МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Чистовик 1

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$, $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5}$;

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta = -\frac{4}{5}$;

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cos2\beta = -\frac{4}{5}$, $\cos2\beta = \frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt5}{2} = \frac{2}{\sqrt5}$;

$\sin2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \pm\sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt5}$;

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$.

1 случай : $\sin2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$; $\sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$,

$2\sin2\alpha+\cos2\alpha = -1$, $4\sin\alpha\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1 = -1$,

$2\cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha) = 0$; $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha \neq 0$.

Тогда $2\sin\alpha+\cos\alpha = 0$ $2\sin\alpha = -\cos\alpha$, $tg\alpha = -\frac{1}{2}$.

2 случай : $\sin2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$. $\sin2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}-\frac{1}{\sqrt5}\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$,

$2\sin2\alpha-\cos2\alpha = -1$, $4\sin\alpha\cos\alpha-1+2\sin^2\alpha = -1$,

$2\sin\alpha(2\cos\alpha+\sin\alpha) = 0$;

$$\left[\begin{array}{ll} \sin\alpha = 0, & (1) \\ 2\cos\alpha+\sin\alpha = 0; & (2) \end{array}\right.$$

(1) : $\begin{array}{l}\sin\alpha = 0 \\ \cos\alpha = \pm1\end{array} \Rightarrow tg\alpha = 0$

(2) : $2\cos\alpha+\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \sin\alpha = -2\cos\alpha \Leftrightarrow tg\alpha = -2$

Ответ : -2 ; $-\frac{1}{2}$; 0.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Чистовик 2

2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2-2y+2=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}, \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25; \end{cases}$

$\begin{cases} x-2-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)}, \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25. \end{cases}$ Пусть $a=x-2$, $b=y-1$.

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab}, & (1) \\ a^2+9b^2=25. & (2) \end{cases}$ ОДЗ: $\begin{cases} ab\geq 0, \\ a-2b\geq 0. \end{cases}$

Теперь равенство $(1) \Leftrightarrow (a-2b)^2=ab \Leftrightarrow a^2-4ab+4b^2=ab$,

$a^2-5ab+4b^2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=b, \\ a=4b. \end{array}\right.$

1) $a=b$. Подставив в (2), получаем, что $10b^2=25$.

$b=\pm\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$. Получаем 2 решения $(a;b)=\left(\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}};\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)=\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}};-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)$

Однако, ОДЗ удовлетворяет только пара $\left(-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}};-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)$

$\begin{cases} x-2=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}, \\ y-1=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2-\frac{\sqrt{10}}{2}, \\ y=1-\frac{\sqrt{10}}{2}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{4-\sqrt{10}}{2}, \\ y=\frac{2-\sqrt{10}}{2}. \end{cases}$

2) $a=4b$. Подставив в (2), получаем, что $25b^2=25$; $b=\pm 1$.

Получаем 2 решения $(a;b)=(4;1)=(-4;-1)$.

Однако, ОДЗ удовлетворяет только пара $(4;1)$

$\begin{cases} x-2=4, \\ y-1=1; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6, \\ y=2. \end{cases}$

Ответ: $(6;2)$, $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2};\frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Чистовик 3

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$ (1)

ОДЗ: $x^2+18x>0 \iff x(x+18)>0$

$x \in (-\infty;-18) \cup (0;+\infty)$.

Из ОДЗ следует, что $|x^2+18x| = x^2+18x$.

Неравенство (1) $\iff$ $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

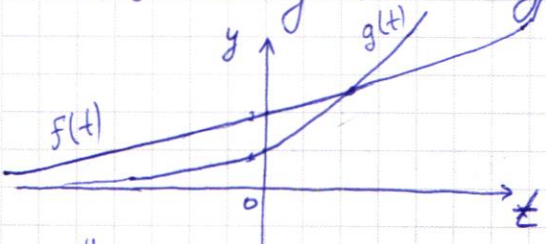
Заметим, что $5^2+12^2=13^2$.

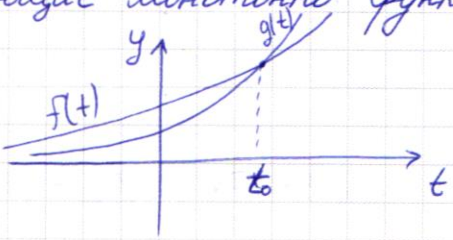
$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + (x^2+18x)^{\log_{12}12} \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} \iff$

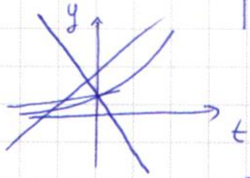
$\iff 5^{\log_{12}(x^2+18x)} + 12^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$. Пусть $t=\log_{12}(x^2+18x)$

$5^t+12^t \geq 13^t$. $f(t)=5^t+12^t$, $g(t)=13^t$

$f(t)$ и $g(t)$ – возрастающие монотонно функции





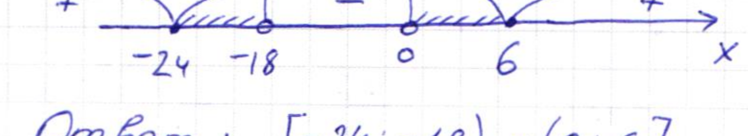


$5^{t_0}+12^{t_0}=13^{t_0}$

Равенство достигается в точке $t_0=2$.

