МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$2\cdot\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} \quad \begin{matrix}(1)\\(2)\end{matrix}$$

1) $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$$

$$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = -1 \quad \Big| : \cos^2\alpha \neq 0$$

$$2tg\alpha + 2 - 2tg^2\alpha = -1 - tg^2\alpha$$

$$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$$

$$D_1 = 1+3 = 4$$

$$tg\alpha = 1\pm 2 = \begin{matrix}3,\\-1\end{matrix}$$

Ответ: $-1, \frac{1}{3}, 3$

2) $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$$

$$2tg\alpha - 2 + 2tg\alpha = -1 - tg^2\alpha$$

$$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$$

$$D_1 = 4$$

$$tg\alpha = \frac{-1\pm 2}{3} \quad \begin{matrix}-1\\ \frac{1}{3}\end{matrix}$$

№5.

Заметим:

$$f(a) = f(1) + f(a)$$
$$f(1) = 0$$

$$f\left(a\cdot\frac{1}{a}\right) = f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$$
$$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$$

$$f(x/y) < 0 \Rightarrow f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$$
$$f(x) - f(y) < 0$$
$$f(y) > f(x)$$

Просчитаем все значения от 2 до 25:

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2

Кол.

$$\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l}0:10\\1:7\end{array}\right\}17\\2:3\end{array}\right\}20\\3:1\end{array}\right\}21\\4:2\end{array}\right\}23\\5:1\end{array}$$

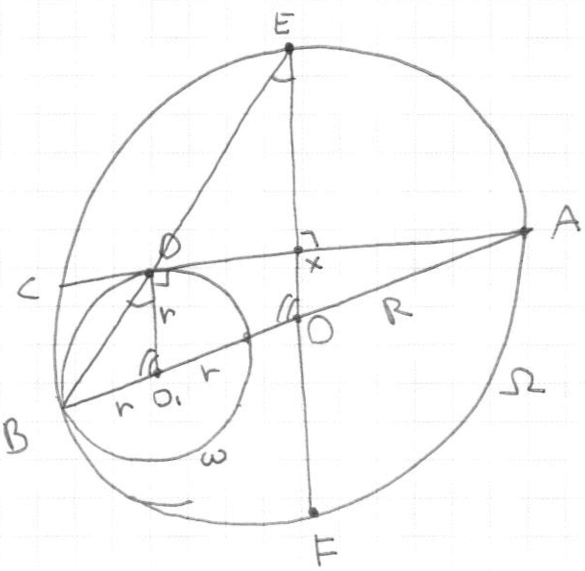
Тогда количество пар равно:

$$1\cdot 23 + 2\cdot 21 + 1\cdot 20 + 3\cdot 17 + 7\cdot 10 =$$
$$23 + 42 + 20 + 51 + 70 = 201$$

Ответ: 201

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



$AB \cap EF = O$

$EF \cap AC = X$

1) O_1 – центр ω, $O_1B = O_1D = r$

$O_1D \perp AC$ (кас.) $\}$ => $O_1D \parallel EF$
$EF \perp AC$

=> ~~$\angle BDO_1 = \angle BEO$~~ $\angle BDO_1 = \angle BEO$ ($O_1D \parallel EF$) | =>
~~$\angle EXD = \angle$~~ $\angle DO_1B = \angle EOB$ ($O_1D \parallel EF$)

=> $\triangle O_1BD \sim \triangle OBE$ (2 угла)

$O_1D = BO_1$ => $OB = OE$
$OB \in AB$ (AB – диаметр) | => OB ~~$=OE=R$~~ – радиус Ω $= R$

2) из ① ~~EF~~ $EO \in$ ~~...~~ – радиус => EF – диаметр

=> EF делит CA пополам ($EF \perp AC$)

$AC = \frac{15}{2} + \frac{17}{2} = 16$, $CX = XA = 8$

$\angle ADO_1 = \angle AXO = 90^\circ$ | $\Rightarrow \triangle AOX \sim \triangle AO_1D$ (2 угла) $\Rightarrow$

$\angle A$ - общий

$$\frac{AX}{AO} = \frac{AD}{AO_1}$$

$$\frac{8}{R} = \frac{17}{2(2R-r)}$$

$$32R - 16r = 17R$$

$$15R = 16r$$

$$R = \frac{16}{15}r$$

в $\triangle ADO_1$ по т. Пифагор.

