МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство
$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$
выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \ (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \ (2) \end{cases} \qquad tg\alpha = ?$$

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}}$

Преобразуем:

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17} \ (2) \\ \sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \ (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\cos^2 2\beta\sin 2\alpha+\sin 4\beta\cos 2\alpha = -\frac{2}{17} \ (2) \\ \sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$$

$$(2): 2\cos 2\beta\underbrace{(\cos 2\beta\sin 2\alpha+\sin 2\beta\cos 2\alpha)}_{= -1/\sqrt{17}} = -\frac{2}{17}$$

$\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{2}{17} \to \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ (является решением, т.к. их ≥ 3)

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

Подставим β в (1):

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} \pm \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$$

1) $\sin 2\alpha+4\cos 2\alpha=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha+8\cos^2\alpha = 3\sin^2\alpha+3\cos^2\alpha$

$\cos\alpha\neq 0$

$3tg^2\alpha-2tg\alpha-5=0$

$tg\alpha = \frac{1\pm 4}{3} = -1; \frac{5}{3}$

2) $\sin 2\alpha-4\cos 2\alpha=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha-8\cos^2\alpha = -5\sin^2\alpha-5\cos^2\alpha$

$\cos\alpha\neq 0$

$5tg^2\alpha+2tg\alpha-3=0$

$tg\alpha = \frac{-1\pm 4}{5} = -1; \frac{3}{5}$

Получаем $tg\alpha = -1; \frac{5}{3}; \frac{3}{5}$. Т.к. мы делали неравносильные преобразования, мы должны проверить эти корни но по условию их $\geq 3 \Rightarrow$ все эти корни являются решениями.

Ответ: $-1; \frac{5}{3}; \frac{3}{5}$

№2

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} & (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 & (2) \end{cases}$$

ОДЗ: $xy-6x-y+6\geq 0$

$(x-1)(y-6)\geq 0$

1) $\begin{cases} x\geq 1 \\ y\geq 6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x\leq 1 \\ y\leq 6 \end{cases}$

~~Преобразуем (2):~~

$\cancel{(3x-3)^2+(y-6)^2=90}$

Преобр. (1):

$$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-12xy+36x^2=xy-6x-y+6 \\ y\geq 6x \end{cases}$$

$$y^2-13xy+y+36x^2+6x-6=0$$

$$y^2+y(1-13x)+6(6x^2+x-1)=0$$

$$D=169x^2-26x+1-144x^2-24x+24=25x^2-50x+25=(5x-5)^2$$

$$y=\frac{13x-1\pm 5(x-1)}{2}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} y_1&=9x-1 \\ y_2&=4x \end{aligned}\right. \\ y\geq 6x \end{cases}$$

Подставим y_1 и y_2 во (2)-ое:

$\cancel{(3x-3)^2+(y-6)^2=90}$ $9x^2+y^2-18x-12y=45$

1) $9x^2+(9x-1)^2-18x-12(9x-1)=45$

$90x^2-18x+1-18x-108x=33$

$90x^2-144x-32=0$

$45x^2-72x-16=0$

$D/4=6^4+\cancel{4\cdot 3^2\cdot 5}=3^4\cdot 2^4+4^2\cdot 3^2\cdot 5=4^2\cdot 3^2\cdot 14$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$x = \frac{36 \pm 12\sqrt{14}}{45} = \frac{12 \pm 4\sqrt{14}}{15}$~~

$$\left[\begin{array}{l} y_1 = 9x - 3 \\ y_2 = 4x + 2 \\ y \geq 6x \end{array}\right.$$

Подставим $y_{1,2}$ во (2):

1) $y_1 = 9x - 3$

$9x^2 + (9x-3)^2 - 18x - 12(9x-3) = 45$

$90x^2 - 54x - 18x + 9 - 108x = 9$

$90x^2 - 180x = 0$

$x = 0; 2$

$y = -3; 15$

Получаем пары $(0; -3)$ $(2; 15)$

1-ая пара не подх т.к. $y \geq 6x$ а $-3 < 0$ -

Пара $(2; 15)$ подходит ($x \geq 1$ $y \geq 6$ $y \geq 6x$)

2) $y = 4x + 2$

$9x^2 + (4x+2)^2 - 18x - 12(4x+2) = 45$

$25x^2 + 16x + 4 - 18x - 48x - 24 = 45$

$25x^2 - 50x - 65 = 0$

$5x^2 - 10x - 13 = 0$

$x = \frac{5 \pm 3\sqrt{16}}{5} = 1 \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}}$ Получаем пары $\left(1 + 3\sqrt{\frac{2}{5}}; 6 + 12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

