МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases} \qquad \operatorname{tg}\alpha \in \mathbb{R}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} =$$

$$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow 2\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$$

1 случ) $2\beta \in$ I четверти	2 случ) $2\beta \in$ IV четверти
$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$	$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}$
$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$	$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$
$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$	$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$
$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$	$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \left(-\frac{2}{\sqrt5}\right)\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$$\sin 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \qquad \cos 2\alpha = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \text{если } \operatorname{tg}\alpha \text{ существует}$$

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} + \left(\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}\right)\cdot 2 = -1$	$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} - 2\cdot\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -1$
$2\operatorname{tg}\alpha + 2 - 2\operatorname{tg}^2\alpha = -1-\operatorname{tg}^2\alpha$	$2\operatorname{tg}\alpha - 2 + 2\operatorname{tg}^2\alpha = -1-\operatorname{tg}^2\alpha$
$\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0$	$3\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$
$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = 3 \text{ или } \operatorname{tg}\alpha = -1}$	$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{3} \text{ или } \operatorname{tg}\alpha = -1}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Ответ: $\frac{1}{3}$; 3; -1

№ 3

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

ОДЗ:

$10x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (0; 10)$

Раз $x^2 - 10x < 0$ из ОДЗ, то $|x^2 - 10x| = 10x - x^2$

$$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

$$5^{\log_3(10x - x^2)} = (10x - x^2)^{\log_3 5}$$

$$(10x - x^2) + (10x - x^2)^{\log_3 4} - (10x - x^2)^{\log_3 5} \geq 0$$

~~Пусть $t = 10x - x^2 > 0$~~ Пусть $10x - x^2 = 3^k > 0$

$\vee 0$

~~$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$~~

~~$\log_3(t \cdot (1 + t^{\log_3 4})) \geq \log_3 5 \cdot \log_3 t$~~

~~$\log_3 t + \log_3(1 + t^{\log_3 4}) \geq \log_3 t \cdot \log_3 5$~~

~~$\log_3(1 + t^{\log_3 4}) \geq \log_3 t \cdot \log_3 \frac{5}{3}$~~

$$3^k + 3^{k \cdot \log_3 4} - 3^{k \log_3 5} \geq 0$$

$$3^k + 4^k - 5^k \geq 0 \quad |: 5^k > 0$$

$$\left(\frac{3}{5}\right)^k + \left(\frac{4}{5}\right)^k - 1 \geq 0$$

Заметим, что $f(k) = \left(\frac{3}{5}\right)^k + \left(\frac{4}{5}\right)^k - 1$ убывает на промежутке $(-\infty; \infty)$. Значит у уравнения $\left(\frac{3}{5}\right)^k + \left(\frac{4}{5}\right)^k - 1 = 0$ не более 1 корня. Заметим, что $k = 2$ - корень. Тогда для $k \in (-\infty; 2)$ $f(k)$ имеет положительные значения, а для $k \in (2; \infty)$ - отрицательные.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

за счет монотонности $f(k)$.
Значит решениями неравенства служат $k \in (-\infty; 2]$.

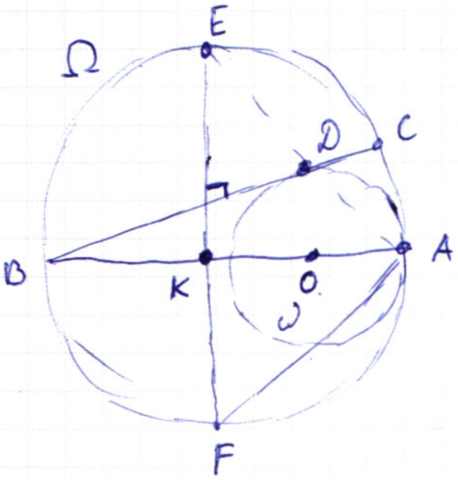
$3^k \in (0; 9]$

$10x - x^2 \in (0; 9]$

$$\begin{cases} 10x - x^2 > 0 \\ 10x - x^2 \le 9 \end{cases} \quad \begin{cases} x > 0 \\ x < 10 \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 9 \\ x \le 1 \end{array}\right. \end{cases} \quad x \in (0; 1] \cup [9; 10)$$