$$\left(\frac{17}{2}\right)^2 + r^2 = (2R-r)^2$$

$$\left(\frac{17}{2}\right)^2 + r^2 = \left(\frac{17}{15}r\right)^2$$

$$r^2\left(\frac{2}{15}\right)\left(\frac{32}{15}\right) = \left(\frac{17}{2}\right)^2$$

$$r^2 = \frac{15^2 \cdot 17^2}{64 \cdot 2^2}$$

$$r = \frac{15 \cdot 17}{16} = 15\frac{15}{16}$$

$$R = 17$$

3) $ED \cdot DA = \frac{15}{2} \cdot \frac{17}{2}$

$$\frac{EA}{AD} = \frac{R}{r}$$

$$EA = AD \cdot \frac{R}{r}$$

$$(EA - AD)(AD) = \frac{15}{2} \cdot \frac{17}{2}$$

$$AD^2\left(\frac{R}{r} - 1\right) = \frac{15 \cdot 17}{4}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$AD^2\left(\frac{\cancel{17}\cdot 16}{15\cdot\cancel{17}}-1\right)=\frac{15\cdot 17}{4}$$

$$AD^2=\frac{15^2\cdot 17}{4}$$

$$AD=\frac{15}{2}\sqrt{17}$$

$$AE=\frac{\cancel{15}}{2}\sqrt{17}\cdot\frac{\cancel{17}}{\cancel{15}\cdot\cancel{16}\cdot 17}\cdot 16=\frac{16\sqrt{17}}{2}=8\sqrt{17}$$

$$\sin\angle AFE=\frac{\overset{4}{\cancel{8}}\sqrt{17}}{\underset{17}{\cancel{34}}}=\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$\angle EAF=90°$ (цент угол, опир на диаметр)

$$AF^2=34^2-64\cdot 17=17\cdot 17\cdot 4-17\cdot 4\cdot 16=17\cdot 4(17-16)=68$$

$$AF=2\sqrt{17}$$

$$tg\angle AFE=4$$

$$S_{AEF}=\frac{AF\cdot AE}{2}=\frac{8\sqrt{17}\cdot 4\sqrt{17}}{2}=17\cdot 16=272$$

Ответ: $15\frac{15}{16}$; 17, $tg=4$, 272

[радиус] [$\angle AFE$] [S_{AEF}]

№3

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$10x-x^2>0$

$t=10x-x^2>0$

$t+t^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log t}$

$3^{\log_3 t}+4^{\log_3 t} \geqslant 5^{\log_3 t}$

$a=\log_3 t$

$3^a+4^a \geqslant 5^a$

$a \in (-\infty;2]$

$\log_3 t \leq 2$

$t \leq 9$

$10x-x^2 \leq 9$

$x^2-10x+9 \leq 0$

$(x-9)(x-1) \leq 0$

$x \in [1;9]$

Ответ: $[1;9]$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$

$x^2+36y^2-12x-16y=45$

$\frac{1}{9}+\frac{1}{16}$

$\frac{25}{9\cdot16}$ $\frac{1}{25}$

$a^{\log_b c}=c^{\log_b a}$

$\frac{25}{144}$ $\frac{1}{25}$

$t+t^{\log_3 4}\geqslant 5^{\log_3 t}$

$3^{\log_3 t}+t^{\log_3 4}\geqslant 5^{\log_3 t}$

$4^{\log_3 t}$

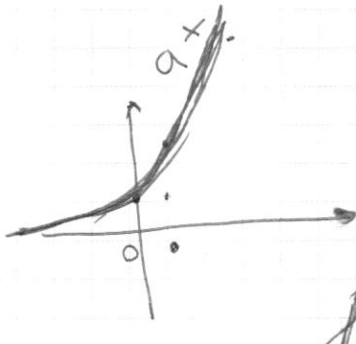
$3^{\log_3 t}+4^{\log_3 t}\geqslant 5^{\log_3 t}$

