frac{18^2}{5^2}}{13 \cdot \frac{13}{5}} = 9 \left( \frac{250 + 972}{13 \cdot 18 \cdot 5} \right) = \frac{125 + 986}{13 \cdot 5} = \frac{611}{13 \cdot 5} = \frac{44}{5} = 9,4 \quad \text{найдено} \end{aligned}$$

если  $a = 0$ ;  $x = 1$ ,  $y = 6$  (из 3), но  $9(y-1)^2 + (b-6)^2 \neq 90 \Rightarrow b \neq 0$

$$x_1 = 2, y_1 = 15, \quad x_2 = 9,6, y_2 = 15,4$$

Ответ:  $(2; 15), (9,6; 15,4)$

N3



Dawo: N, W -ong-ta,

$\mathcal{R}$  has w B m- A, BA-

Mariepp N., BP - kade W.,

$$B \cap R = C, A \cap R = E,$$

$EF \perp BC$ ,  $F \in h$ ,  $C \in l$

$$\beta n = 13.$$

Naam: Rz, R<sub>w</sub>, CAFE,

SAEF

Timeline:

2) Plot  $\sigma$  vs  $\theta$  measured from the  $w$  in B, if  $\tau = 15\text{P}$ -water molecule?  $B\tau^2 = BK$

$$BA = (2R - 2r) \cdot 2R = 4R^2 - 4Rr = 169 \Rightarrow r = \frac{4R^2 - 169}{4R}, \text{ т.к. } DE -$$

Cop. neg.  $\propto BC$ , mo  $VBE = VEC = 2\lambda \Rightarrow ZEAC = \lambda \Rightarrow CN = DA \times \sin 2 \angle MCK$

$$\angle B(A=90^\circ) \Rightarrow CP = KA \cdot \cos 2 \cdot \sin x = 24 \cdot \cos 3x \cdot \sin x = 12 \cdot \sin(2x) = 12 \cdot \text{kg}$$

$$\Delta BCA: BC = BA \cdot \sin 2\alpha = 2R \cdot \sin 2\alpha = 25 \Rightarrow \frac{2R}{r} = \frac{25}{12} \quad (\text{m.k } \sin 120^\circ \neq 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R = \frac{24R}{25} \Rightarrow 4R^2 - \frac{96R^2}{25} = 169 \Rightarrow 4R^2 = 25 + 169 \Rightarrow 2R = 5 \cdot 13 \Rightarrow R = \frac{65}{2} = 32,5$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow r = \frac{12+5\sqrt{3}}{25} = \frac{12\sqrt{3}}{5} = \frac{12}{\sqrt{2}}; \text{ m.n. } 2R \sin^2 \alpha = 25, \text{ m.e. } \sin^2 \alpha = \frac{25}{5+13} = \frac{5}{13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{12}{\sqrt{13}} \quad (\text{m.k. } \underline{\alpha=30^\circ}) \Rightarrow 1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{12}{13} \Rightarrow 2\sin^2 \alpha = \frac{1}{13} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$(\text{m.k. } \alpha < 90^\circ) \Rightarrow \cos \beta = \frac{1}{\sqrt{26}} \quad (\text{m.k. } \sin \alpha = \cos \beta, \text{ m.k. } \alpha + \beta = 90^\circ) \Rightarrow \beta = \arccos \left( \frac{1}{\sqrt{26}} \right)$$

$$\angle EFA = \beta \quad (\text{m.k. } \angle A = 90^\circ) = 80^\circ - \alpha = \beta \quad (\text{m.k. } \angle F = 90^\circ \text{ и } \angle A = 90^\circ) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \angle EFA = \arccos \frac{1}{\sqrt{26}},$$

3)  $E = EF \cdot \cos \alpha, AF = EF \cdot \sin \alpha \Rightarrow S_{EAF} = \frac{1}{2} EF^2 \cdot \cos \alpha + \sin \alpha \quad (\text{m.k. } \angle EAF = 90^\circ)$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4R^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha = R^2 \cdot \sin 2\alpha = \frac{65}{2} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1825}{4} = 456,25$$

Ответ:  $R_2 = 32,5; R_0 = \frac{12}{\sqrt{2}}; \angle AFE = \arccos \frac{1}{\sqrt{26}}; S_{EAF} = 456,25$

N5  $f(a) = f(c) + f(b)$

~~если~~  $a = b, c = \frac{1}{a} : f(a) = f(a) + f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(a) = 0 \Rightarrow f(a) = 0$