$f(t) \geq g(t) \iff t \leq 2$ $\log_{12}(x^2+18x) \leq 2 \overset{\text{с ОДЗ}}{\iff}$

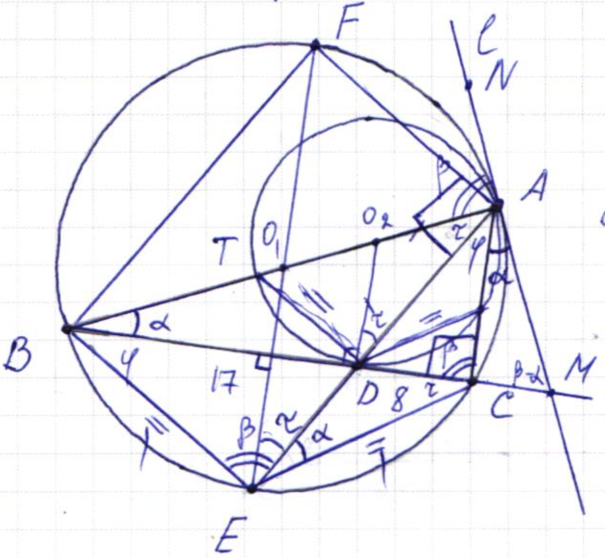
$\iff x^2+18x-144 \leq 0 \iff (x+24)(x-6) \leq 0$



$x \in [-24;-18) \cup (0;6]$.

Ответ: $[-24;-18) \cup (0;6]$

Чистовик 4



Решение: Докажем, что AD – биссектриса угла $\angle BAC$.
Проведем касательную l окружностей из точки A. Пусть $M = l \cap BC$, $N \in l$, N и M лежат по разные стороны от A.

$\angle CAM = \angle ABC$; ~~Пусть $\angle BAD$~~

$\angle BAN = \angle BEA = \angle BCA$.

$\angle ABC + \angle CBE + \angle BEA + \angle BAD = 180^\circ$ $(\angle CBE = \angle DAC = \angle CAD)$

$\angle ADC + \angle DCA + \angle CAD = 180^\circ$ $(\angle DCA = \angle BCA = \angle BEA)$

$\angle ADC = \angle ABC + \angle BAD$ (внешний угол) Пусть $\angle BAD = \tau$, $\angle CAD = \varphi$, $\angle DBA = \alpha$, $\angle BAN = \beta$

$\left(\cancel{\angle ABC + \angle CAD + \angle BEA + \angle BAD = 180^\circ} \quad \cancel{\angle ABC + \angle BAD + \angle BEA + \angle C'}\right)$

$\varphi + \beta + \alpha + \tau = 180^\circ$
$\tau + \alpha + \varphi + \beta = 180^\circ$.

$\angle BMA = \frac{1}{2}(2\beta - 2\alpha) = \beta - \alpha$.

По гомотетии с центром в т. A AD-биссектриса

$\smile BE = \smile EC \Rightarrow BC \perp FE$

O_1 и O_2 – центры окружностей A, O_1, O_2 лежат на одной прямой. ~~AB и F~~ AB и FE – диаметры, $\angle FAE = \angle BCA = 90^\circ$.

$\frac{AB}{AC} = \frac{17}{8}$ $AB = 17x$, $AC = 8x$, $(17x)^2 = (8x)^2 + 25 \Leftrightarrow$

$x = \frac{5}{3}$, $AB = 17 \cdot \frac{5}{3}$ $\boxed{R_1 = \frac{85}{6}}$

$AD = \sqrt{AB \cdot AC - BD \cdot DC} = \frac{8}{3}\sqrt{34}$ $\sin\varphi = \frac{8}{\frac{8}{3}\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\cos\varphi = \frac{5}{\sqrt{34}}$ $\frac{R_2}{\sin\varphi} = \frac{AD}{\sin(180-2\varphi)} = \frac{AD}{\sin 2\varphi}$ $AO_1 = O_1E = R$,

$R_2 = AD \cdot \frac{1}{2\cos\varphi} = \frac{4}{3}\sqrt{34} \cdot \frac{\sqrt{34}}{5} = \frac{136}{15}$ $\angle AEF = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Чистовик 5

$S_{AEF} = \frac{1}{2} AF \cdot AE$, $AF = FE \cdot \sin \tau = \frac{17\cdot 5}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\sqrt{34}} = \frac{17\cdot 5}{\sqrt{34}}$

$AE = FE \cdot \cos \tau = \frac{17\cdot 5}{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} =$

$$S_{AEF} = \frac{1}{2} \frac{\cancel{17}\cdot 5}{\cancel{\sqrt{34}}_{2}} \cdot \frac{17\cdot 5\cdot 5}{3\cdot\cancel{\sqrt{34}}} = \frac{25\cdot 85}{12} = \frac{2125}{12}.$$

Ответ: $R_1 = \frac{85}{6}$; $R_2 = \frac{136}{15}$; $\angle AEF = \arcsin\left(\frac{3\sqrt{34}}{34}\right)$; $S_{AEF} = \frac{2125}{12}$.

5. $f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$, $\forall p$ – простое