$y = 4x + 2 = 6 \pm 12\sqrt{2/5}$ $\left(1 - 3\sqrt{\frac{2}{5}}; 6 - 12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

$\left(1+3\sqrt{\frac{2}{5}};\ 6+12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ не подх т.к $6+12\sqrt{\frac{2}{5}} < 6+18\sqrt{\frac{2}{5}}$, а $y \geq 6x \Rightarrow \varnothing$

$\left(1-3\sqrt{\frac{2}{5}};\ 6-12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ подх. $\cancel{x \geq 1\ y \geq 6}$ $\left(x \leq 1\ \ y \leq 6\ \ \ 6+12\sqrt{\frac{2}{5}} \geq 6-18\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

Ответ: $(2;15)$ $\left(1-3\sqrt{\frac{2}{5}};\ 6\left(1-2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\right)$

№3

$$|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5 (26x-x^2)}$$

ОДЗ:

$26x - x^2 > 0 \rightarrow x \in (0;26)$

$\cancel{x^2-26x=p}$

$\cancel{|p|^{\log_5 12} \geq p+13^{\log_5(-p)}}$

Т.к. $26x-x^2>0$, то $x^2-26x<0 \Rightarrow |x^2-26x| = 26x-x^2$

Пусть $26x-x^2 = p > 0$

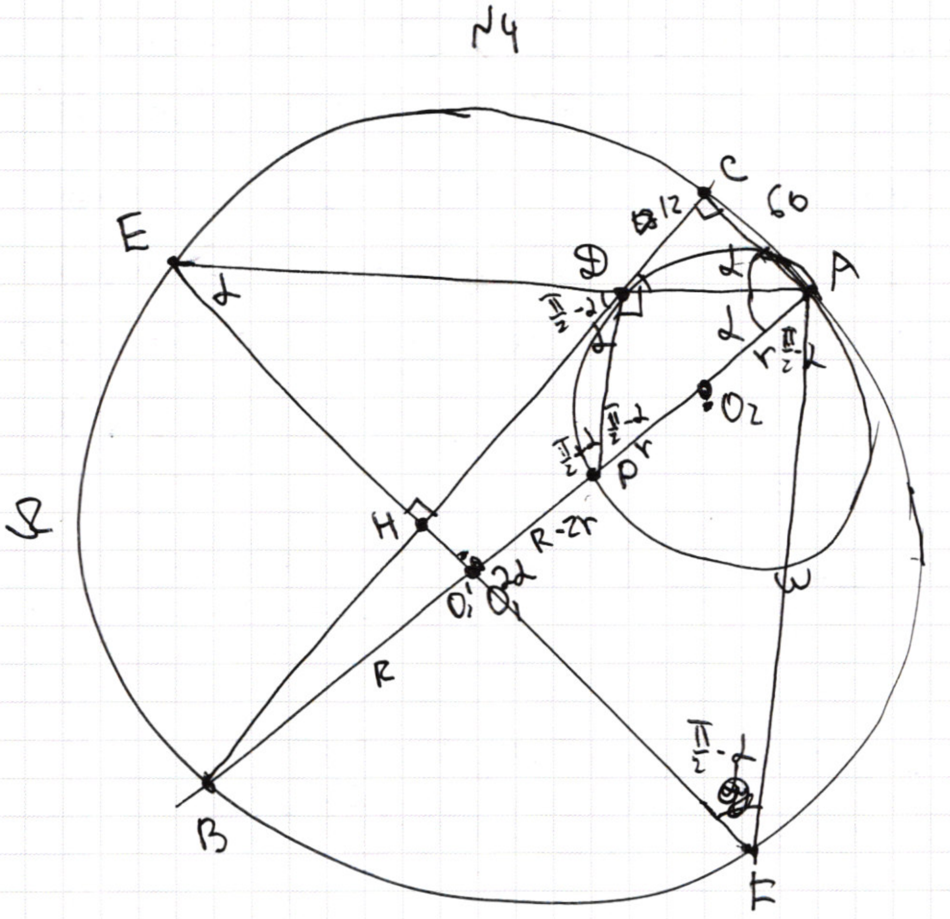
$$p^{\log_5 12} + p - 13^{\log_5 p} \geq 0$$

$$p\left(p^{\log_5 12 - 1} + 1\right) \geq \cancel{13^{\log_5 p}}\ 13^{\log_5 p}$$