2) если  $a = b, c = \frac{1}{a} : f(1) = 0 = f(a) + f(\frac{1}{a}) \Rightarrow f(\frac{1}{a}) = -f(a)$

3) если  $a \neq b, c = p : f(a+p) = f(a) + f(p) \Rightarrow f(p, p_2, \dots, p_n) =$

$$= d_1 f(p_1) + \dots + d_n f(p_n) \quad (d_i \in N, p_i \text{ не-множ. } \forall i)$$

n.1 При  $x = 4\sqrt{6}\sqrt{8}\sqrt{9}\sqrt{12}\sqrt{16}\sqrt{18}\sqrt{24}\sqrt{24}$   $f(x) = 0$  (м.к. все они состоят из степеней 2 и 3, а  $f(2) = \left[ \frac{2}{4} \right] = 0, f(3) = \left[ \frac{3}{4} \right] = 0$ , и из об. б.).

При этом все такие члены ~~от~~ от 4 до 28  $\Rightarrow$  при любом другом катушечном

числе этого выражения  $f(x) > 0$  (м.к. в таких числах будет присутств. 1) вспомним об. б.).

2) при этом можно показать  $f(p) \geq 0$ , а значит по об. б.  $f(x) \geq 0$   $\Rightarrow$  существует

9-16 пар  $(x, y)$  таких что  $|f(x) - f(y)| < 0$ , т.е.  $f(\frac{x}{y}) f(x+y) < 0$  и  $f(\frac{x}{y}) < 0$ .

n.2 При  $x = 5\sqrt{3}, 10, 14, 15, 20, 21, 22$   $f(x) = 1$  (м.к. все эти числа не делители квадратного корня из 2 и 3 и по об. б., и при

такие пары  $(x, y)$  для которых  $f(x) \geq 2$  и  $f(y) \geq 2$  есть

$f(x) \geq 2$  для любых  $x \neq 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27, 5, 7, 10, 9, 15, 20, 21$ ,  
таких  $x$   
 $\Rightarrow$  (аналогично  $y$ )  $\Rightarrow$  существует 8·8 пар  $(x, y)$  для которых  $f\left(\frac{x}{y}\right) \geq 0$   
(аналогично  $x$ ).

n.3. При  $x = 11\sqrt{22} \vee 25$   $f(x) = 2 \Rightarrow$  (аналогично  $n_1, n_2$ ) существует 3·5 пар  
 $(x, y)$  для которых  $f\left(\frac{x}{y}\right) \geq 0$

n.4. При  $x = 13, 20$   $f(x) = 3 \Rightarrow$  (аналогично  $n_1, n_2$ )  $\exists$  2·3 пар  $(x, y)$   
для которых  $f\left(\frac{x}{y}\right) \geq 0$

n.5. При  $x = 17, 19$   $f(x) = 4 \Rightarrow$  (аналогично  $n_1, n_2$ )  $\exists$  2·4 пар  $(x, y)$   
для которых  $f\left(\frac{x}{y}\right) \geq 0$

n.6. При  $x = 19$   $f(x) = 5 \Rightarrow$  (аналогично  $n_1, n_2$ ). при таких  $x \exists$  7·1 пар  $(x, y)$   
для которых  $f\left(\frac{x}{y}\right) \geq 0$

n.8. При  $x = 23$   $\exists$  0 пар для которых  $f\left(\frac{x}{y}\right) \geq 0$  т.к.  $f(23) = 5$ ,  
а при всех других  $x$   $f(x) < 5$

Из n 7-6:  $\exists 9 \cdot 6 + 8 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 0 = 144 + 64 + 15 + 5 + 2 =$   
 $= 230$  пар для которых  $f\left(\frac{x}{y}\right) \geq 0$

Ответ: 230

$$N_1 \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{14}} \quad (1)$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{14}} \Rightarrow 2 \sin(2\alpha + 2\beta) \cos(2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{14}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{из } (1)) \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm \frac{4}{\sqrt{14}}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta \pm \cos 2\alpha \sin 2\beta = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{14}} \pm \frac{9 \cos 2\alpha}{\sqrt{14}} = -\frac{1}{\sqrt{14}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha \pm 9 \cos 2\alpha = -1 \Rightarrow 16 \cos^2 2\alpha = 1 + \sin^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 16(\cos^2 2\alpha + \sin^2 2\alpha) = 17 \sin^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha + 1 \Rightarrow 17 \sin^2 2\alpha + 2 \sin 2\alpha - 15 = 0$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{14 + 1020} = 32 \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{-2 - 32}{34} \vee \frac{-2 + 32}{34} \Rightarrow \sin 2\alpha = \pm \frac{15}{17}$$

$$= -1 \vee \frac{15}{17}, \text{ но } \sin 2\alpha = -1, \text{ то } 2\alpha = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2\alpha = \pi + 2k\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = -1 \Rightarrow \frac{15}{17} \Rightarrow \frac{15}{17} = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 2 \sin 2\alpha \sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} \Rightarrow$$