Ответ: $(0; 1] \cup [9; 10)$

№ 4

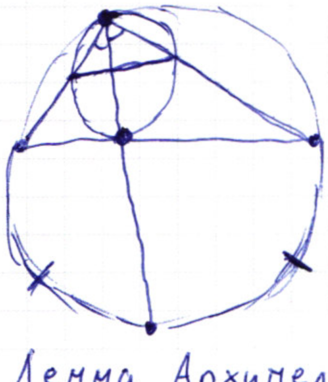


Дано: см. рис., $CD = \frac{15}{2}$; $BD = \frac{17}{2}$

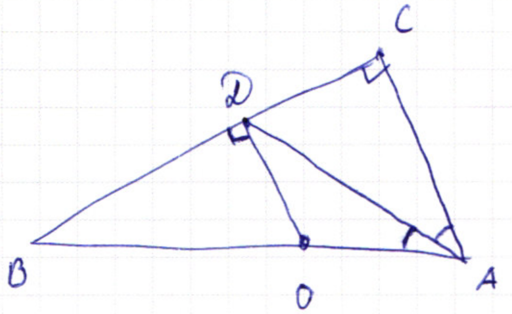
Найти: r_ω; r_Ω; $\angle AFE$; S_{AEF}

1) По лемме Архимеда (см. II рисунок) E - середина дуги $\overset{\frown}{BC}$, а AD - биссектриса $\angle BAC$. Тогда, раз E середина дуги $\overset{\frown}{BC}$ и $EF \perp BC$, то EF - сер. пер. к BC. А значит EF пройдет через центр Ω K. Тогда EF - диаметр Ω, значит $\angle EAF = 90°$.

2) $\triangle BCA$ - прямоугольный, т.к. BA - диаметр Ω по условию. Как было уже сказано AD - биссектриса $\angle BAC$.



Лемма Архимеда



По свойству биссектрисы:

$\frac{CA}{AB} = \frac{CD}{DB} = \frac{15}{17} \Rightarrow CA = 15x$, $AB = 17x$

$CB = \sqrt{BA^2 - CA^2} = \sqrt{(17x)^2 - (15x)^2} =$

$= 8x$ (по т. Пифагора)

С другой стороны $CB = CD + DB = 16 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow$ $CA = 15x = 30$

$\Rightarrow AB = 2r_\Omega = 17x = 34 \Rightarrow r_\Omega = 17.$

$DA = \sqrt{CA^2 + CD^2} = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 30^2} = 15\sqrt{\frac{1}{4} + 4} = 7{,}5\sqrt{17}$

$DE \cdot DA = DC \cdot BD$ по свойству пересекающихся хорд.

$DE = \frac{DC \cdot BD}{DA} = \frac{15 \cdot 17}{4 \cdot 7{,}5\sqrt{17}} = \frac{\sqrt{17}}{2}$

$AE = AD + DE = 8\sqrt{17}$

т.к. ΔEAF - прямоугольный, то

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{EA}{EF}\right) =$

$= \arcsin\left(\frac{8\sqrt{17}}{2r_\Omega}\right) = \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}} = \arccos\frac{1}{\sqrt{17}}$

$S_{AFE} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot EA \cdot \sin\angle FEA = \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 8\sqrt{17} \cdot \cos\angle AFE =$

$= \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 8\sqrt{17} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} = 34 \cdot 4 = 136$

AK - линия центров ω и $\Omega \Rightarrow O \in AK$.

$\Delta BDO \sim \Delta BCA \Rightarrow OD = \frac{CA \cdot BD}{BC} = \frac{30 \cdot \frac{17}{2}}{16} = \frac{15 \cdot 17}{16} =$

$= \frac{255}{16} = r_\omega$

Ответ: $r_\omega = \frac{255}{16}$, $r_\Omega = 17$, $\angle AFE = \arcsin\frac{4}{\sqrt{17}}$,

$S_{AFE} = 136.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(a\,b) = f(a) + f(b)$

$a = 1:\quad f(b) = f(1) + f(b) \Rightarrow f(1) = 0$

$a = y;\ b = \frac{1}{y}:\quad f(1) = f(y \cdot \frac{1}{y}) = f(y) + f(\frac{1}{y}) \Rightarrow$

$y \in N$

$\Rightarrow f(\frac{1}{y}) = f(1) - f(y) = -f(y)$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$

Если мы хотим, чтобы $f(\frac{x}{y}) < 0$, то должно выполняться, что $f(y) > f(x)$. Значит кол-во искомых пар равно кол-ву пар $(x;y)$ таких, что $f(y) > f(x)$

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$

$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = [\frac{7}{4}] = 1$

$f(8) = f(2) + f(4) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$

$f(10) = f(5) + f(2) = 1$

$f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$

$f(12) = f(6) + f(2) = 0$

$f(13) = [\frac{13}{4}] = 3$

$f(14) = f(7) + f(2) = 1$

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(16) = f(2) + f(8) = 0$

$f(17) = [\frac{17}{4}] = 4$

$f(18) = f(9) + f(2) = 0$

$f(19) = [\frac{19}{4}] = 4$

$f(20) = f(10) + f(2) = 1$

$f(21) = f(7) + f(3) = 1$

$f(22) = f(11) + f(2) = 2$

$f(23) = [\frac{23}{4}] = 5$

$f(24) = f(12) + f(2) = 0$

$f(25) = f(5) + f(5) = 2.$

Итого такие значения $f(x)$ принимает для x от 2 до 25 ($x \in N$):