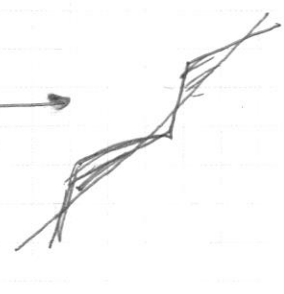
$3^a+4^a\geqslant 5^a$

$\nearrow \; \nearrow \quad \nearrow$

$\nearrow$

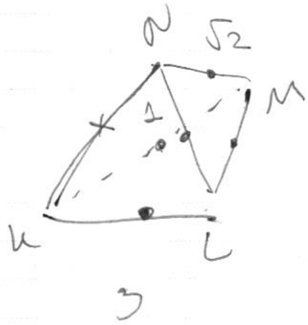
$\nearrow = \nearrow$



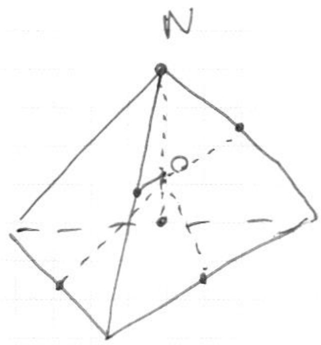


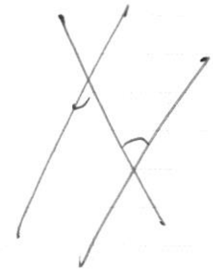
$e^{x'}=e^x \quad a^{x'}=\ln a\cdot a^x$

$\ln 3\cdot 3^a+\ln 4\cdot 4^a-\ln 5\cdot 5^a=0$



3





$16 \cdot 16 + 16$

256

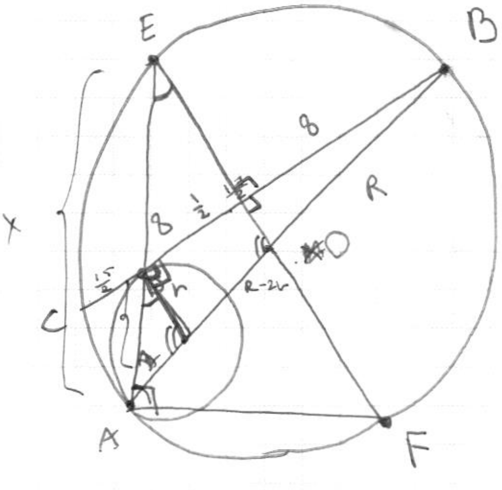
272

$\frac{8}{\sqrt{15}} r = \frac{17}{4}$

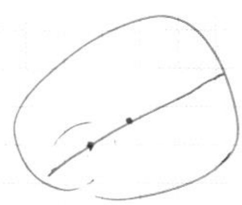
$\frac{16 \cdot 15 - 15}{16} = 15\frac{15}{16}$

$r = \frac{17}{32} \cdot \sqrt{15}$

$R = \frac{17}{2\sqrt{15}}$



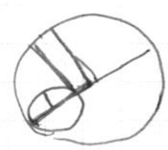
$\frac{R}{r} = \frac{x}{y}$



$(x-y)(y) = \frac{17 \cdot 17}{4}$

$\cancel{xy = \frac{15 \cdot 17}{4}}$

$r\left(\frac{R}{r}y - y\right)y$



$x = \frac{R}{r}y$

$= \frac{17 \cdot 17}{4}$

$y^2 = \frac{r}{R} \cdot 15 \cdot 17$

$\sqrt{\left(\frac{17}{2}\right)^2 + r^2} + r = 2R$

$y^2\left(\frac{R}{r} - 1\right) = \frac{15 \cdot 17}{4}$

$\frac{8}{R} = \frac{17}{2(2R - r)}$

$y^2\left(\frac{17 \cdot 16}{15 \cdot 17}\right) = \frac{15 \cdot 17}{}$

$k = \frac{r}{R}$

$(2R - r)^2 - r^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2$

$= \frac{17}{15 \cdot 17}$

$= \frac{15 \cdot 17}{4 \cdot 16}$

$\frac{1}{15}(32 \cdot 32) = \left(\frac{17}{2}\right)^2$

$32R - 8r = 17R$

$\left(\frac{17}{15}r\right)^2 - r^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2$

15

$15R = 16r$

$R = \frac{16}{15}r$

$\frac{64}{15}r^2 = \frac{17^2}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$

