МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5.

Определим значения $f(x)$ для всех натуральных x от 2 до 25.

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$
$f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$
$f(4)=f(2\cdot2)=f(2)+f(2)=0$
$f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$
$f(6)=f(3)+f(2)=0$
$f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$
$f(8)=f(4)+f(2)=0$
$f(9)=f(3)+f(3)=0$
$f(10)=f(5)+f(2)=1$
$f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$
$f(12)=f(6)+f(2)=0$
$f(13)=\left[\frac{13}{4}\right]=3$
$f(14)=f(7)+f(2)=1$
$f(15)=f(5)+f(3)=1$
$f(16)=0$
$f(17)=4$
$f(18)=0$
$f(19)=4$
$f(20)=1$
$f(21)=1$
$f(22)=2$
$f(23)=5$
$f(24)=0$
$f(25)=2$

Также, ~~в~~ если в условии $f(ab)=f(a)+f(b)$ положить $a=1$, то $f(b)=f(1)+f(b) \Rightarrow f(1)=0$

$f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=f\left(a\cdot\frac{1}{a}\right)=f(1)=0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right)=-f(a)$

Тогда $f\left(\frac{x}{y}\right)=f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$

То есть, $f\left(\frac{x}{y}\right)<0$ если $f(x)<f(y)$

Среди значений $f(x)$ при $2\leq x\leq 25$ 10 значений равны 0, 7 равны 1, 3 значения равны 2, одно 3, два по 4 и одно 5.

Если $f(x)=0$, то в качестве $f(y)>0$ можно взять 14 значений $(7\times1,\ 3\times2,\ 1\times3,\ 2\times4,\ 1\times5)$, и тогда пар (x,y) всего $10\cdot14=140$

Если $f(x)=1$, то вариантов $f(y)>1$ всего 7, и пар (x,y) $7\cdot7=49$

Если $f(x)=2$, то вариантов $f(y)>2$ всего 4 и пар $3\cdot4=12$

Если $f(x)=3$, то вар. $f(y)>3$ всего 3 и пар $1\cdot 3=3$

Если $f(x)=4$, то только один вариант $f(y)=5$ и две пары (x,y)

Всего пар $140+49+12+3+2=206$

Задача 2.

Сделаем замену $6y=t$. Тогда первое уравнение примет вид:

$x-2t=\sqrt{\frac{xt}{3}-2t-x+6}$. Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$(x-2t)^2=\frac{xt}{3}-2t-x+6$$

$$x^2-4tx+4t^2=\frac{xt}{3}-2t-x+6$$

$$\cancel{x^2}\ 4t^2-t\left(4x+\frac{x}{3}-2\right)+x^2+x-6=0$$

Решим это квадратное ур-е относительно t.

$$D=\left(\frac{13}{3}x-2\right)^2-16x^2-16x+16\cdot 6=\frac{169}{9}x^2-\frac{52x}{3}+4-16x^2-16x+96=$$

$$=\frac{25}{9}x^2-\frac{160x}{3}+100=\left(\frac{5x}{3}-10\right)^2$$

$$t=\frac{\frac{13}{3}x-2\pm\left(\frac{5x}{3}-10\right)}{8};\quad t=\frac{3x}{4}-\frac{3}{2}\ \text{ и }\ t=\frac{x}{3}+1$$

Второе уравнение после замены $6y=t$ примет вид:

$$x^2+t^2-12x-6t=45$$

Подставим $t=\frac{x}{3}+1$: $x^2+\frac{x^2}{9}+\frac{2x}{3}+1-12x-2x-6-45=0$

$$\frac{10x^2}{9}-\frac{40x}{3}-50=0$$

Корни $x=-3;15$ $\quad t=0;6$ $\quad y=0;1$

Подставим во второе ур-е $t=\frac{3x}{4}-\frac{3}{2}$

$$x^2+\frac{9x^2}{16}-\frac{9x}{4}+\frac{9}{4}-12x-\frac{9x}{2}+9-45=0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\frac{25x^2}{16}-\frac{75x}{4}-\frac{135}{4}=0$$

$$\frac{25x^2}{4}-75x-135=0$$

$$x=6+\frac{12}{5}\sqrt{10}\ ;\quad 6-\frac{12}{5}\sqrt{10}$$

$$t=\frac{9}{2}+\frac{9\sqrt{10}}{5}-\frac{3}{2}=3+\frac{9\sqrt{10}}{5}$$

$$t=3-\frac{9\sqrt{10}}{5}$$

$$y=\frac{1}{2}+\frac{3}{\sqrt{10}}\ ,\quad y=\frac{1}{2}-\frac{3}{\sqrt{10}}$$

Ответ: $(-3;0)$, $(15;1)$, $\left(6+\frac{12\sqrt{10}}{5};\ \frac{1}{2}+\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$, $\left(6-\frac{12\sqrt{10}}{5};\ \frac{1}{2}-\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

Задача 3.