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$f(a+b) = f(a) + f(b)$$

$$f(p) = \left[ \begin{matrix} p \\ q \end{matrix} \right] \quad \forall p \in P$$

$$7 \leq x \leq 28$$

$$4 \leq y \leq 28$$

$$f\left(\frac{x}{y}\right) \leq 0$$

$$f(p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_n^{t_n}) = t_1 f(p_1) + \cdots + t_n f(p_n)$$

$$f(a) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$$

$$f(a^2) = 2f(a)$$

$$f(1) = f(a) + f(1/a)$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{7} & \cancel{8} & \cancel{9} \\ \cancel{11} & \cancel{12} & \cancel{13} & \cancel{14} & \cancel{15} & \cancel{16} & \cancel{17} & \cancel{18} & \cancel{19} \\ \cancel{21} & \cancel{22} & \cancel{23} & \cancel{24} & \cancel{25} & \cancel{26} & \cancel{27} & \cancel{28} & \cancel{29} \end{array}$$

$$f(1/a) = -f(a)$$

$$f(x) - f(y) < 0$$

$$2232 \quad 25$$

$$f(y) > f(x)$$

$$\begin{array}{cccccc} 2^{-4} & 3^{-3} & 15^{-2} \\ \cancel{4}, \cancel{11}, \cancel{13}, \cancel{17}, \cancel{19}, \\ 23, \end{array}$$

$$-t_1 f(p_1) - \cdots - t_n f(p_n)$$

$$-t_1 \left[ \begin{matrix} p_1 \\ q \end{matrix} \right] - \cdots - t_n \left[ \begin{matrix} p_n \\ q \end{matrix} \right] > p_1 \left[ \begin{matrix} q_1 \\ q \end{matrix} \right] + \cdots + p_n \left[ \begin{matrix} q_n \\ q \end{matrix} \right]$$

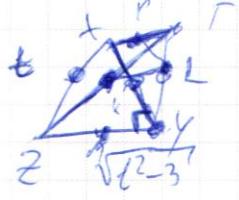
$$\begin{array}{c} 4 \\ \text{if } x = 4 \\ \text{if } x = 8 \\ \text{if } x = 9 \end{array}$$