0 – 10 раз   1 – 7 раз   2 – 3 раза   3 – 1 раз

4 – 2 раза   5 – 1 раз

Разберем все 6 случаев значения $f(x)$ $x, y \in N$

1 случ.) $f(x) = 0 \Rightarrow f(y) \geq 1$ $x, y \in [2; 25]$

кол-во вар. $x = 10$ кол.-во вар. $y = 14$

Итого 140 различных пар

2 случ.) $f(x) = 1 \Rightarrow f(y) \geq 2$

кол-во вар. $x = 7$ кол-во вар $y = 7$

3 случ.) $f(x) = 2 \Rightarrow f(y) \geq 3$

кол-во вар. $x = 3$ кол-во вар $y = 4$

4 случ.) $f(x) = 3) \Rightarrow f(y) \geq 4$

кол-во вар. $x = 1$ кол-во вар $y = 3$

5 случ.) $f(x) = 4 \Rightarrow f(y) \geq 5$

кол-во вар $x = 2$ кол-во вар $y = 1$

6 случ.) $f(x) = 5 \Rightarrow f(y) \geq 6$

кол-во вар $x = 1$ кол-во вар $y = 0$.

Итого всего различных пар:

$10 \cdot 14 + 7 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 =$

$= 140 + 49 + 12 + 3 + 2 = 189 + 17 = 206$

Ответ: 206 пар

☐ черновик   ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90 \end{cases}$$

ОДЗ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2y-1 \geq 0 \\ x-6 \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2y-1 \leq 0 \\ x-6 \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$x - 6 = a$ $ab \geq 0$

$6y - 3 = b$

$$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{\frac{ab}{3}} \\ a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$$

$a - 2b \geq 0$ $a \geq 2b$ $\left|\frac{a}{b}\right| \geq 2$

$$\begin{cases} 3a^2 - 12ab + 12b^2 = ab \\ a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^2 - 13ab + 12b^2 = 0 \\ a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3\frac{a^2}{b^2} - 13\frac{a}{b} + 12 = 0 \quad (1) \\ \cancel{\frac{a}{b}} \quad a^2 + b^2 = 90 \quad (2) \end{cases}$$

(1): $\frac{a}{b} = t$, $|t| \geq 2$

$3t^2 - 13t + 12 = 0$

$D = 13^2 - 4 \cdot 12 \cdot 3 = 13^2 - 12^2 = 5^2$

$t_{1,2} = \frac{13 \pm 5}{6}$ $t_1 = 1$ - не подходит $t_2 = 3$

$a = 3b$ (3)

(3) в (2): $9b^2 + b^2 = 90 \Rightarrow b^2 = 9 \Rightarrow b = \pm 3$

1 случ) $b = 3$
$a = 9$

$x = a + 6 = 15$

$y = \frac{b+3}{6} = 1$

2 случ) $b = -3$
$a = -9$

$x = a + 6 = -3$

$y = \frac{b+3}{6} = 0$

Проверка:

$(x;y)=(15;1)$

$$\begin{cases} 15-12\cdot 1=\sqrt{(2\cdot 1-1)(15-6)} \\ (15-6)^2+(6\cdot 1-3)^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3=\sqrt{9} \\ 90=90 \end{cases}$$ – правда

$(x;y)=(-3;0)$

$$\begin{cases} -3-12\cdot 0=\sqrt{-(-3)+6} \\ (-3)^2-12(-3)=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3=\sqrt{9} \\ 45=45 \end{cases}$$ – неправда

Ответ: $\{(15;1)\}$

№ 6.

1 случ) $a=0$

$\frac{16x-16}{4x-5}\le b\le -32x^2+36-3$

это должно быть верно для $\forall x\in[\frac{1}{4};1]$ в том числе и для $x=\frac{1}{4}$ и $x=1$

$$\begin{cases} 3\le b\le 4 \ (x=\frac{1}{4}) \\ 0\le b\le 1 \ (x=1) \end{cases} \Rightarrow b\in\varnothing$$

таких пар нет.