Так как $10x-x^2$ стоит под логарифмом, то $10x-x^2>0$,

$x^2-10x<0$, $|x^2-10x|=-(x^2-10x)=10x-x^2$

После ~~в~~ замены $10x-x^2=t$ неравенство примет вид:

$$t+t^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 t}$$

$$t^{\log_3 4}\geq 5^{\log_3 t}-t$$

Логарифмируя обе части по основанию 3, получаем:

$$\log_3 4\cdot\log_3 t\geq\log_3\left(5^{\log_3 t}-t\right)$$

$$\log_3 t\geq\log_4 3\,\log_3\left(5^{\log_3 t}-t\right)$$

$$\log_3 t\geq\log_4\left(5^{\log_3 t}-t\right)$$

Замена $\log_3 t=y$, $t=3^y$

$y \geq \log_4(5^y - 3^y)$

$4^y \geq 5^y - 3^y$

$4^y + 3^y \geq 5^y$

Нетрудно заметить, что при $y = 2$ $4^2 + 3^2 = 5^2$, при $y > 2$ функция 5^y возрастает быстрее, чем $3^y + 4^y$, а значит, неравенство верно только для $y \leq 2$ ~~так как при~~

Отсюда следует, что $\log_3 t \leq 2$, $t \leq 3^2 = 9$

$10x - x^2 \leq 9$

$x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$x \in (-\infty, 1] \cup [9; +\infty)$

Однако, по условию $10x - x^2 \geq 0$, т.е. $0 \leq x \leq 10$. Тогда остаются только промежутки $x \in [0; 1]$ и $x \in [9, 10]$

Ответ: $x \in [0; 1] \cup [9, 10]$

Задача 1.

Сделаем замены $2\alpha = x$ и $2\beta = y$

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin(x+2y) + \sin x = -\frac{2}{5}$

$\sin x \cos y + \sin y \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin x \cos 2y + \sin 2y \cos x + \sin x = -\frac{2}{5}$

$\sin x \cos^2 y - \sin x \sin^2 y + 2 \sin y \cos y \cos x + \sin x = -\frac{2}{5}$

$\cos y(\sin x \cos y + \sin y \cos x) + \sin y \cos y \cos x + \sin x(1 - \sin^2 y) = -\frac{2}{5}$

$\frac{-\cos y}{\sqrt{5}} + \sin y \cos y \cos x + \sin x \cos^2 y = -\frac{2}{5}$

$-\frac{\cos y}{\sqrt{5}} + \cos y(\sin y \cos x + \sin x \cos y) = -\frac{2}{5}$

$\frac{-2\cos y}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}$

$\cos y = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin x \cos y + \sin y \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{\sin x}{\sqrt{5}} \pm \frac{2\cos x}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin x \pm 2\cos x = -1$

$\sin x = -1 \pm 2\cos x$

$\sin^2 x = 1 + 4\cos^2 x \pm 4\cos x$

$1 - \cos^2 x = 1 + 4\cos^2 x \pm 4\cos x$

$5\cos^2 x \pm 4\cos x = 0$

1) $\cos x = 0$ 2) $\cos x = \pm\frac{4}{5}$

1) $\cos 2\alpha = 0$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\cos\alpha = \sin\alpha$ или $\cos\alpha = -\sin\alpha$

$tg\alpha = \pm 1$

2) $\cos 2\alpha = \pm\frac{4}{5}$

$1 - 2\sin^2\alpha = \pm\frac{4}{5}$

$\sin^2\alpha = \frac{1}{2} \pm \frac{2}{5} = \frac{5 \pm 4}{10}$

$\sin^2\alpha = \frac{9}{10}$, $\cos^2\alpha = \frac{1}{10}$ или $\sin^2\alpha = \frac{1}{10}$, $\cos^2\alpha = \frac{9}{10}$

$tg^2\alpha = 9$, $tg\alpha = \pm 3$ $tg^2\alpha = \frac{1}{9}$, $tg\alpha = \pm\frac{1}{3}$

Ответ $\pm 1, \pm 3, \pm\frac{1}{3}$

Задача 6.