См. об

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$CD = 12$

$BD = 13$

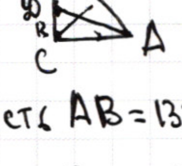
$R(\Omega)$ - радиус Ω

$r(\omega)$ - радиус ω

1) Заметим, что AB проходит через центры Ω и ω, то есть через O_1 и O_2 (т.к. AB диам Ω, если провести общ. кас. то диам ω будет $\perp$ этой кас). Также $\angle BCA = \frac{\pi}{2}$, т.к. опир на диам AB. $(AB = 2R)$

2) По лемме Архимеда AE - бис-са ~~угл~~ угла CAB $\Rightarrow \angle CAE = \angle BAE = \alpha$

Тогда получаем:



Пусть $AB = 13x$. Тогда $AC = 12x$ т.к. $BD/DC = 13/12$

Т.Пиф: $169x^2 = 144x^2 + 625 \to x = 5 \to AB = 65 \to R = \frac{65}{2}$ и $AC = 12 \cdot 5 = 60$

По св-ву кас и секущей $BD^2 = BP\cdot BA = 2R\cdot 2(R-r)$

$169 = 65\cdot(65-2r) \to 65\cdot 2r = 65^2-169 \Rightarrow r = \frac{65}{2} - \frac{13}{10} = \frac{312}{10}$

$R = \frac{65}{2}$ $r = \frac{312}{10}$

Пусть это не так и EF пересек AB в O_1'

3) Докажем, что EF пройдет через O_1. Посчитаем в углах.

$\angle CAE = \angle BAE = \alpha$; $\angle CDA = \angle EDB = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \angle AEF = \alpha$ т.к. $EHD = \frac{\pi}{2}$

$\angle DPA = \frac{\pi}{2} - \alpha \Rightarrow \angle BPD = \frac{\pi}{2} + \alpha$; $\angle BDP = \alpha$ т.к. $\angle ADP = \frac{\pi}{2}$ (опир на диам)

$\Rightarrow \angle AO_1'F = 2\alpha$ ($\angle EO_1'A = \pi - 2\alpha$ по сумме углов 4-ех угольника)

т.к. $\angle AO_1'F$ и $\angle AO_1F$ равны ($\angle AO_1F = 2\angle AEF = 2\alpha$) то они лежат на 1-ой окр-ти прин. т. A, F, O_1, O_1' и при этом O_1, O_1' и A лежат на 1-ой прям $\Rightarrow$ O_1' совпадает с O_1 (т.к. иначе впис $\angle AO_1O_1' = 180$) $\Rightarrow EF$ – диаметр $\Rightarrow$ $\angle EAF = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \angle AFE = \frac{\pi}{2} - \alpha$

Найдем $\frac{\pi}{2} - \alpha$: из $\triangle ACD$ $tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{60}{12} = 5 \Rightarrow \angle AFE = arctg 5$

4) $EF = 2R = 65$

Пусть $AF = y$. Тогда $AE = 5y$ т.к. $tg\alpha = \frac{1}{5}$

$y^2 + 25y^2 = 65^2 \to y^2 = \frac{65^2}{26} \to y = \frac{65}{\sqrt{26}} = AF = 5\sqrt{\frac{13}{2}}$

$AE = 25\sqrt{\frac{13}{2}}$

$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} AE\cdot AF = \frac{1}{2}\cdot 125\cdot\frac{13}{2} = \frac{125\cdot 13}{4} = \frac{1625}{4}$

Ответ: $R = 32{,}5$ $r = 31{,}2$ $\angle AFE = arctg 5$ $S = \frac{1625}{4}$

См Об

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$$

$x \in (\frac{2}{3}; 2]$

1) $ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$18x^2 - x(a+51)+28-b \leq 0$

2) $\frac{8-6x}{3x-2} - ax - b \geq 0$

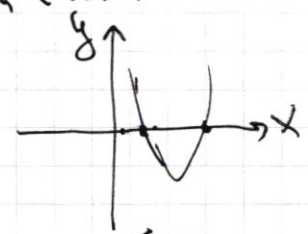
$8-6x-\underline{3ax^2}+2ax-3bx+2b \geq 0$