2 случ) $a\ne 0$ $\quad 4x-5<0$, т.к. $x\in[\frac{1}{4};1]$

$16x-16\ge(ax+b)(4x-5)$

$\underbrace{4ax^2+(4b-5a-16)x+(16-5b)}_{=f(x)}\le 0$

~~$D_x=(4b-5a-16)^2-4(16-5b)4a=16b^2+25a^2+256-$~~

~~$-40ab-128b+160a-256a+80ab=$~~

$=16b^2+25a^2+256+40ab-128b-96a$

Если мы хотим, чтобы это выполнялось, необходимо, чтобы отрезок $[\frac{1}{4};1]$ был „правее" максимального корня или „левее" минимального*. Для этого $f(\frac{1}{4})\le 0$, $f(1)\le 0$ и $x_{вер}\le\frac{1}{4}$ или $x_{вер}\ge 1$.

Это верно, т.к. $f(x)$ – парабола с ветвями вниз

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{4}\right) \le 0 \\ f(1) \le 0 \\ x_{вер} \le \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{4} + b - \frac{5}{4}a - 4 + 16 - 5b \le 0 \\ 4a + 4b - 5a - 16 + 16 - 5b \le 0 \\ \frac{16 + 5a - 4b}{8a} \le \frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -a - 4b + 12 \le 0 \\ -a - b \le 0 \\ 64 + 20a - 16b \ge 8a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 4b \ge 12 \\ a + b \ge 0 \\ 3a - 4b \ge -16 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{4}\right) \le 0 \\ f(1) \le 0 \\ x_{вер} \ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} . \\ . \\ \frac{16 + 5a - 4b}{8a} \ge 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vdots \\ \vdots \\ 16 + 5a - 4b \le 8a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 4b \ge 12 \\ a + b \ge 0 \\ 3a + 4b \ge 16 \end{cases} \quad (2)$$

$$ax + b \le -32x^2 + 36x - 3$$

$$\underbrace{32x^2 - (36 - a)x + b + 3}_{= g(x)} \le 0$$

Если $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$ является решением, то необходимым и достаточным условием на a и b будет $g\left(\frac{1}{4}\right) \le 0$, $g(1) \le 0$, т.к. это парабола с ветвями вниз

$$\begin{cases} 8 - 9 + \frac{a}{4} + b + 3 \le 0 \\ 32 - 36 + a + b + 3 \le 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + 4b \le -8 \\ a + b \le 1 \end{cases} \quad (3)$$

Заметим, что система 3 противоречит системам (1) и (2)

$a + 4b \ge 12$

$a + 4b \le -8$.

Значит таких пар a и b нет. Ответ: $\varnothing$

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

3:

$$4+\frac{4}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

$x(32x+36)$

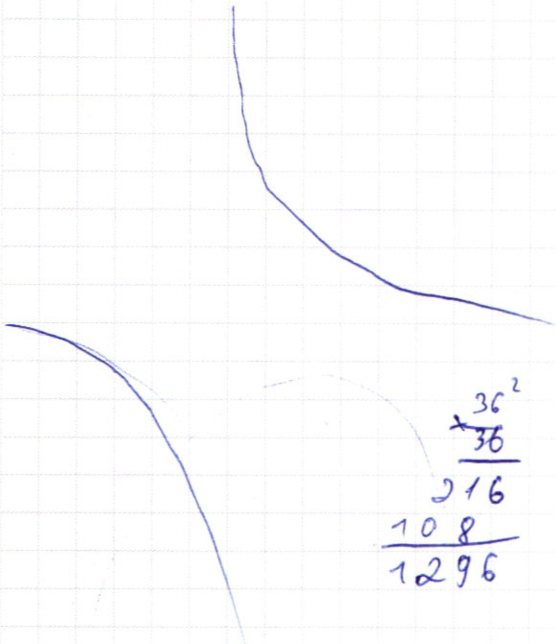
$32x^2-36x+3$

$x = 32x+36$

$\frac{36}{64} = \frac{4\cdot 9}{4\cdot 16} = \frac{9}{16}$

$31x = -36$

$x = -\frac{36}{31}$



$-32\cdot\frac{9^2}{16\cdot 16} + 36\,\frac{9}{16} - 3$

$-\frac{81}{8}+\frac{81}{4}-3 =$

$\begin{array}{r} \times 32 \\ 12 \\ \hline 64 \\ 32 \\ \hline 420 \end{array}$

$-\frac{81}{8}+\frac{18-3}{8}$

$\begin{array}{r} \times 36^2 \\ 36 \\ \hline 216 \\ 108 \\ \hline 1296 \end{array}$