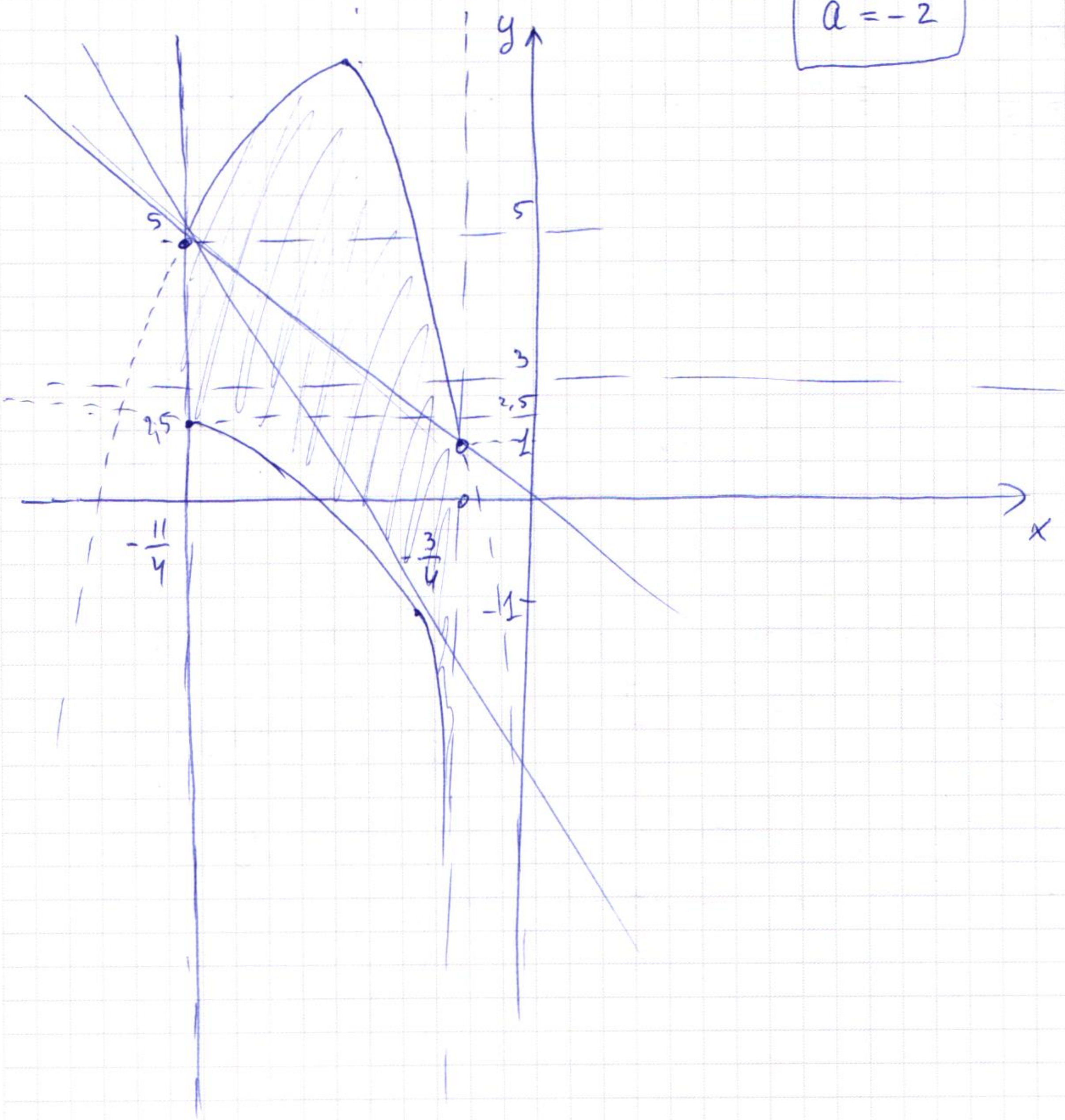
$x \in [1; 24]$ $\quad y \in [1; 24]$. $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$.

$f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(5) = 1$, $f(7) = 1$, $f(11) = 2$,
$f(13) = 3$, $f(17) = 4$, $f(19) = 4$, $f(23) = 5$

Чистовик 6

6. $\begin{cases} ax+b \geq \dfrac{12x+11}{4x+3} = 3 + \dfrac{2}{4x+3}, \\ ax+b \leq -8x^2 - 30x - 17; \end{cases}$

$\boxed{\begin{matrix} b = 0{,}5 \\ a = -2 \end{matrix}}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $\sin(\underbrace{2\alpha+2\beta}_{x+y}) = -\frac{1}{\sqrt{5}}_{x-y}$ $\quad tg\,\alpha - ?$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$\sin(x+y)+\sin(x-y) = \sin x\cos y + \cancel{\sin y\cos x} + \sin x \cos y - \cancel{\sin y\cos x}$

$= 2\sin x\cos y$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{4\alpha+4\beta}{2}\cos\frac{4\beta}{2} =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$ $\quad \cancel{2}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cos 2\beta = -\frac{\cancel{4}\,2}{5}$.

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} = \frac{2}{\sqrt{5}}$. $\quad$ 1) $\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}} + \frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}$.

$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$ $\quad 4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$\cos\alpha(4\sin\alpha + 2\cos\alpha) = 0$

$\cos\alpha \neq 0$ $\quad 2\sin\alpha = -\cos\alpha$ $\quad \boxed{tg\,\alpha = -\frac{1}{2}}$

и

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \cancel{\sin 2\alpha\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$ $\quad \sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cos 2\alpha =$

$= -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha \cancel{-1} + 2\sin^2\alpha = \cancel{-1}$ $\quad 2\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\sin\alpha = 0$ $\quad \boxed{tg\,\alpha = 0}$ $\quad \boxed{tg\,\alpha = -2}$ $\quad tg\,\alpha = 0$ $\quad \cos =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

2. $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$

(2) $x^2-4x\underline{+4}+9y^2-18y\underline{+9}=12+4+9$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25.$

(1) $x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)}=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$x^2+4y^2-4xy=(x-2)(y-1)$

$x-2-2y+2=\sqrt{(x-2)(y-1)}.$

$a=x-2$ $\quad a-2b=\sqrt{ab}$ $\quad a^2+4b^2-4ab=ab$

$b=y-1$ $\quad a^2+9b^2=25$ $\quad a^2+4b^2-5ab=0$

$a^2-5ab+4b^2=0$

$\left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=b \end{array}\right.$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=4b \\ a=b \end{array}\right. \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

1) $a=b$ $\quad \cancel{10}^{2}b^2=\cancel{25}^{5}$ $\quad b=\pm\frac{\sqrt5}{\sqrt2}.$

$(a;b)=\left(\frac{\sqrt5}{\sqrt2};\frac{\sqrt5}{\sqrt2}\right)=\left(-\frac{\sqrt5}{\sqrt2};-\frac{\sqrt5}{\sqrt2}\right)$