т.к. $3x-2>0$ на $(\frac{2}{3}; 2]$

$3ax^2+x(3b+6-2a)-2b-8 \leq 0$

парабола с ветв. ↑

$f = 18x^2 - x(a+51)+28-b \leq 0$



При $x \in (\frac{2}{3}; 2]$ $f \leq 0$

Это значит, что ~~мин корень $\leq \frac{2}{3}$, а макс корень ≥ 2~~ $f(\frac{2}{3}) \leq 0$

$f(2) \leq 0$

$$\begin{cases} f(\frac{2}{3}) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} 8 - \frac{2}{3}(a+51)+28-b \leq 0 \to \frac{2}{3}(a+51) \geq 36-b \to a \geq 3 - \frac{3}{2}b \\ 72 - 2(a+51)+28-b \leq 0 \to 72-2a-102+28-b \leq 0 \to 2a+b \geq -2 \to a \geq -\frac{b}{2} - 1 \end{array}\right.$$

Аналог $3ax^2+x(3b+6-2a)-2b-8 \leq 0$

~~1) $a=0$ $x \leq \frac{2b+8}{3b}$ $(3b+6)x \leq 2b+8$~~

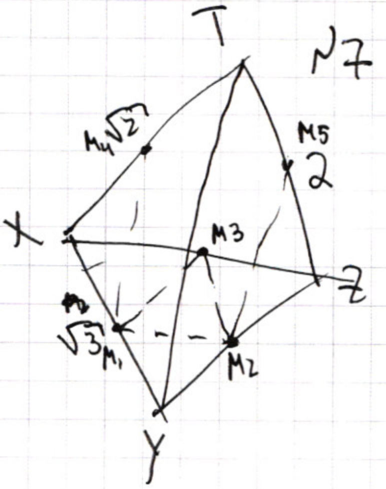
1) $a > 0$

$$\begin{cases} a>0 \\ f(\frac{2}{3}) \leq 0 \\ f(2) \leq 0 \end{cases}$$

2) $a<0$

$f\left(\frac{2}{3}\right)$

№7



6-угольник $YM_1M_2\dots M_5$ является впис в сф. по усл $\Rightarrow$

любая грань явл впис. в окр-ть $\Rightarrow YM_1M_3M_2$ - явл вписанной в окр-ть, но т.к. $YM_1M_2M_3$ параллелограм (т.к. M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3 - ср лин), то $\angle XYZ = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow XYZ$ - п/у треугольник

№5

$4 \le x \le 28$ $\qquad$ $f(p) = [p/4]$

$4 \le y \le 28$ $\qquad$ $f(ab) = f(a) + f(b)$

Возьмем $b = \frac{1}{a}$. Тогда $f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$ $\quad$ но $f(1) = 0$ т.к $f(p) = [p/4]$

$\Rightarrow f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f(x/y) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \quad \Rightarrow x \ne y$

~~Переберем, сколько пар подх если~~ ~~x и y~~ $\in P$

1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 27

Скажем, что любое не прост. число можно разл на произв простых $\Rightarrow$

☐ черновик $\quad$ ☑ чистовик $\qquad$ Страница № 8

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = p_1^{\alpha_1} \ldots p_n^{\alpha_n}$

$y = p_1^{\beta_1} \ldots p_k^{\beta_k}$

Тогда $f(x/y) = f(x) - f(y) = \alpha_1 f(p_1) + \ldots + \alpha_n f(p_n) - \beta_1 f(p_1) - \ldots - \beta_k f(p_k) < 0$

Теперь посмотрим на простые числа: от 4 до 28

5 7 11 13 17 19 23 27

Посчитаем $f(p)$:

$f(1) = 0$ $\quad f(5,7) = 1$ $\quad f(17,19) = 4$

$f(2) = 0$ $\quad f(11) = 2$ $\quad f(23) = 5$

$f(3) = 0$ $\quad f(13) = 3$ $\quad f(27) = 6$

$f(5) = 1$ $\quad f(1,2,3) = 0$

Отсюда $f(4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24, 27) = 0$

$f(10) = 1$ $\quad f(20) = 1$ $\quad f(25) = 2$

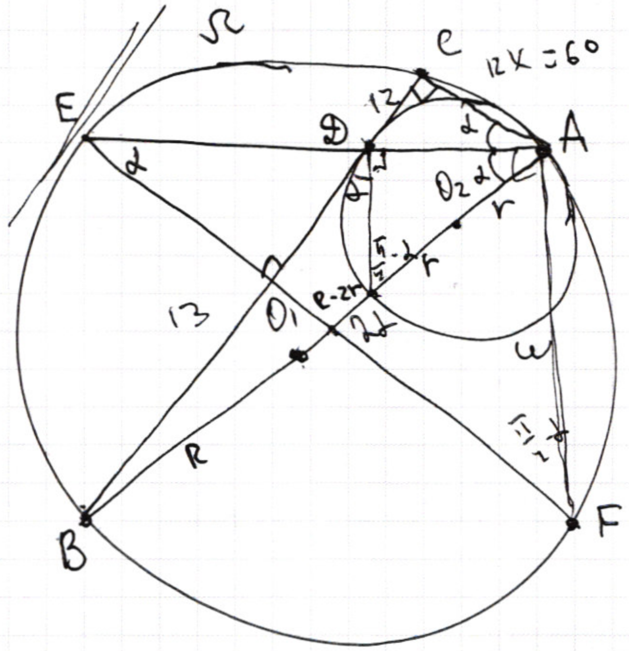
$f(14) = 1$ $\quad f(21) = 1$ $\quad f(26) = 3$

$f(15) = 1$ $\quad f(22) = 2$ $\quad f(28) = 1$

Осталось перебрать.

☐ черновик ☑ чистовик

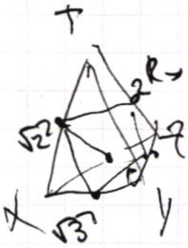
(Поставьте галочку в нужном поле)



$R_1, R_2 = ?$

$\angle AFE ?$

S_{AEF}

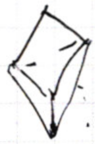


$\frac{65}{2}$

$\angle = \frac{\pi}{2}$

$169x^2 = 144x^2 + 625$

$x^2 = 25$



$169 = 4R \cdot 2R \cdot 2(R-r)$

$= R \cdot r$

$4 \leq x, y \leq 28$

$r = \frac{65}{2} - \frac{\cancel{169}^{13}}{\cancel{130}_{10}} = \frac{65^2 \cdot 169}{130} \quad \frac{312}{10}$

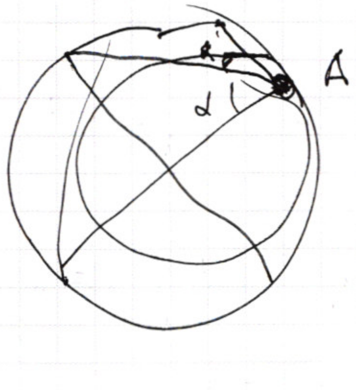
$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$f(1) = 0 = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(5) = 1 = f(5x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$

$\Rightarrow f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f(x) - f(y) < 0 \qquad f(x) < f(y) ?$



☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$9 =$

$$6-12\sqrt{\frac{2}{5}}-6+18\sqrt{\frac{2}{5}}=6\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\frac{72}{5}=\left(1-3\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\left(6-12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)\cancel{-6}+18\sqrt{\frac{2}{5}}-6+12\sqrt{\frac{2}{5}}\cancel{+6}$$

$$30\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$(-18)-12$

$$p^{\log_5 12}+p-13^{\log_5 p}\geq 0$$

$$\log_a b+\log_a c$$

$$p=13^{\log_{13} p}$$

$$13^{\log_{13} p}-13^{\log_5 p}+13^{\log_{13} p\log_5 12}\geq 0$$

$$p^{\log_5 12}+p-p^{\log_5 13}\geq 0$$

$$13^{\log_{13} p}\left(1-13^{\log_5 p-\log_{13} p}+t\right)\geq 0$$

$$13^{\log_{13} p\log_5 12}+13^{\log_{13} p}-13^{\log_{13} p\log_5 13}\geq 0$$

$$p^{\log_5 12}+p-p^{\log_p 13\log_5 p}\geq 0$$

$$p^{\log_5 12}+p-p^{\log_5 13}\geq 0$$

$$p^{\log_5 12}+p-p^{\log_5 13}\geq 0$$

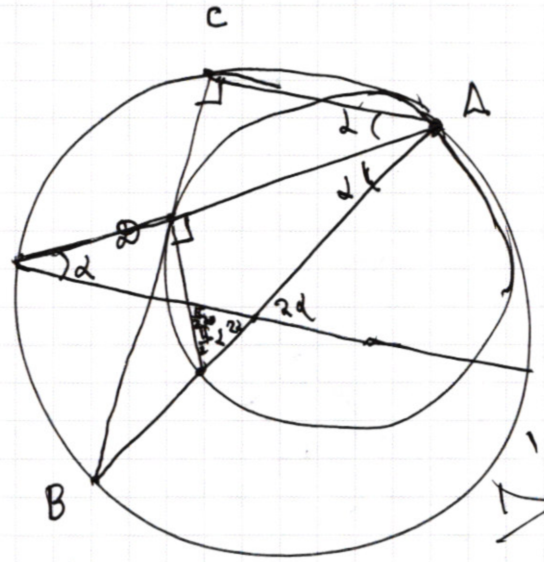
$$p^{\log_5\frac{12}{5}}+1-p^{\log_5 13/5}\geq 0\ -1$$