$=\frac{81}{4}-3$

$-\frac{81}{8}+\frac{15\cdot 8}{8} = \frac{39}{8}$

$\frac{\cancel{36}\cdot 9}{\cancel{16}\,4}$

$-4(8x^2-9x+1)$

$\frac{4-16}{-4} = 3 \le \frac{a}{4} + b \le -2+9-3 = 4$

$36^2-4\cdot 32\cdot 3 =$

$=1296-384=$

$=912$

$3 \le \frac{a}{4}+b \le 4$

$-32+36-3=$

$0 \le a+b \le 1$

$\frac{16x-16}{4x-5} = -32x^2+36x-3$

$3 \le \frac{a}{4}+b \le 4$

$4+\frac{4}{4x-5} = -32x^2+36x-3$

$\cancel{0 \le \frac{a}{4}+b}$

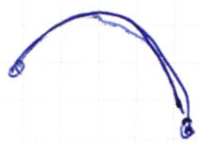
$-1 \le -a+b \le 1$

$3+\frac{4}{4x-5} \le -32x^2+36x-4$

$-4 \le -\frac{3}{4}a \le 5 \quad \Big| \cdot -\frac{4}{3}$

$-\frac{20}{3} \le a \le \frac{16}{3}$

$-\frac{16}{3} \le b \le \frac{20}{3}$



☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

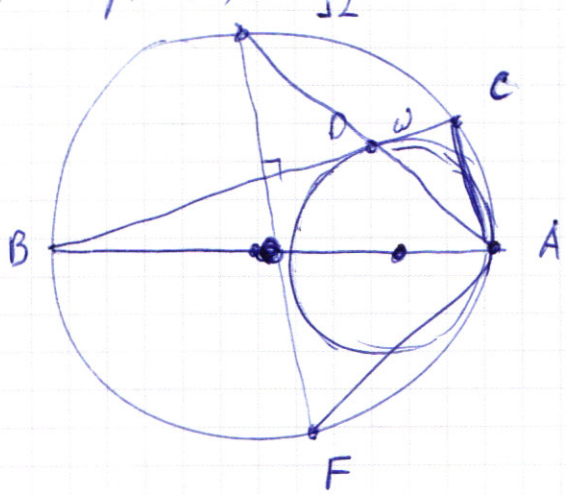
$\log_3 t(\log_3 t \log_3 4 - \log_3 5) \geq 0$

$\frac{\log_3 5}{\log_3 4} = \log_4 5$

$0 \quad + \quad 1 \quad - \quad 3^{\log_4 5} \quad +$

$\frac{16^2-1}{16} = 16 - \frac{1}{16}$

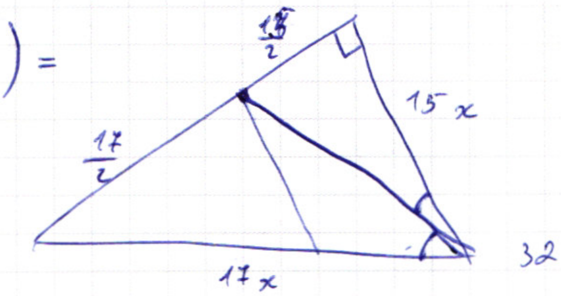
$f\left(\frac{1}{y}\right) + f(y) = f(1)$



$\angle AFE \quad S_{AFE}$

$CD = \frac{15}{2} \quad BD = \frac{17}{2}$

$f\left(\frac{1}{y}\right) =$



$f\left(\frac{1}{y}\right) + f\left(\frac{1}{y}\right) + \dots + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) =$

$= \overset{=0}{f(1)} + f(x) - f(y)$

$f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) + f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

$x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_2^{\alpha_2}$

$(17x)^2 - (15x)^2 =$

$= (289 - 225)x^2 = 64x^2$

$4^2 + 15^2 = 17^2 \quad 8x$

$x = 2$

1

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$

0 0 1 0 1 0 0 1 2 0 3 1 1 0 0 0 4

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19

0 0 1 4 2 3 4 5 5

2 3 5 7 11 13 17 19 23

20 21 22 23 24 25

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(x^2-12x+36)+(36y^2-36y+9)=90$

$(x-6)^2+(3(2y-1))^2=90$

$x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$(x-12y)^2=(2y-1)(x-6)$

$x^2-24yx+144y^2=2xy-12y-x+6$

$x^2+144y^2-26yx+12y+x-6=0$

$(x+12y-3)(x+12y+2)$

$\cancel{(x-6)^2+9(2y-1)^2=90}$ 10 $\geq$

$\geq$

$\begin{cases} \begin{cases} 2y-1\geq 0 \\ x-6\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2y-1\leq 0 \\ x-6\leq 0 \end{cases} \end{cases}$

$|x^2-10x|=10x-x^2$

$10x-x^2>0$

$t\left(1+t^{\log_3 4-1}\right)\geq$

$t+t^{\log_3 4}\geq 2\sqrt{t^{1+\log_3 4}}$

$\geq$

$\log_3 t+\log_3\left(1+t^{\log_3 4}\right)\geq\log_3 t\cdot\log_3 5$

$x^{\log_3 5}-x^{\log_3 4}-x$

$x+x^{\log_3 4}-x^{\log_3 5}$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq x^2+(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$\cancel{10x-x^2\geq(10x-x^2)}$