2) $a=4b$ $\quad 16b^2+9b^2=25$ $\quad b=\pm1$

$(a;b)=(1;1)=(-1;-1).$

ОДЗ. $\begin{cases} ab\geq0 \\ a-2b\geq0 \end{cases}$

1) ~~$a=1$, $b=1$, $1\geq0$, $1-2=-1\geq0$ $\varnothing$~~

2) ~~$a=-1$, $b=-$~~

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$S = \frac{1}{2} AF \cdot AE$

$\frac{AF}{AB} = \sin\alpha$

$AF = \frac{17 \cdot 5}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3}}{\sqrt{34}}$

$\frac{AE}{AB} = \cos\alpha$

$AE = \frac{17 \cdot 5}{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}}$

$R_1, R_2 - ?$

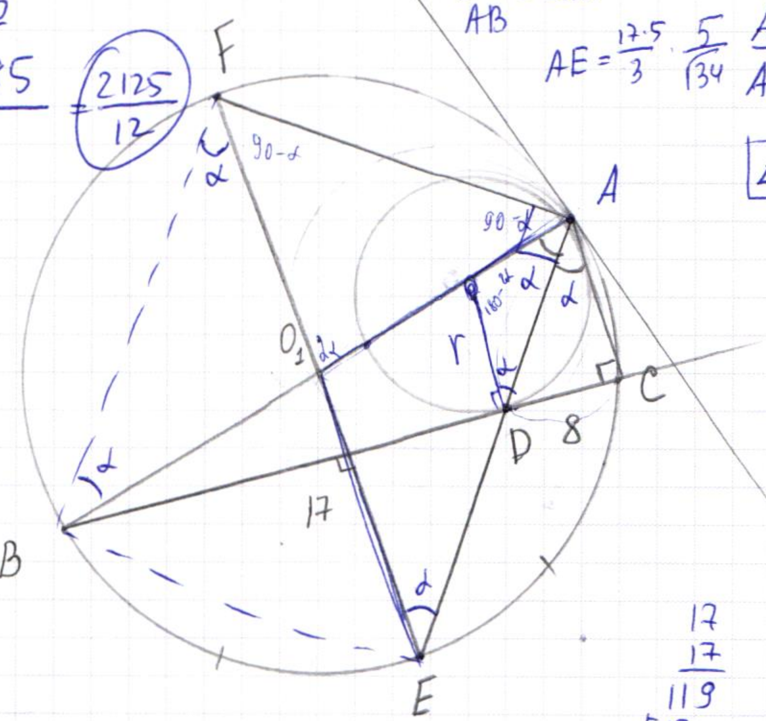
AD - биссектриса

$\frac{1}{2} \cdot \frac{\cancel{17} \cdot 5}{\cancel{\sqrt{34}}} \cdot \frac{17 \cdot 5 \cdot 5}{3 \cdot \cancel{\sqrt{34}}} =$ 2

$= \frac{125 \cdot 85}{12} = \frac{2125}{12}$

$\frac{AB}{AC} = \frac{BD}{CD} = \frac{17}{8}$

$\boxed{\angle AFE = 90^\circ}$



$AB^2 = AC^2 + BC^2$

$AB = 17x$

$AC = 8x$

$(17x)^2 = (8x)^2 + 25^2$

$289x^2$

$(17x - 8x)(17+8)x = 25^2$

$9x^2 \cdot \cancel{25} = 25^{\cancel{2}}$

$x = \frac{5}{3}$

$AB = 17 \cdot \frac{5}{3}$ $\boxed{R_1 = \frac{85}{6}}$

$AB = \frac{85}{3}$

$85 \times 25 = 425 + 170 = 2125$

$17 \times 17 = 119 + 17 = 289$

$FE = \frac{85}{3}$

$25 \times 85 = 125 + 200 = 2125$

$l = \sqrt{\cancel{\frac{85}{3}}} \cdot \sqrt{17 \cdot 8 \cdot x^2 \cancel{\cdot 17 \cdot 8}} =$

$= \sqrt{17 \cdot 8 (x^2 - 1)}$.

$l = \frac{4}{3}\sqrt{17 \cdot 8} = \frac{8}{3}\sqrt{34}$

$\frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9}$

$= \sqrt{\frac{25}{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}}$ $\cos\alpha = \sqrt{1 - \frac{9}{34}}$

$\frac{3\cancel{8}}{\cancel{8}\sqrt{34}} = \frac{3}{\sqrt{34}} = \sin\alpha$

$\alpha = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{34}}\right)$

$\frac{r}{\sin\alpha} = \frac{\frac{8}{3}\sqrt{34}}{\sin 2\alpha}$ $\angle CMA = 2\beta - 2\alpha$

$r = \frac{4}{3}\sqrt{34} \cdot \frac{\sqrt{34}}{5} = \frac{4 \cdot 34}{15} = \frac{136}{15}$

$r = \frac{\frac{8}{3}\sqrt{34}}{2\cos\alpha} = \frac{4}{3}\sqrt{34}\frac{1}{\cos\alpha}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

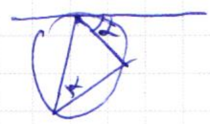
5. $D(f) = \mathbb{Q}_{>0}$ $\qquad \forall a, b \in \mathbb{Q} \mid f(ab) = f(a) + f(b)$