$$p^{\log_5 13/5}\left(p^{\log_5\frac{12}{13}}-1\right)\geq -1$$

$$p^{\log_5\frac{12}{13}}\log_5\frac{12}{13}+\quad \ln p\left(\log_5 12-1\right)$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



1 2 3

~~1 2 3~~ 5 7 11 13 17

19 23 27

$f(ab) = f(a)+f(b)$ $\quad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f(ab) = f(a)+f(b)$ $\quad 4 \le x, y \le 28$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

f

$f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$ $\quad f\left(\frac{a}{b}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) < 0$

$f(1) = f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right)$ $\quad f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) < 0$

$f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ $\quad f\left(\frac{1}{x}\right) < -f(x)$

$f(p) = [p/4]$

$f\left(\frac{a}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$ $\quad \frac{x}{y} = k$

$x \ne y$

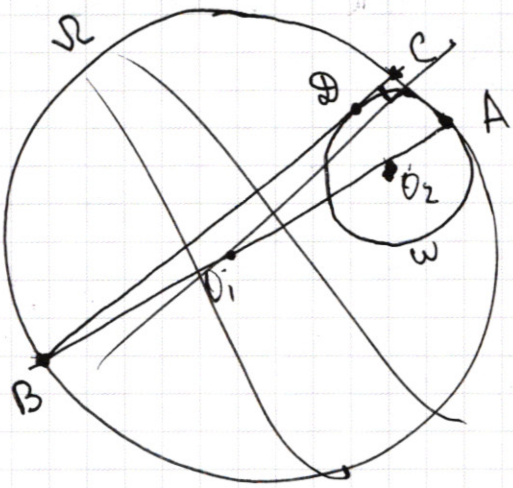
$x \not\vdots\, y$

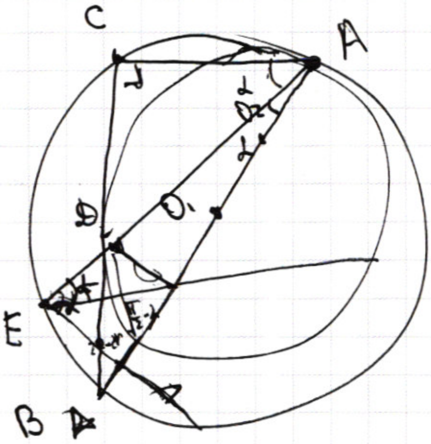
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4





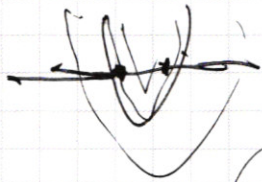
$p^{\log_5 12} + p - 13^{\log_5 p} \geq 0$

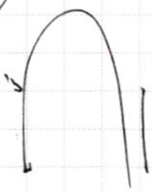
$\log_5 p = \frac{\log_{13} p}{\log_{13} 5}$

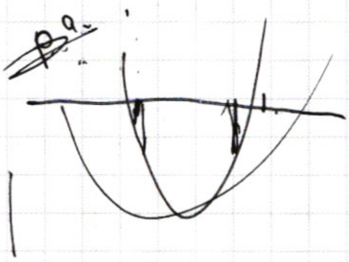
$p^{\log_5 12} + p - p^{\log_5 13} \geq 0$

$p^a - p^b + p^c \geq 0$

$13^{\log_{13} p}$ 4







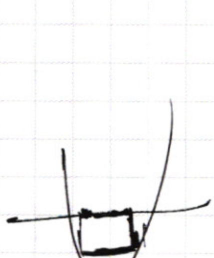
$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$ax+b \geq 18x^2-51x+28$

$18x^2 - x(a+51) + 28 - b \leq 0$

$ax+b \leq \frac{8-6x}{3x-2}$

$\frac{3ax^2+3bx-2ax-2b-8+6x}{3x-2} \leq 0$



$\left[\frac{2}{3}; 2\right]$