$x^2+36y^2-12x-36y=45$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

$f(p\cdot x)=f(p)+f(x)$

$f(abc)=f(a)+f(b)+f(c)$

$f(p_1\cdot p_2\cdots p_n)=f(p_1)+f(p_2)+\dots+f(p_n)$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/4]$

$f(a)=f(1)+f(a)$

$f(1)=0$

$f(2\cdot a)=f(2)+f(a)$

$f(4)=f(2)+f(2)$

$f(x^2)=2\cdot f(x)$

$x\in N \Rightarrow f(x)\geq 0$

$f(2)=$

$f(3)=$

x	$\frac{x}{4}$	$f(x)$
2	$\frac{1}{2}$	0
3	$\frac{3}{4}$	0
5	$1\frac{1}{4}$	1
7	$1\frac{3}{4}$	1
11	$2\frac{3}{4}$	2
13	$3\frac{1}{4}$	3
17		4
19		4
23		5
29		6

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})<0$

$f(\frac{1}{x})=$

$f(\frac{1}{y})<0$

$f(n)\geq 0$, $n\in N$

$f(y\cdot\frac{1}{y})=0=f(y)+f(\frac{1}{y})$

$f(\frac{1}{y})=-f(y)$

65
+20
+121

$f(14)$

$f(2\cdot 7)=f(2)+f(7)=$ 0 1

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})<0$

$f(x)-f(y)<0$

$f(y)>f(x)$

$f(12)=f(2)+f(6)$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5	0	2

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=$

$\sin 30^\circ+\sin 60^\circ=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt3}{2}=\frac{1+\sqrt3}{2}$

$\frac{1}{2}\sin 15^\circ\cdot\sin 45^\circ=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\sin 15^\circ$

$=\frac{\sqrt2\sqrt{2-\sqrt3}}{8}\quad\frac{\sqrt{4-2\sqrt3}}{8}$

$=\frac{\sqrt{(\sqrt3-1)^2}}{8}=\frac{\sqrt3-1}{8}$

$\sin 30^\circ+\sin 30^\circ=1$

$=\frac{1}{4}\quad\cos 0^\circ\quad \sin 30=\frac12\quad\times 2$

$\cos 30=\frac{\sqrt3}{2}$

$\cos 30^\circ=2\cos^2 15^\circ-1.$

$\sin 15^\circ\qquad \cos^2 15=\sqrt{\frac{\cos 30+1}{2}}$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$

$=\frac{3}{4}=\frac{\sqrt3}{2}$

$\cos 30^\circ=1-2\sin^2 15^\circ$

$\sin 15^\circ=\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt3}{2}}{2}}$

$=\frac{2}{\sqrt2}\frac{\sqrt{2-\sqrt3}}{2}$

$2\cdot\cos 15^\circ\cdot\sin 45^\circ=$

$\cos 30^\circ=\cos^2 15^\circ-\sin^2 15^\circ$

$\cos 30=2\cos^2 15-1$

$2\cos^2 15=\cos 30+1$

$\cos 15=\sqrt{\frac{1+\cos 30}{2}}\quad\sqrt{\frac12+\frac14}=$

$1+2\sqrt3\quad\frac12+\frac{\sqrt3}{4}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=$

$2\cdot$

$=\frac{\sqrt{2+\sqrt3}}{2}$

$\cos 15^\circ\cdot\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{2+\sqrt3}}{2}\cdot\frac{\sqrt2}{2}=\frac{\sqrt{(4+2\sqrt3)}}{4}=\frac{\sqrt3+1}{4}$

$\sqrt{2+\sqrt3}\quad\frac{\sqrt{2+\sqrt3}}{2}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=2\cdot\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{2}{5}$

$2\cdot\cos 2\beta\cdot+\frac{1}{\sqrt5}=+\frac{2}{\sqrt{25}}$

$\sin x+2\cos x=-1$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}\qquad\sin 2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5}+\frac{\cos 2\alpha\cdot 2}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}\qquad\Rightarrow\sin 2\alpha+2\cos 2\alpha=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha=-1$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$2\cos\beta \cdot \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$ $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$ ~~24~~ $\sin 4\beta = \frac{4}{5}$ $\cos 4\beta = -\frac{3}{5}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$ $1+tg^2 = \frac{\sin^2+\cos^2}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2}$

~~$2\sin 2\alpha$~~

~~$\sin 2\alpha \cdot -\frac{3}{5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{4}{5} + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$~~