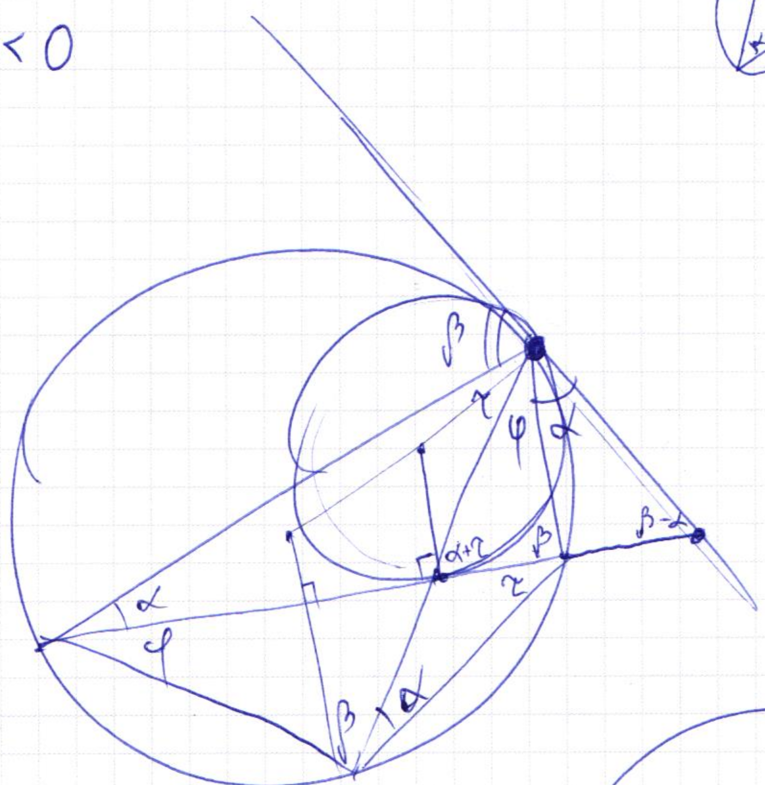
$f(p) = \left[\frac{p}{4} \right]$, p – простое $\qquad (x, y) \in \mathbb{N}^2$.

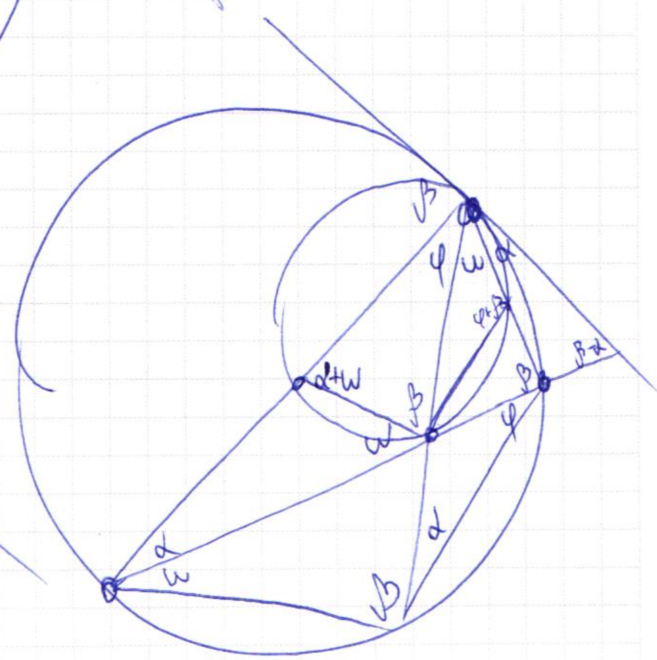
$1 \leq x \leq 24$

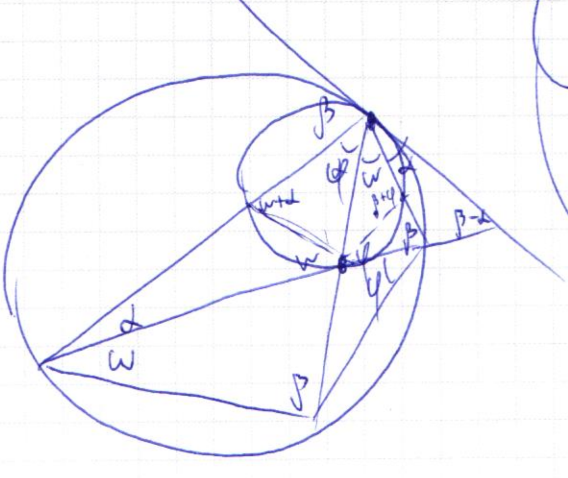
$1 \leq y \leq 24$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$









ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} ab \geq 0 \\ a-2b \geq 0 \end{cases}$

1) $a=4b$ $\quad \begin{cases} a=4 \\ b=1. \end{cases}$ $\quad 4 \geq 0$, $\quad 4-2=2 \geq 0$ ✓

2) $a=4b$ $\quad \begin{cases} a=-4 \\ b=-1 \end{cases}$ $\quad 4 \geq 0$, $\quad -4+2=-2 \geq 0$ $\varnothing$

3) $a=b$ $\quad \begin{cases} a=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \\ b=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \end{cases}$ $\quad \frac{5}{2} \geq 0$, $\quad \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} - 2\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \leq 0$ $\varnothing$

4) $a=b=$ $\quad a=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, $\quad b=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ $\quad \frac{5}{2} \geq 0$, $\quad -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+2\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} \geq 0$

$\begin{cases} x-2=4 \\ y-1=1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$

$\begin{cases} x-2=-\frac{\sqrt{10}}{2}. \\ y-1=-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$ $\quad x=2-\frac{\sqrt{10}}{2}=\frac{4-\sqrt{10}}{2}$

$y=\frac{2-\sqrt{10}}{2}.$

Ответ: $(6;2)$ $\quad \left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}; \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right).$

3. $t \leq 144$ $\quad x^2+18x-144 \leq 0$ $\quad (x+24)(x-6) \leq 0$

12·12
24 6

$+$ -24 -18 0 6 $+$

$(5^2)^9+$

$\frac{1}{25}+\frac{1}{144}$ $x \in [-\cancel{24}; -\cancel{18}] \cup [0;6]$. $\frac{1}{25} \geq \frac{1}{169}.$

$\frac{1}{169}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

3. $5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 + 18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$.

ОДЗ: $x^2+18x > 0 \iff x \in (-\infty; -18) \cup (0; +\infty)$.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$.