$\cancel{\log_3 t\cdot\log}$

$1+t^{\log_3\frac{4}{3}}\geq t^{\log_3\frac{5}{3}}$

$t+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}\geq 0$

$t+t^{\log_3 4}\geq t^{\log_3 5}$

$\log_3 t\cdot\log_3 t^{\log_3 4}\geq$

$\geq\log_3 t\cdot\log_3 5$

$(x-1)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta) =$

$= \sin\alpha\cos\beta$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$x-12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$x^2-12x+36+36y^2-36y+9=90$

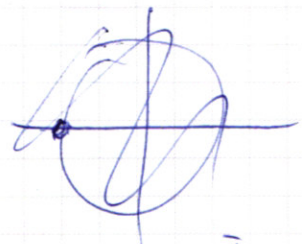
$2\sin 2\beta = -\frac{2}{5}\cdot\left(-\frac{\sqrt{5}}{1}\right) = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$\boxed{\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}\\ \cos 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}\end{array}\right.$

$\cos 2\alpha = -1$

$2\alpha = \pi + 2\pi k$



$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\underset{0}{\sin 2\alpha}\cdot\pm\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}}\overset{-1}{\cos 2\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k$

$\pm 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\sin 2\alpha = \frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\pm 2\cdot\frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1$

$\cos 2\alpha = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$

$\pm 4\,tg\,\alpha + 1 \cancel{- tg^2\alpha} = -1 \cancel{- tg^2\alpha}$

$\pm 4\,tg\,\alpha = -2$

$tg\,\alpha = \pm\frac{1}{2}$

$7 - 7_{(2-9)}\, 7 = 7^{7} - 9^{7} < 7$

$9^x < 7^x + x$

$1 + t^{\log_3 4} \geq t^{\frac{5}{3}}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-\frac{3+81}{8} = \frac{105}{8}$

$-3+\frac{81}{8} = \frac{81-24}{8} = \frac{57}{8}$

$-\frac{81}{8} + \ldots = 3$

$-\frac{81}{16^2}\cdot 32 + \ldots = 3$

$7\cdot 8 = 5$

$\left(\frac{36}{64}\right)^2$

$\frac{9}{16}$

$-32\left(x^2 - \frac{36}{32}x + \left(\frac{9}{16}\right)^2\right) + \boxed{\frac{57}{8}} =$

$\frac{9}{16}$

$\frac{9-16}{4\cdot\frac{9}{16}-5} = \frac{-7}{\frac{9}{4}-\frac{20}{4}} = \frac{28}{11}$

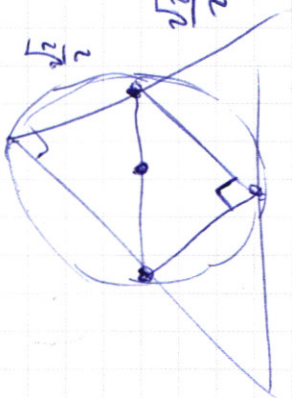
$x^2 - 10x + 9 \geq 0$

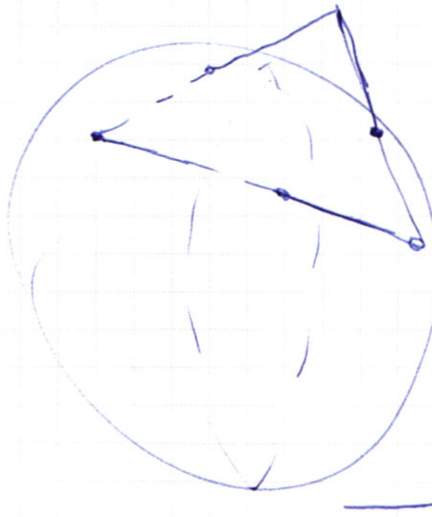
$(x-9)(x-1) \geq 0$

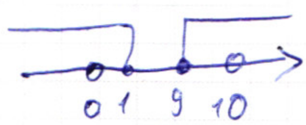
$t \geq t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}$