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = -1 \quad |:\cos^2\alpha \neq 0$

$2tg\alpha + 2 - 2\frac{tg^2}{\cancel{3}} = \cancel{-\frac{1}{\cos^2\alpha}} = -tg^2 - 1$

$2tg\alpha - tg^2\alpha + 3 = 0$ $2t + 2 - 2tg^2 = -t^2 - 1$

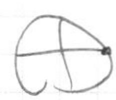
~~tg~~ $t^2 - 2t + 3 = 0$

$(t-1)^2 = -1$ $t_{1,2} = 1 \pm i$

$\sin = 0$

0

$tg = 0$



$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$2\cos\alpha\sin\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = -1 \quad |:\cos^2\alpha$

$2tg - 2 + 2tg^2 = -tg^2 - 1$

$-1 \quad \frac{1}{3}$

$3tg^2 + 2tg - 1 = 0$

$D_1 = 1 + 3 = 4$ $t = \frac{-1 \pm 2}{3}$

8. $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha$

$\sin(30° + 60°) = 1$

$= \cancel{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt3}{2}} + \cancel{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt3}$

$\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\sin 4\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$ $2\sin 2\beta\cos\beta = -\frac{2}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

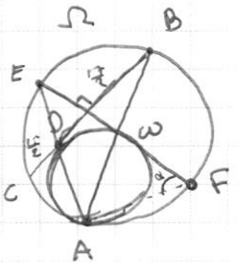
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{f(}\, g(x_1) > g(x_2)$

$x_1 > x_2$

$\cancel{f(x_1) > f(x_2)}$

$\cancel{f(\hat{g}(x_1)}$



$10 - x^2 > 0 \Rightarrow$

$10x - x^2 + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$\cancel{t + |t|^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log t}}$

$t = 10x - x^2 > 0$

$t, 0$

$t + t^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3 t}$ А решим [illegible]

$5^{\log_3 t} \nearrow$

$f(t) = t + t^{\log_3 4} - 5^{\log_3 t}$ —, $t > 0$

$(\nearrow) \quad (\searrow)$

$f'(t) = 1 + \log_3 4 \cdot t^{\log_3 4 - 1}$

$t + t^{\log_3 4} = 5^{\log_3 t}$

4	0	5
1	~~[illegible]~~ 2	1
2		
3	7	5
4		

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$ax+b \overset{=}{\cancel{\neq}} 4 + \frac{4}{4x-5}$ на $[\frac{1}{4}; 1]$

≤ 1 решение

$\frac{16x-16}{4x-5}$

$(4x+5)(ax+b) = -16x+16$

$4ax^2 + 4xb + 5ax + 5b - 16x + 16 = 0$

$4ax^2 + x(4b + 5a - 16) + 5b + 16 = 0$

$D = (4b^2 + 5a - 16) - 4(4a + 5b + 16)$

$a \quad f(x) \quad 3 \le f(\frac{1}{4}) \le 5$

$0 \le f(1) \le 1$

$-\frac{16}{3}x + \frac{19}{3} = \frac{16x-16}{4x-5}$

$\frac{a}{4} + b = 5$

$a + b = 1 \quad (4x-5)(19-16x) = 48x-48$

$76x - 64x^2 - 95 + 80x = 48x - 48$

$a = -\frac{16}{3} = \cancel{2\frac{5}{3}}$

$64x^2 - 108x + 47 = 0$

$b = \frac{19}{3}$

$D_1 = 54^2 - 64 \cdot 47$

$\cancel{(54+2)(54-2)}$

$$\begin{array}{r} 54 \\ \times 54 \\ \hline 216 \\ 270 \\ \hline 2916 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 64 \\ \times 47 \\ \hline 448 \\ 256 \\ \hline 3008 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