$5^2+12^2=13^2$ $\quad 25+144=169=13^2$.

$$\begin{array}{r} 169 \\ \times\ 13 \\ \hline 507 \\ 169 \\ \hline 2197 \end{array}$$

$(x^2+18x)^{\log_{12}5} + (x^2+18x) \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

$t = x^2+18x$. $\quad \boxed{t^{\log_{12^2}5^2} + t \geq t^{\log_{12^2}13^2}}$, $t>0$

$t^{\log_{12^2}5^2} + t^{\log_{12^2}12^2} \geq t^{\log_{12^2}13^2} = t^{\log_{12^2}(12^2+5^2)} =$

$(5^2)^{\log_{12^2}t} + (12^2)^{\log_{12^2}t} \geq (13^2) = 5^2+12^2$.

$t = 12^2$

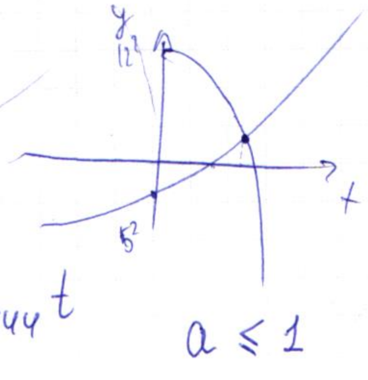
$$\begin{array}{r} 144 \\ \times\ 12 \\ \hline 288 \\ 144 \\ \hline 1728 \end{array}$$

$t>0$ $\quad \cancel{t^{\log_{12}}}$ $\quad t^{\log_{12}5} + t \geq t^{\log_{12}13}$ $\quad 125 + 125$

$x^a + x^b \geq 2\sqrt{x^a x^b} = 2\sqrt{t^{\log_{12}5+\log_{12}12}} \geq t^{\log_{12}13}$.

$4t^{\log_{12}60} \geq t^{2\log_{12}13}$ $\quad 1+1 \geq 1$

$(5^2)^{\log_{12^2}t} - (5^2)^{\cancel{\log_{12^2}t}} \geq 12^2 - (12^2)^{\log_{12^2}t}$ $\quad t \leq 144$



$(5^2)^{\log_{144}t} + (12^2)^{\log_{144}t} \geq (13^2)^{\log_{144}t}$

$(5^2)^a + (12^2)^a \geq (13^2)^a$

$a = \log_{144}t$ $\quad a \leq 1$

$\cancel{(5^2)^2} + \cancel{(12^2)^2} \geq \cancel{(5^2)^2} + \cancel{(12^2)^2} + 2\cdot 5^2\cdot 12^2$ (25, 144, 169 written above)

☑ черновик ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} ax+b \geq \dfrac{12x+11}{4x+3} & (1) \\ ax+b \leq -8x^2-30x-17 & (2) \end{cases}$$

$\forall x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

(1) $y_1 = \dfrac{12x+11}{4x+3} = \dfrac{3(4x+3)+2}{4x+3} = 3 + \dfrac{2}{4x+3}$ $x=-\frac{3}{4}$

$y_2 = -8x^2-30x-17$

$x_B = \dfrac{30}{-16} = -\dfrac{15}{8}$

$y_B = -\cancel{8} \cdot \dfrac{225}{\cancel{64}\,8} + \cancel{23}\,\cancel{9} \cdot \dfrac{15}{8} - 17 = \dfrac{\overset{225}{15 \cdot 15}}{8} - \dfrac{\overset{136}{17 \cdot 8}}{8} = \dfrac{89}{8}$

$11\frac{1}{8}$

$-\dfrac{15}{8} \vee -\dfrac{6}{8}$

$-1\frac{7}{8}$

$-\cancel{8} \cdot \dfrac{121}{\cancel{16}_2} + \overset{15}{\cancel{30}} \cdot \dfrac{11}{\cancel{4}_2} - 17$

$\dfrac{165-121}{2} - 17 =$

$\dfrac{44}{2} - 17$

$22-17=5$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

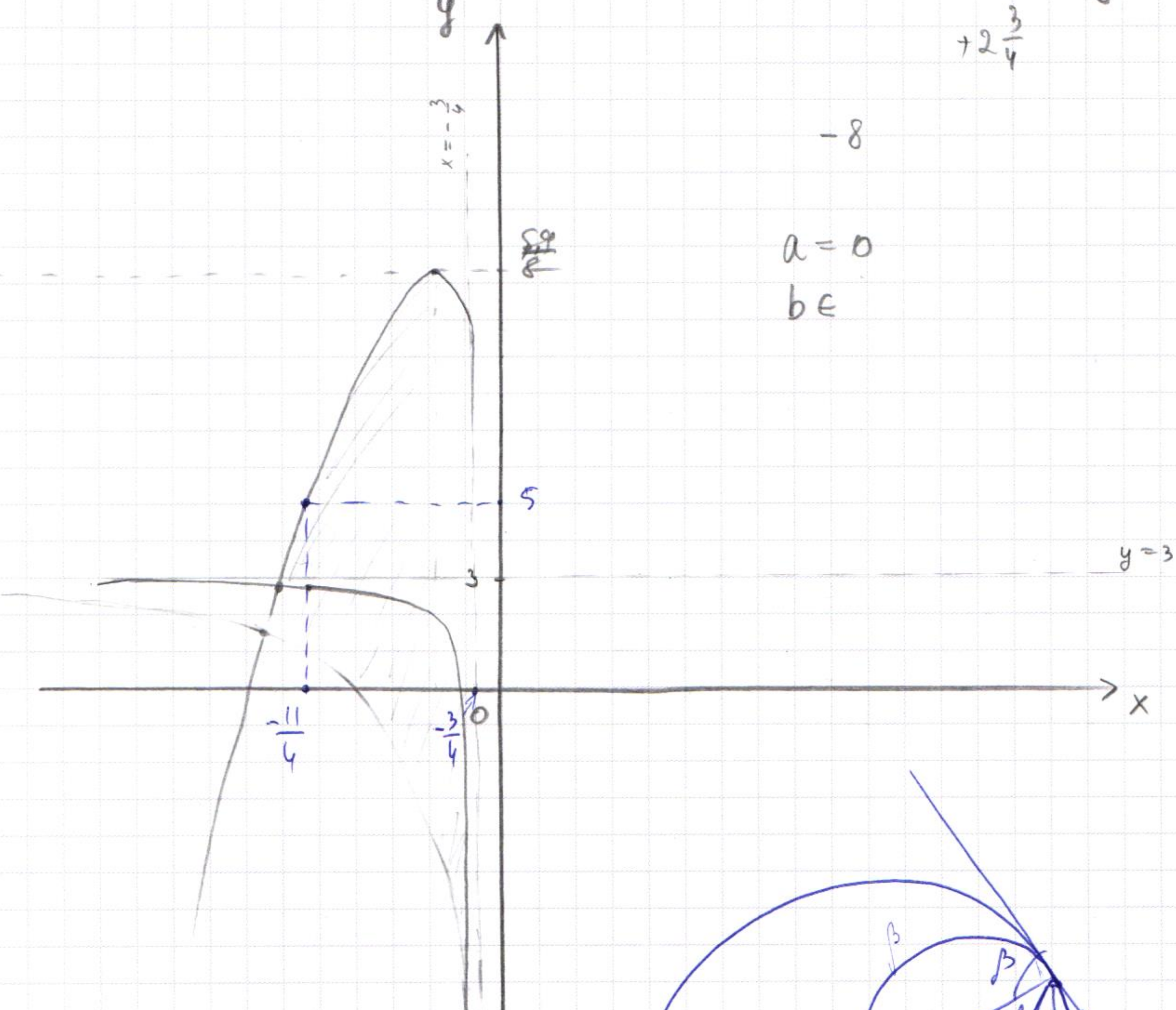
(Нумеровать только чистовики)