$$f(4) = f(2) + f(2) = 2 \cdot 2 = 4$$

$$\text{верно при } \sqrt{y} + 4, 6, 3, 9, 12, 24 \text{ и т.д.}$$

$$f(2) = 0 \quad f(13) = 0 \quad f(11) = 2$$

$$\text{верно при } \sqrt{y} + 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101, 107, 109, 113, 127, 131, 137, 149, 151, 157, 163, 173, 179, 181, 191, 197, 199, 211, 223, 227, 233, 241, 251, 257, 263, 271, 281, 291, 307, 311, 317, 331, 347, 359, 367, 373, 383, 397, 401, 409, 421, 431, 443, 457, 463, 479, 487, 491, 503, 521, 541, 547, 563, 571, 587, 593, 601, 613, 623, 631, 643, 653, 661, 673, 683, 691, 701, 713, 721, 731, 743, 751, 761, 773, 781, 791, 803, 811, 823, 831, 841, 853, 861, 871, 883, 891, 901, 913, 921, 931, 941, 953, 961, 971, 983, 991, 1001, 1013, 1021, 1031, 1043, 1051, 1063, 1071, 1083, 1091, 1101, 1113, 1121, 1131, 1143, 1151, 1163, 1171, 1183, 1191, 1201, 1213, 1221, 1231, 1243, 1251, 1263, 1271, 1283, 1291, 1301, 1313, 1321, 1331, 1343, 1351, 1363, 1371, 1383, 1391, 1401, 1413, 1421, 1431, 1443, 1451, 1463, 1471, 1483, 1491, 1501, 1513, 1521, 1531, 1543, 1551, 1563, 1571, 1583, 1591, 1601, 1613, 1621, 1631, 1643, 1651, 1663, 1671, 1683, 1691, 1701, 1713, 1721, 1731, 1743, 1751, 1763, 1771, 1783, 1791, 1801, 1813, 1821, 1831, 1843, 1851, 1863, 1871, 1883, 1891, 1901, 1913, 1921, 1931, 1943, 1951, 1963, 1971, 1983, 1991, 2001, 2013, 2021, 2031, 2043, 2051, 2063, 2071, 2083, 2091, 2101, 2113, 2121, 2131, 2143, 2151, 2163, 2171, 2183, 2191, 2201, 2213, 2221, 2231, 2243, 2251, 2263, 2271, 2283, 2291, 2301, 2313, 2321, 2331, 2343, 2351, 2363, 2371, 2383, 2391, 2401, 2413, 2421, 2431, 2443, 2451, 2463, 2471, 2483, 2491, 2501, 2513, 2521, 2531, 2543, 2551, 2563, 2571, 2583, 2591, 2601, 2613, 2621, 2631, 2643, 2651, 2663, 2671, 2683, 2691, 2701, 2713, 2721, 2731, 2743, 2751, 2763, 2771, 2783, 2791, 2801, 2813, 2821, 2831, 2843, 2851, 2863, 2871, 2883, 2891, 2901, 2913, 2921, 2931, 2943, 2951, 2963, 2971, 2983, 2991, 3001, 3013, 3021, 3031, 3043, 3051, 3063, 3071, 3083, 3091, 3101, 3113, 3121, 3131, 3143, 3151, 3163, 3171, 3183, 3191, 3201, 3213, 3221, 3231, 3243, 3251, 3263, 3271, 3283, 3291, 3301, 3313, 3321, 3331, 3343, 3351, 3363, 3371, 3383, 3391, 3401, 3413, 3421, 3431, 3443, 3451, 3463, 3471, 3483, 3491, 3501, 3513, 3521, 3531, 3543, 3551, 3563, 3571, 3583, 3591, 3601, 3613, 3621, 3631, 3643, 3651, 3663, 3671, 3683, 3691, 3701, 3713, 3721, 3731, 3743, 3751, 3763, 3771, 3783, 3791, 3801, 3813, 3821, 3831, 3843, 3851, 3863, 3871, 3883, 3891, 3901, 3913, 3921, 3931, 3943, 3951, 3963, 3971, 3983, 3991, 4001, 4013, 4021, 4031, 4043, 4051, 4063, 4071, 4083, 4091, 4101, 4113, 4121, 4131, 4143, 4151, 4163, 4171, 4183, 4191, 4201, 4213, 4221, 4231, 4243, 4251, 4263, 4271, 4283, 4291, 4301, 4313, 4321, 4331, 4343, 4351, 4363, 4371, 4383, 4391, 4401, 4413, 4421, 4431, 4443, 4451, 4463, 4471, 4483, 4491, 4501, 4513, 4521, 4531, 4543, 4551, 4563, 4571, 4583, 4591, 4601, 4613, 4621, 4631, 4643, 4651, 4663, 4671, 4683, 4691, 4701, 4713, 4721, 4731, 4743, 4751, 4763, 4771, 4783, 4791, 4801, 4813, 4821, 4831, 4843, 4851, 4863, 4871, 4883, 4891, 4901, 4913, 4921, 4931, 