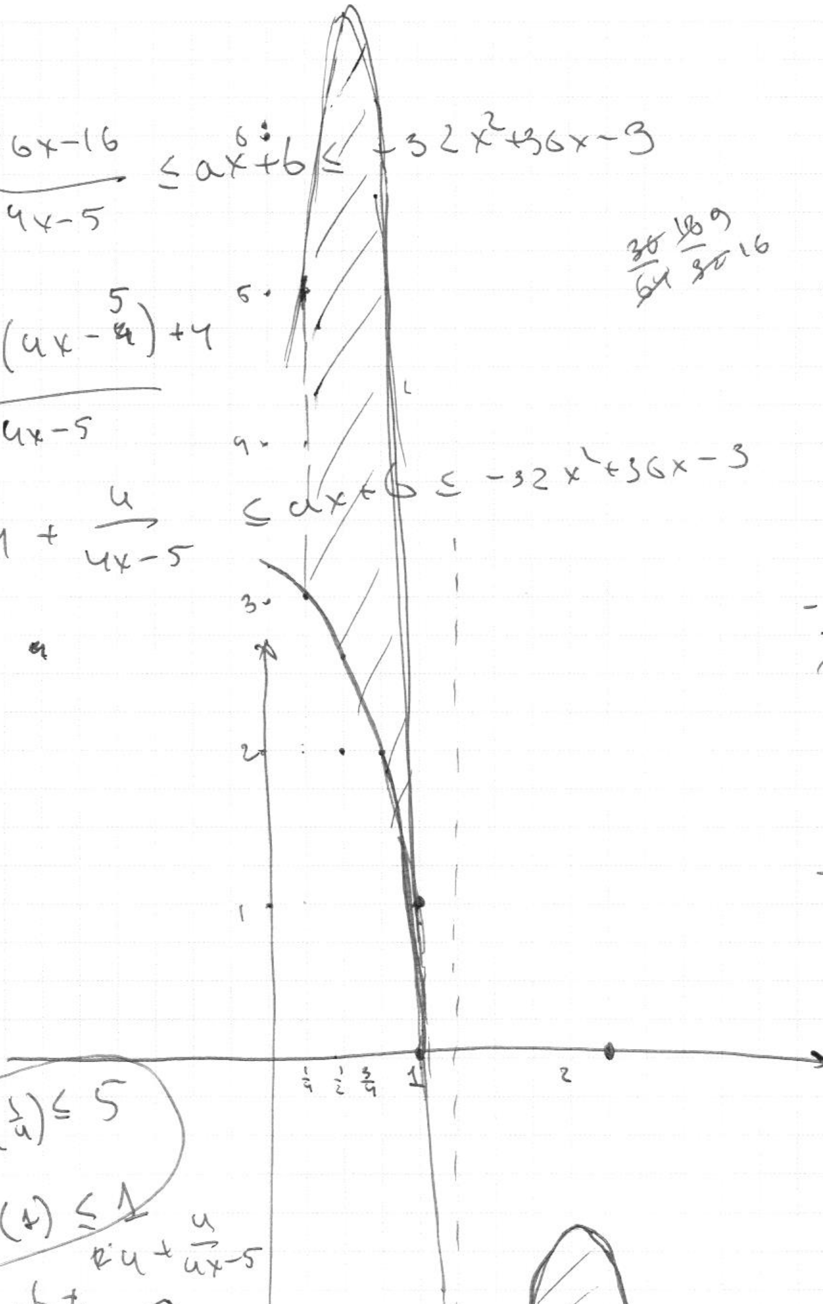
$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$\frac{\cancel{36}\,\cancel{18}\,9}{\cancel{64}\,\cancel{32}\,16}$

$\frac{\cancel{36}\,\cancel{18}\,9}{\cancel{256}\,\cancel{64}\,32\,4}$

$\frac{4(4x-5)+4}{4x-5}$

$4+\frac{4}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$



$-\frac{\cancel{32}\cdot 27}{\cancel{16}}+81-3$ -54

$-2+9-3$

$-\frac{\cancel{32}\cdot 81}{8\cdot 16\cdot\cancel{16}}+\frac{\cancel{36}\cdot 9}{\cancel{16}\,8}-3$

$-\frac{81}{8}+\frac{162}{8}-3$

$\frac{81}{8}-24=$

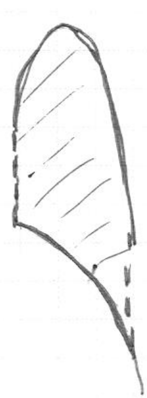
$10\frac14-3=7\frac18$

$-\frac{32}{16}$

$3\le f(\frac14)\le 5$

$0\le f(1)\le 1$

$ax+b \ge 4+\frac{4}{4x-5}$ на $(\frac14;1]$



☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)