$3+\frac{2}{4x+3}$ $\quad 3+\frac{2}{4\left(-\frac{11}{4}+3\right)}=$

$= 3+\frac{2}{-8}=3-\frac{1}{4}$

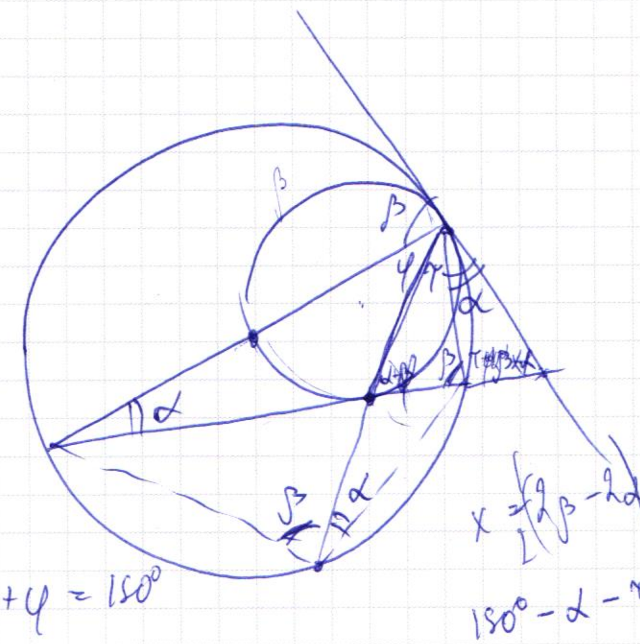
$+2\frac{3}{4}$

-8



$a=0$

$b\in$



$a=0$

$\alpha+\beta+\tau+\varphi=180^\circ$

$x=\frac{1}{2}(2\beta-2\alpha)=\beta-\alpha$

$180^\circ-\alpha-\tau-\alpha-\beta$

$180^\circ=180^\circ-\alpha-\tau-\varphi$

$x=\frac{1}{2}\beta-\alpha$

$\alpha+\varphi+\tau+\cancel{\alpha}+\beta-\cancel{\alpha}=180^\circ$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. $\begin{cases} ax+b \geqslant \frac{12x+11}{4x+3} = \frac{3(4x+3)+2}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3} \\ ax+b \leqslant -8x^2-30x-17 \end{cases}$

$f(x) = ax+b$

$g(x) = 3+\frac{2}{4x+3}$

$h(x) = -8x^2-30x-17$

$g(x) = 3+\frac{4}{\cancel{7}x+3}$ $\quad y_1 = 3$, $x_1 = -\frac{3}{4}$ $\quad 3+\frac{4}{-4+3} = -1$

$3+\frac{4}{-8+3}$ $\quad 3-\frac{4}{5} = 2\frac{1}{5}$ $\quad 3+\frac{4}{-12+3} = 3-\frac{4}{9} = 2\frac{5}{9}$

$3+\frac{4}{4\left(-\frac{11}{4}+3\right)} = 3+\frac{4}{-8} = 3-\frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$

$y_B = -\cancel{8}\cdot\frac{15^2}{\cancel{64}_8}+\cancel{3}\cdot\frac{15^2}{8}-17$

$h(x) = -8x^2-30x-17$

$\frac{15^2}{8}-\frac{17\cdot 8}{8} = \frac{225-136}{8} = \frac{89}{8}$

$x_B = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8} = -\cancel{2}\frac{7}{8}$

$11\frac{1}{8}$

$h\left(-\frac{3}{4}\right) = -\cancel{8}\,\frac{9}{\cancel{16}_2}+\cancel{30}^{15}\,\frac{3}{\cancel{4}_2}-17 = \frac{\overset{36}{45-9}}{2}-17 = 1$

$h\left(-\frac{11}{4}\right) = -\cancel{8}\cdot\frac{121}{\cancel{16}_2}+\cancel{30}^{15}\,\frac{11}{\cancel{4}_2}-17$ $\quad \frac{\overset{44}{165-121}}{2}-17$