4943, 4951, 4963, 4971, 4983, 4991, 5001, 5013, 5021, 5031, 5043, 5051, 5063, 5071, 5083, 5091, 5101, 5113, 5121, 5131, 5143, 5151, 5163, 5171, 5183, 5191, 5201, 5213, 5221, 5231, 5243, 5251, 5263, 5271, 5283, 5291, 5301, 5313, 5321, 5331, 5343, 5351, 5363, 5371, 5383, 5391, 5401, 5413, 5421, 5431, 5443, 5451, 5463, 5471, 5483, 5491, 5501, 5513, 5521, 5531, 5543, 5551, 5563, 5571, 5583, 5591, 5601, 5613, 5621, 5631, 5643, 5651, 5663, 5671, 5683, 5691, 5701, 5713, 5721, 5731, 5743, 5751, 5763, 5771, 5783, 5791, 5801, 5813, 5821, 5831, 5843, 5851, 5863, 5871, 5883, 5891, 5901, 5913, 5921, 5931, 5943, 5951, 5963, 5971, 5983, 5991, 6001, 6013, 6021, 6031, 6043, 6051, 6063, 6071, 6083, 6091, 6101, 6113, 6121, 6131, 6143, 6151, 6163, 6171, 6183, 6191, 6201, 6213, 6221, 6231, 6243, 6251, 6263, 6271, 6283, 6291, 6301, 6313, 6321, 6331, 6343, 6351, 6363, 6371, 6383, 6391, 6401, 6413, 6421, 6431, 6443, 6451, 6463, 6471, 6483, 6491, 6501, 6513, 6521, 6531, 6543, 6551, 6563, 6571, 6583, 6591, 6601, 6613, 6621, 6631, 6643, 6651, 6663, 6671, 6683, 6691, 6701, 6713, 6721, 6731, 6743, 6751, 6763, 6771, 6783, 6791, 6801, 6813, 6821, 6831, 6843, 6851, 6863, 6871, 6883, 6891, 6901, 6913, 6921, 6931, 6943, 6951, 6963, 6971, 6983, 6991, 7001, 7013, 7021, 7031, 7043, 7051, 7063, 7071, 7083, 7091, 7101, 7113, 7121, 7131, 7143, 7151, 7163, 7171, 7183, 7191, 7201, 7213, 7221, 7231, 7243, 7251, 7263, 7271, 7283, 7291, 7301, 7313, 7321, 7331, 7343, 7351, 7363, 7371, 7383, 7391, 7401, 7413, 7421, 7431, 7443, 7451, 7463, 7471, 7483, 7491, 7501, 7513, 7521, 7531, 7543, 7551, 7563, 7571, 7583, 7591, 7601, 7613, 7621, 7631, 7643, 7651, 7663, 7671, 7683, 7691, 7701, 7713, 7721, 7731, 7743, 7751, 7763, 7771, 7783, 7791, 7801, 7813, 7821, 7831, 7843, 7851, 7863, 7871, 7883, 7891, 7901, 7913, 7921, 7931, 7943, 7951, 7963, 7971, 7983, 7991, 8001, 8013, 8021, 8031, 8043, 8051, 8063, 8071, 8083, 8091, 8101, 8113, 8121, 8131, 8143, 8151, 8163, 8171, 8183, 8191, 8201, 8213, 8221, 8231, 8243, 8251, 8263, 8271, 8283, 8291, 8301, 8313, 8321, 8331, 8343, 8351, 8363, 8371, 8383, 8391, 8401, 8413, 8421, 8431, 8443, 8451, 8463, 8471, 8483, 8491, 8501, 8513, 8521, 8531, 8543, 8551, 8563, 8571, 8583, 8591, 8601, 8613, 8621, 8631, 8643, 8651, 8663, 8671, 8683, 8691, 8701, 8713, 8721, 8731, 8743, 8751, 8763, 8771, 8783, 8791, 8801, 8813, 8821, 8831, 8843, 8851, 8863, 8871, 8883, 8891, 8901, 8913, 8921, 8931, 8943, 8951, 8963, 8971, 8983, 8991, 9001, 9013, 9021, 9031, 9043, 9051, 9063, 9071, 9083, 9091, 9101, 9113, 9121, 9131, 9143, 9151, 9163, 9171, 9183, 9191, 9201, 9213, 9221, 9231, 9243, 9251, 9263, 9271, 9283, 9291, 9301, 9313, 9321, 9331, 9343, 9351, 9363, 9371, 9383, 9391, 9401, 9413, 9421, 9431, 9443, 9451, 9463, 9471, 9483, 9491, 9501, 9513, 9521, 9531, 9543, 9551, 9563, 9571, 9583, 9591, 9601, 9613, 9621, 9631, 9643, 9651, 9663, 9671, 9683, 9691, 9701, 9713, 9721, 9731, 9743, 9751, 9763, 9771, 9783, 9791, 9801, 9813, 9821, 9831, 9843, 9851, 9863, 9871, 9883, 9891, 9901, 9913, 9921, 9931, 9943, 9951, 9963, 9971, 9983, 9991, 10001, 10013, 10021, 10031, 10043, 10051, 