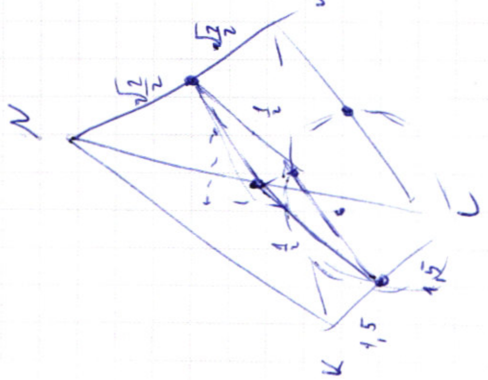
$t = 3^k$

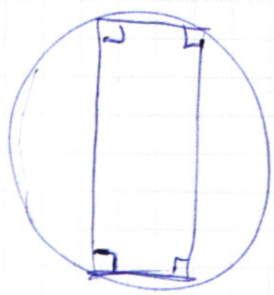
$3^k \geq 5^k - 4^k$











☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$2\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$ $\quad \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$ $\quad \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\frac13 + \frac23 \cdot 1$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2 \cdot tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha} \cdot \frac{1}{\sqrt5} \pm \frac{2}{\sqrt5} \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -\frac{1}{\sqrt5} \quad \Big| \cdot \sqrt5 \cdot (1+tg^2\alpha)$

$2\,tg\,\alpha \pm (2 - tg^2\alpha) = -1 - tg^2\alpha$

$2\,tg\,\alpha + 2 - 2tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha$ $\qquad 2\,tg\,\alpha - 2 + 2\,tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha$

$tg^2\alpha - 2\,tg\,\alpha - 3 = 0$ $\qquad 3tg^2\alpha + 2\,tg\,\alpha - 1 = 0$

$tg\,\alpha = 3$ $\qquad tg\,\alpha = \frac13$

$tg\,\alpha = -1$ $\qquad 3+4>5$ $\qquad tg\,\alpha = 1$

$t + t^{\alpha} \geq t^{\beta}$

$t + t^{\alpha} - t^{\beta} \geq 0$ $\qquad \log_3 12$

$f(t) = t + t^{\alpha} - t^{\beta}$

$f'(t) = 1 + \alpha \cdot t^{\alpha-1} - \beta \cdot t^{\beta-1}$

$t + t^{\log_3 4} \cancel{\geq 2\sqrt{t^{1+\log_3 4}} = 2t^{\frac{\log_3 12}{2}} \geq} t^{\log_3 5}$

$\log_3(1 + t^{\log_3 \frac43}) \geq \log_3 t \cdot (\log_3 \frac53)$

$1 + t^{\log_3 \frac43} \geq t^{\log_3 \frac53}$

$1 +$

$1 + \left(\frac43\right)^2 \geq \left(\frac53\right)^2$

$t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4} - t$ $\qquad \frac{(t-9)}{t^{\log_3 \frac53}}$

$t^{\log_3 5}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

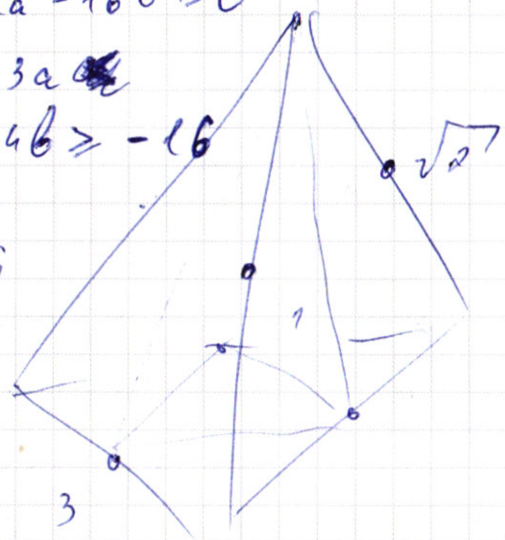
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$64+12a-16b \geq 0$