Рассмотрим неравенство $ax+b \leq -32x^2+36x-3$:

$32x^2 - x(36-a) + b + 3 \leq 0$

Оно верно для всех $x \in [\frac{1}{4}; 1]$, если один из корней уравнения $32x^2 - x(36-a) + b + 3 = 0$ больше, либо равен 1, а другой $\leq \frac{1}{4}$:

$D_1 = 36^2 - 72a + a^2 - 4 \cdot 32b - 12 \cdot 32$

$$x = \frac{36 - a \pm \sqrt{D_1}}{64}$$

$$\frac{36-a+\sqrt{D_1}}{64} \geq 1, \quad \frac{36-a-\sqrt{D_1}}{64} \leq \frac{1}{4}$$

$36 - a + \sqrt{D_1} \geq 64, \quad 36 - a - \sqrt{D_1} \leq 16$

$\sqrt{D_1} \geq 24$ (получается вычитанием второго неравенства из первого)

Теперь рассмотрим неравенство $ax+b \geq \frac{16x-16}{4x-5}$. Так как при $x \in [\frac{1}{4}; 1]$ $4x-5 < 0$, то, домножаем на $4x-5$:

$16x - 16 \geq (ax+b)(4x-5)$

$4ax^2 - x(5a + 16 - 4b) - 5b + 16 \leq 0$

Здесь также один корень должен быть ≥ 1, а другой $\leq \frac{1}{4}$

$D_2 = 25a^2 + 16b^2 + 256 + 160a - 40ba - 128b + 80ab - 256 = 25a^2 + 160a + 16b^2 - 128b + 40ab$

$$x = \frac{5a + 16 - 4b \pm \sqrt{D_2}}{8a}$$

$5a + 16 - 4b + \sqrt{D_2} \geq 8a$

$5a + 16 - 4b - \sqrt{D_2} \leq 2a$

$\sqrt{D_2} \geq 3a$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\sin(x+y) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(x+2y) + \sin x = -\frac{2}{5}$

$\sin x \cos y + \sin y \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin x \cos 2y + \sin 2y \cos x + \sin x = -\frac{2}{5}$

$\log_a 5 = 1$

$\log_a 2 = 0$ $\qquad f(1) = 0$

$\log_a 3 = 0$

$f(2) = 0$ $\qquad f(13) = 3$

$f(3) = 0$ $\qquad f(17) = 4$

$f(5) = 1$ $\qquad f(19) = 4$

$f(7) = 1$ $\qquad f(23) = 5$

$f(11) = 2$

$\frac{\sin x}{\sqrt{5}} \pm \frac{2\cos x}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin x \pm 2\cos x = -1$

$\sin x = -1 \pm 2\cos x$

$1 - \cos^2 x = 4\cos^2 x \pm 4\cos x + 1$

$5\cos^2 x \pm 4\cos x = 0$

$\cos x = 0$ $\qquad \cos x = \pm\frac{4}{5}$

$\sin x = \pm 1$ $\qquad \sin x = \pm\frac{3}{5}$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \pm\frac{4}{5}$

$1 - 2\sin^2\alpha = \pm\frac{4}{5}$

$\sin^2\alpha = \frac{1}{2} \pm \frac{2}{5} = \frac{5 \pm 4}{10}$ $\qquad \operatorname{tg}\alpha = \pm 3; \pm\frac{1}{3}$

~~$\sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\sin b \cos a$~~

$\sin x(\cos^2 y - \sin^2 y) + 2\sin y \cos y \cos x + \sin x = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos y - \sin x \sin^2 y + \sin y \cos y \cos x + \sin x = -\frac{2}{5}$

$\sin x \cos^2 y + \cos x \sin y \cos y - \frac{\cos y}{\sqrt{5}} = -\frac{2}{5}$

$\frac{-2\cos y}{\sqrt{5}} = \cancel{-}\frac{2}{5}$

$\cos y = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\qquad \sin y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$32x^2 - x(36-a) + b + 3 \leq 0$

$D = 36^2 - 72a + a^2 - 4\cdot 32b - 12\cdot 32$

$x = \frac{36 - a \pm\sqrt{D}}{64}$

$\frac{36-a}{64} = \frac{5}{8}$

$36 - a = 40$

$a = -4$

$\cos 2\alpha = 0$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 0$

$(\cos\alpha - \sin\alpha)(\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = \pm 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

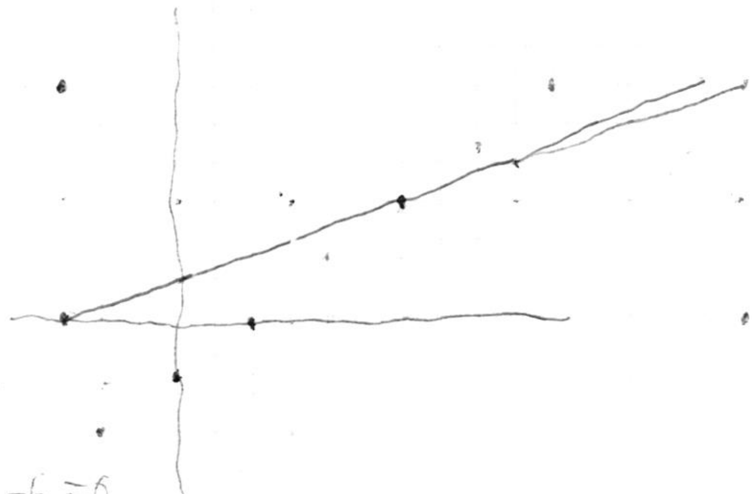
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2-12x+36+36y^2-36y+9=90$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$6y=t$