10063, 10071, 10083, 10091, 10101, 10113, 10121, 10131, 10143, 10151, 10163, 10171, 10183, 10191, 10201, 10213, 10221, 10231, 10243, 10251, 10263, 10271, 10283, 10291, 10301, 10313, 10321, 10331, 10343, 10351, 10363, 10371, 10383, 10391, 10401, 10413, 10421, 10431, 10443, 10451, 10463, 10471, 10483, 10491, 10501, 10513, 10521, 10531, 10543, 10551, 10563, 10571, 10583, 10591, 10601, 10613, 10621, 10631, 10643, 10651, 10663, 10671, 10683, 10691, 10701, 10713, 10721, 10731, 10743, 10751, 10763, 10771, 10783, 10791, 10801, 10813, 10821, 10831, 10843, 10851, 10863, 10871, 10883, 10891, 10901, 10913, 10921, 10931, 10943, 10951, 10963, 10971, 10983, 10991, 11001, 11013, 11021, 11031, 11043, 11051, 11063, 11071, 11083, 11091, 11101, 11113, 11121, 11131, 11143, 11151, 11163, 11171, 11183, 11191, 11201, 11213, 11221, 11231, 11243, 11251, 11263, 11271, 11283, 11291, 11301, 11313, 11321, 11331, 11343, 11351, 11363, 11371, 11383, 11391, 11401, 11413, 11421, 11431, 11443, 11451, 11463, 11471, 11483, 11491, 11501, 11513, 11521, 11531, 11543, 11551, 11563, 11571, 11583, 11591, 11601, 11613, 11621, 11631, 11643, 11651, 11663, 11671, 11683, 11691, 11701, 11713, 11721, 11731, 11743, 11751, 11763, 11771, 11783, 11791, 11801, 11813, 11821, 11831, 11843, 11851, 11863, 11871, 11883, 11891, 11901, 11913, 11921, 11931, 11943, 11951, 11963, 11971, 11983, 11991, 12001, 12013, 12021, 12031, 12043, 12051, 12063, 12071, 12083, 12091, 12101, 12113, 12121, 12131, 12143, 12151, 12163, 12171, 12183, 12191, 12201, 12213, 12221, 12231, 12243, 12251, 12263, 12271, 12283, 12291, 12301, 12313, 12321, 12331, 12343, 12351, 12363, 12371, 12383, 12391, 12401, 12413, 12421, 12431, 12443, 12451, 12463, 12471, 12483, 12491, 12501, 12513, 12521, 12531, 12543, 12551, 12563, 12571, 12583, 12591, 12601, 12613, 12621, 12631, 12643, 12651, 12663, 12671, 12683, 12691, 12701, 12713, 12721, 12731, 12743, 12751, 12763, 12771, 12783, 12791, 12801, 12813, 12821, 12831, 12843, 12851, 12863, 12871, 12883, 12891, 12901, 12913, 12921, 12931, 12943, 12951, 12963, 12971, 12983, 12991, 13001, 13013, 13021, 13031, 13043, 13051, 13063, 13071, 13083, 13091, 13101, 13113, 13121, 13131, 13143, 13151, 13163, 13171, 13183, 13191, 13201, 13213, 13221, 13231, 13243, 13251, 13263, 13271, 13283, 13291, 13301, 13313, 13321, 13331, 13343, 13351, 13363, 13371, 13383, 13391, 13401, 13413, 13421, 13431, 13443, 13451, 13463, 13471, 13483, 13491, 13501, 13513, 13521, 13531, 13543, 13551, 13563, 13571, 13583, 13591, 13601, 13613, 13621, 13631, 13643, 13651, 13663, 13671, 13683, 13691, 13701, 13713, 13721, 13731, 13743, 13751, 13763, 13771, 13783, 13791, 13801, 13813, 13821, 13831, 13843, 13851, 13863, 13871, 13883, 13891, 13901, 13913, 13921, 13931, 13943, 13951, 13963, 13971, 13983, 13991, 14001, 14013, 14021, 14031, 14043, 14051, 14063, 14071, 14083, 14091, 14101, 14113, 14121, 14131, 14143, 14151, 14163, 14171, 14183, 14191, 14201, 14213, 14221, 14231, 14243, 14251, 14263, 14271, 14283, 14291, 14301, 14313, 14321, 14331, 14343, 14351, 14363, 14371, 14383, 14391, 14401, 14413, 14421, 14431, 14443, 14451,$$