$22-17=5$

$y = ax+b$ $\qquad (x_0;y_0) = \left(-\frac{3}{4};1\right)$

$g'(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \ln x = \quad g'(x) = 4\ln(4x+3)$

$y_0 = \quad y = g'(x)(x-x_0)+g(x_0) \qquad y = 4\ln(4x+3)(x-x_0)+3+\frac{4}{4x_0+3}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$a\left|-\frac{3}{4}\right|+b=1$

$+\frac{3}{2}+b=1$

$b=-0,5$

$a\left|-\frac{11}{4}\right|+b=5$

$\frac{8}{4}a=-4 \quad a=-2$

$a\in(-2;$

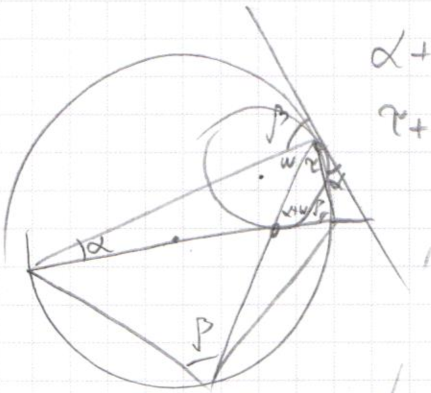
$-\frac{3}{4}a+b=1$

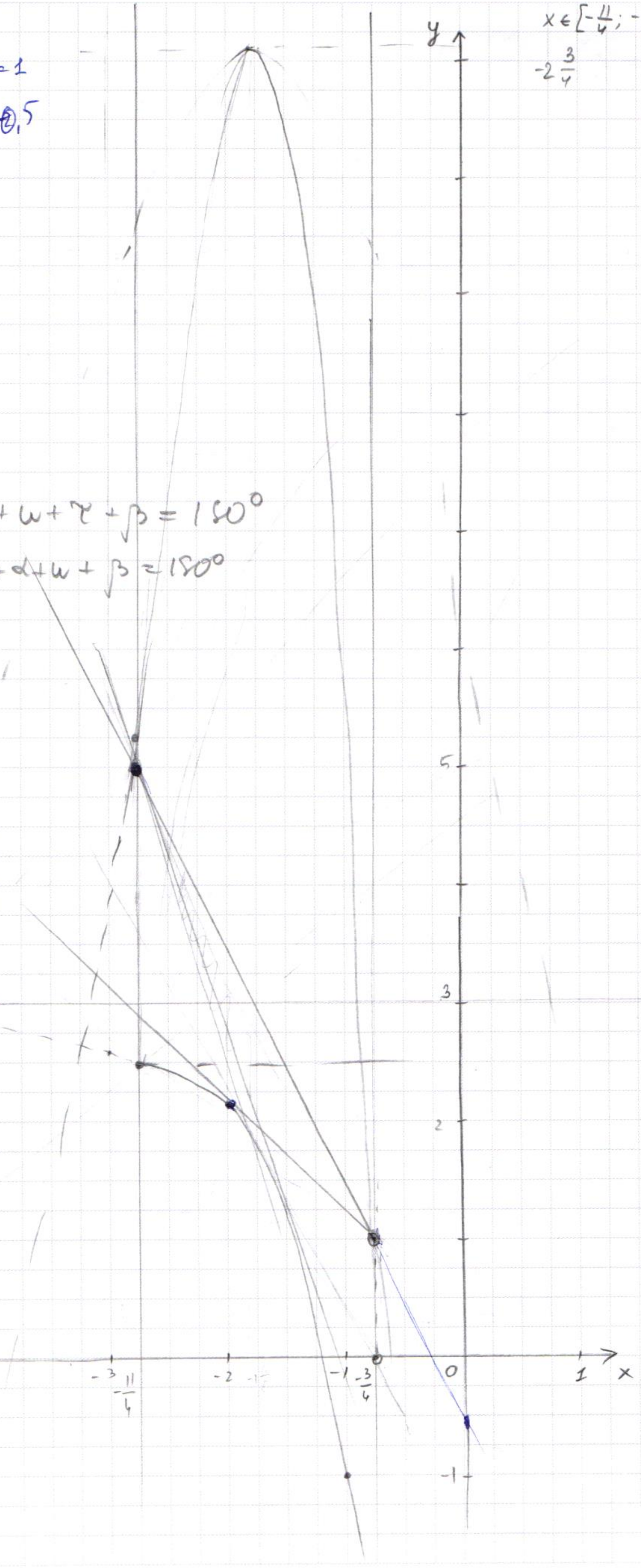
$x\in[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4})$

$-2\frac{3}{4}$

$\alpha+\omega+\tau+\beta=180^\circ$

$\tau+\alpha+\omega+\beta=180^\circ$





$b\in[2,5 \cup 5]$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

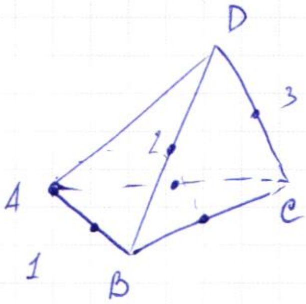
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$f: \mathbb{Q}_{>0} \to \mathbb{Q} \mid f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right] \quad \forall p$ - простое

$x, y \in \mathbb{N}$ $\quad x \in [1; 24]$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$x \in [1; 24]$

1) $x = 1$ $\quad f(xy) = f(x) + f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0.$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(11) = 2$

$f(13) = 3$

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$

$f(23) = 5$

$\frac{x}{y} \in \left\{ \frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \ldots \frac{1}{24}, \ldots \frac{2}{1}; \frac{2}{2}, \frac{2}{3} \ldots \frac{2}{24}, \ldots \frac{24}{1}, \frac{24}{2}, \ldots \frac{24}{24} \right\}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)