$(x-2t)^2=\frac{xt}{3}-2t-x+6$



$x^2-4tx+4t^2=\frac{xt}{3}-2t-x+6$

$4t^2-t(4x+\frac{x}{3}-2)+x^2+x-6=0$

$D=(\frac{13x}{3}-2)^2-16x^2-16x+16\cdot 6=\frac{169x^2}{9}-\frac{4\cdot 13x}{3}+4-16x^2-16x+16\cdot 6=$

$=\frac{25x^2}{9}-\frac{100x}{3}+100=(\frac{5}{3}x-10)^2$

$t=\frac{\frac{13x}{3}-2\pm(\frac{5x}{3}-10)}{8}$

$t=\frac{6x-12}{8}=\frac{3x}{4}-\frac{3}{2}$

$t=\frac{\frac{8x}{3}+8}{8}=\frac{x}{3}+1$

$10x-x^2=t$

$t+t^{\log_3 4}$ $\cancel{\geq 5^{\log_3 t}}$ $\geq 5^{\log_3 t}$

$\log_3 t\cdot\log_3 5\leq\log_3(t+t^{\log_3 4})$

$\log_3 4\cdot\log_3 t\geq\log_3(5^{\log_3 t}-t)$

$\log_3 t\geq\log_4(5^{\log_3 t}-t)$

$\log_4 t\cdot\log_3 4\geq\log_4$

$\log_4 t\cdot\log_3 4\geq\log_4(5^{\log_3 t}-t)$

$\log_3 t=y$

$y\geq\log_4(5^y-3^y)$

$4^y\geq 5^y-3^y$

$4^y+3^y\geq 5^y$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

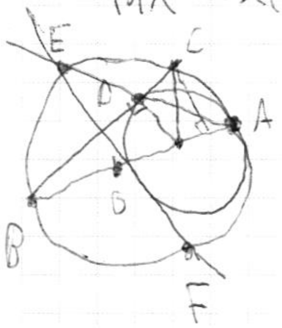
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$16x-16 \geq (4x-5)(ax+b)$

$16x-16 \geq 4ax^2 - x(5a-4b) - 5b$

$4ax^2 - x(16+5a-4b) + 16-5b \leq 0$



$BD^2 = 2R(2R-2r) = 4R(R-r)$

$BD^2 + r^2 = (2R-r)^2$

$BD^2 = 4R^2 - 4Rr$

$g(x) = f(e^x)$

$g(x+y) = f(\cancel{e^{x+y}}) = f(e^x e^y) = f(e^x) + f(e^y) = g(x) + g(x)$

$f(1)=0$	$f(8)=0$	$f(15)=1$	$f(22)=2$
$f(2)=0$	$f(9)=0$	$f(16)=0$	$f(23)=5$
$f(3)=0$	$f(10)=1$	$f(17)=4$	$f(24)=0$
$f(4)=0$	$f(11)=2$	$f(18)=0$	$f(25)=2$
$f(5)=1$	$f(12)=0$	$f(19)=4$	
$f(6)=0$	$f(13)=3$	$f(20)=1$	
$f(7)=1$	$f(14)=1$	$f(21)=1$	

10

$\cancel{14}\times 0$

7×1

3×2

1×3

2×4

1×5

$140 + 7\cdot 7 + 3\cdot 4 + 3 + 2$

$D = 75^2 + 25\cdot 135 = 25(15^2+135) =$

$= 15^2(25+15) = 15^2\cdot 40 = 30^2\cdot 10$

$x = \dfrac{75 \pm 30\sqrt{10}}{25}\cdot 2 = 6 \pm \dfrac{12}{5}\sqrt{10}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$32x^2 - x(36-a) + b + 3 \leq 0$

$D = 36^2 - 72a + a^2 - 4 \cdot 32b - 12 \cdot 32$

$x = \frac{36-a-}{}$

$36 - a + \sqrt{D_1} \geq 64$

$36 - a - \sqrt{D_1} \leq 16$

$\sqrt{D_1} \geq 24$

$4ax^2 + 4bx - 5ax - 5b \geq 16x - 16$

$4ax^2 - x(5a + 16 - 4b) - 5b + 16 \leq 0$

$D = 25a^2 + 16b^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)