$$kL = 1 \quad PL = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

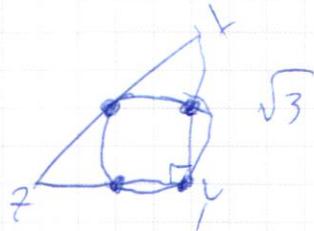
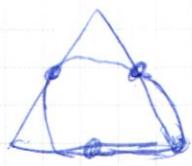
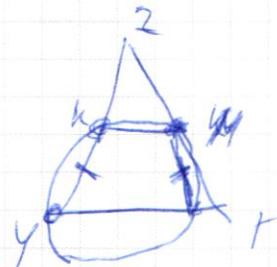
$$xy = \sqrt{3}$$

$$tx = 2\sqrt{3}$$

$$tz = 2$$

$$xz ?$$

$$\frac{t}{2} i \quad 1 \quad 1 \quad \frac{1}{\sqrt{2}}$$



$$\sin(\rho_2 + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$2\sin(\rho_2 + 2\beta) \cos(2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{-2}{\sqrt{14}} \cdot \cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{14}}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\sin 2\beta = \pm \frac{4}{\sqrt{14}}$$

$$\frac{\sin 2\lambda}{\sqrt{14}} \pm \frac{4 \cos 2\lambda}{\sqrt{14}} = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$\sin 2\lambda \pm 4 \cos 2\lambda = -1 =$$

$$\begin{aligned} &= -\sin^2 2\lambda - \cos^2 2\lambda \\ &\sin^2 2\lambda + \sin^2 2\lambda + 4 \cos^2 2\lambda + \\ &- 7 + 2 \sin^2 2\lambda - 2 \sin^2 2\lambda + \cos^2 2\lambda = 0 \end{aligned}$$

$$\pm 4 \cos 2\lambda = -1 \mp \sin 2\lambda$$

$$16 \cos^2 2\lambda = 7 + \sin^2 2\lambda + \\ 76(7 - \sin^2 2\lambda) + 2 \sin 2\lambda$$



чертёжник

(Поставьте галочку в нужном поле)

чистовик

Страница № \_\_\_\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{36}{60} = \frac{18}{5} \quad 90 + \frac{8104 - 74}{25} = \frac{(90025 + 7104024) \cdot 8}{28013018} \quad 90 \\ 130 \frac{18}{5} 2110 - 1990 = 648 \quad 5 \quad 611113 \\ 4 \frac{52}{37} 44$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$670 \mid 20^2 \quad 2509 \quad 810 + 112$$

$$23^2 = 529 \\ 600 + 970 + 430 + 45 =$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) + 5\sin 2\alpha = -\frac{2}{14}$$

$$92^2 + \frac{8100 + 3600 + 20024}{16900} =$$

$$6x = 529$$

$$3 \cdot 2_1 \cdot 2_2 \cdot 2_3$$

$$529 - 30 =$$

$$= 493$$

$$14 \cdot 029$$

$$1892 \neq 4 \\ 493 \neq 12 \\ 23 \neq 12 \\ 1942$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) / 2$$

$$\cos \sin 2\beta = \pm \frac{y}{\sqrt{14}}$$

$$y - 6x = \sqrt{x(y-6) - xy + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{14}}$$

$$(3x-3)^2 + (y-6)^2 = 9-36 = 95 + \frac{270}{89}$$

$$900 \quad 4 \quad \frac{9}{14} \quad 2632 \cdot \frac{1}{14}$$

$$(3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90$$

$$\sin 2\alpha \pm 48052 \alpha = -1$$

$$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$$

$$\sin 2\alpha \pm 4\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = -1 - \sin 2\alpha$$

$$y - 6x = \sqrt{x(y-6) - xy + 6} = \\ = \sqrt{(x-1)(y-6)} = \sqrt{xy - 6x - y + 6}$$

$$x-1 = a \quad b = \frac{30 + 2y^2}{13a} \quad 77 \sin^2 2\alpha + 25b^2 -$$

$$y = 6 \sqrt{x-1} = \sqrt{xy - 6x}$$

$$+ 25b^2 - 96(1 - \sin^2 2\alpha) = 7 + 5(\sin^2 2\alpha)$$

$$= (y-6) * -6(x-1)$$

$$b - 6a = \sqrt{9b^2 - 13ab + 90} = \frac{9 + 8\sqrt{15-17}}{14} =$$

$$52 - 300 \quad 30 - 52 \quad 248$$

$$b^2 + 36a^2 - 12ab = ab = \frac{94255 + 11}{14} =$$

$$338 - 135a^2 \pm 26\sqrt{-} = 90$$

$$\sqrt{D_B} = \sqrt{169 - 4 \cdot 36 \cdot a^2} = \frac{9 + 8\sqrt{15-17}}{14} =$$

$$135a^2 - 248 = \pm 20\sqrt{-}$$

$$b^2 + 36a^2 - 13ab = 0 = \frac{9 + 8\sqrt{15-17}}{14} =$$

$$135a^2 + 248 = b^2 = 338 - 144a^2 \pm 26\sqrt{-} \quad \sin 2\alpha = \frac{2 + 32}{34} =$$