$4b-3a$

$3a-4b \geq -16$

512



$\sqrt{2}$

$4a \geq -4$

$a \geq -1$

$0 \leq a+b \leq 1$

$3 \leq \frac{a}{4}+b \leq 4$

$0 \leq a+b \leq 1$

$-4 \leq -\frac{a}{4}-b \leq -3$

$-4 \leq \frac{3}{4}a \leq -2$

$-\frac{16}{3} \leq a \leq -\frac{8}{3}$

$0 \leq \frac{a+b}{4}$

$12 \leq a+4b \leq 16$

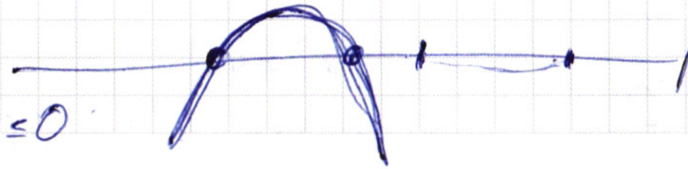
$-1 \leq -a-b \leq 0$

$11 \leq 3b \leq 16$

$b \in \left[\frac{11}{3}; \frac{16}{3}\right]$

$a \in \left[-\frac{16}{3}; -\frac{8}{3}\right]$

$32x^2-(36-a)x+(b+3) \leq 0$



$\frac{16x-16}{4x-5} \leq ax+b \leq -32x^2+36x-3$

64·

52

$16x-16 = (-32x^2+36x-3)(4x-5)$

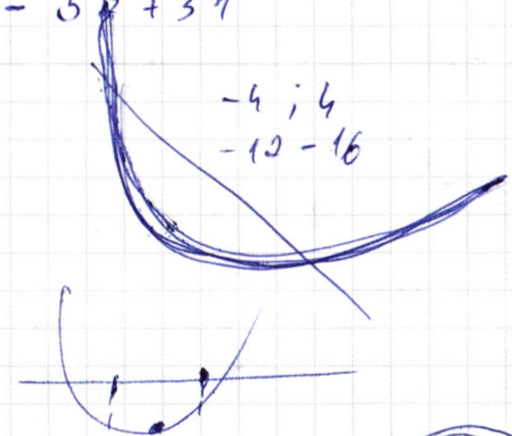
$-128x^3+144x^2-12x+160x^2-180x+15 = 16x-16$

$-128x^3+144x^2-208x+31=0$

$-16+32-104+31=0$

$-2+9-52+31$

$4b-5a-16$

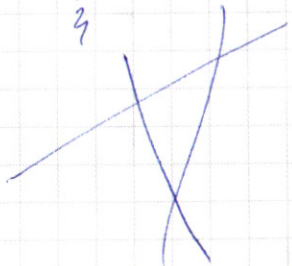


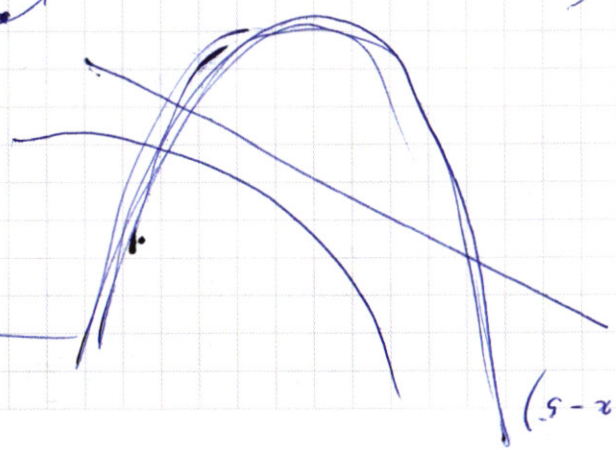
$-4;4$

$-12-16$

4ax

$\frac{5}{4}$





$16x-16 \leq (ax+b)(4x-5)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

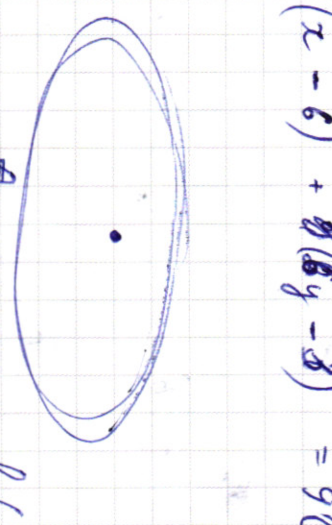
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}$

$x - 12y = \sqrt{(x-6)(2y-1)}$

$6(x-12y)^2$

$(x-6)^2 + 9(6y-3)^2 = 90$



$a = x - 6 \qquad b = 6y - 3$

$b(13a - b) = 270$

$a(13a + b) = 360$

$3(a-2b)^2 = ab$

$a - b = \sqrt{\frac{ab}{3}}$

$a^2 + b^2 - 2ab = \frac{ab}{3}$

$ab = 30$

$a^2 + b^2 = 90$

$90 = \frac{9ab}{3}$

$a - 2b = \sqrt{\frac{ab}{3}}$

$a^2 + b^2 = 90$

$3a^2 - 13ba + 4b^2 = 0$

$-13ba + b^2 = -270$

$-a^2 - 13ab = -360$

$a^2 + b^2 = -90$

$\cancel{a^2 + b(a-2b)^2 + b^2 = 90}$

$a^2 + 4b^2 - 4ab = \frac{ab}{3}$

$a + b = \sqrt{90 + 2ab}$

$a^2 + b^2 = \frac{13ab}{3} + 3b^2$

$a + b = \sqrt{90 + 6(a-2b)^2} =$

$a - 2b$

$a^2 - 4ba + 4b^2 = \frac{ab}{3}$

$= a + b = \sqrt{90 + 6a^2 - 24ab + 24b^2}$

$3a^2 - 13ba + 4b^2 = 0$

$a^2 + b^2 = 90$

$2a^2 - 13ab + 3b^2 = -90$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)