$$= 169 - 144a^2$$



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № \_\_\_\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Rightarrow \frac{725}{289} = 4 \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) \Rightarrow 4 \sin^4 \alpha - 4 \sin^2 \alpha + \frac{725}{289} = 0$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{78 - 16 \cdot \frac{225}{289}} = 4 \sqrt{\frac{59}{289}} = \frac{32}{17}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{4 + \frac{32}{17}}{8} \sqrt{\frac{4 - \frac{32}{17}}{8}} \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{25}{39} \sqrt{\frac{9}{34}} \Rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{9}{39} \sqrt{\frac{25}{34}}$$

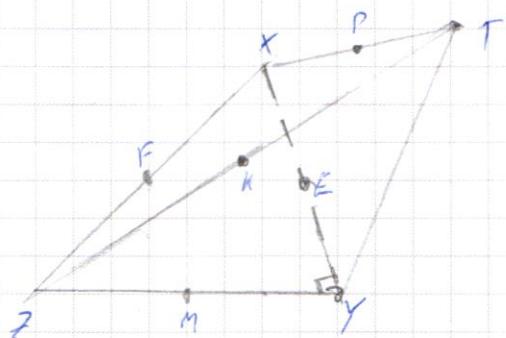
сомножительство  $\Rightarrow \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{25}{9} \sqrt{\frac{9}{25}} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3} \sqrt{-\frac{5}{3}} \sqrt{\frac{3}{5}} \sqrt{-\frac{3}{5}} = 1$

$$2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{15}{17} \Rightarrow \sin \alpha \cos \alpha \text{ одного знака} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha > 0 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{3}{5}}$$

Значит  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{3}{5}} \sqrt{-1}$ , но т.к. в уравнении значение  $\alpha$  не может быть  $\geq \pi/2$ , то все эти решения подходят

\* Ответ  $\frac{5}{3}, \frac{3}{5}, i-1$

№



Решение:

Дано:  $ZXY$  - тупой угол,  
угол  $ZYX$

~~W~~ - окружность,  $M, K, E$

$F, P$  - срединны  $ZY, ZT$ ,  
 $ZY, XZ, XT$  соответственно

$M, K, E, F, P, Y \in W, XY = \sqrt{3},$   
 $FX = \sqrt{2}, TZ = 2$

Найти:  $XZ$ ; тангенс  $\angle XYZ$ .

1) ~~При~~ рассмотрим тупой угол  $ZXY$ : окружность  $W$  - проходит через середину  
и  $ZY$  и точку  $X$  т.к.  $ZY$  - диаметр, но она проходит через вершину  $Z$  т.к.  
и  $T$  лежат на ней, а  $ZT$  - радиус  $\angle XYZ = 90^\circ$

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y = 11, 13, 14, 17, 19, 21, 23, 25$

$\underline{11}, \underline{13}, 14, 17, 19, \frac{22}{23}, \underline{25}, \underline{26}$

$x = 9, 6, 8, 9, 12, 16, \frac{24}{23}, 27$  16 + 9 пар

$x = 5, 7, 10, 14, 15, 20, 27, \cancel{28}, 28$  8 + 8 пар

$x = 11, 22, 25$  5 + 3 пар

$x = 13, 26$  3 + 2 пар

$x = 14$  2 пары

$x = 19$  1 пара

$x = 23$  0 пар

199 + 12

156

312

$$2L = \pi k \pi / (2k+1)$$

$$L = \frac{\pi}{2} (k + \frac{1}{2})$$

~~6/2~~

$$\sin 2\alpha = \frac{15}{17} = 2 \cos \alpha \sin \alpha =$$

~~1+1=~~

$$= 2 \sin \alpha \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$$

$$\sin \alpha = -\frac{2}{17}$$

$$\sin \beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{225}{289} = 9 \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha)$$

$$49 \sin^2 \alpha - 45 \sin^4 \alpha + \frac{225}{289} = 0$$

$$D = 16 - \frac{16 \cdot 225}{289} =$$

$$= 16 \left( \frac{64}{289} \right) =$$

$$= \frac{2^{16}}{289} -$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{4}{9}$$

$$\sqrt{n} > \frac{32}{17}$$



чертёжник

(Поставьте галочку в нужном поле)

чистовик

Страница №

(Нумеровать только чистовики)