МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

√ 2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

√ 3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} x-2y\geq 0 \qquad x\geq 2y \\ x^2-4yx+4y^2=xy-x-2y+2 \end{cases}$$

$x^2+\underbrace{x-5xy}_{x(1-5y)}+4y^2+2y-2=0$

$D=1-10y+25y^2-16y^2-8y+8=9(y^2-2y+1)$

$x_{12}=\dfrac{5y-1\pm(3y-3)}{2}=4y-2;\ y+1$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &x=4y-2 \quad ① \ y=\frac{x+2}{4} \\ &x=y+1 \quad ② \ y=x-1 \end{aligned}\right. \\ x-2y\geq 0 \end{cases}$$

$(x^2-4x+4)-4+9(y^2-2y+1-1)=12$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

①
$(x-2)^2+9\left(\frac{x+2}{4}-1\right)^2=25$

$(x-2)^2+9\left(\frac{x-2}{4}\right)^2=25$

$\frac{25}{16}(x-2)^2=25$

$(x-2)^2=16$

$(x-2)=\pm 4$

$x=6;-2$

$x_1=6\to y_1=2$

$x_2=-2\to y_2=0$

②
$(x-2)^2+9(x-1-1)^2=25$

$10(x-2)^2=25$

$(x-2)^2=\frac{5}{2}$

$(x-2)=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$

$x=2\pm\sqrt{10}$

$x_3=2+\frac{\sqrt{10}}{2}\to y_3=1+\frac{\sqrt{10}}{2}$

$x_4=2-\frac{\sqrt{10}}{2}\to y_3=1-\frac{\sqrt{10}}{2}$

Проверка $(x;y)$ $x\geq 2y$

1) $6\geq 4$ верно $(x_1;y_1)+$

2) $-2\geq 0$ неверно $(x_2;y_2)-$

3) $2+\frac{\sqrt{10}}{2}\geq 2+\sqrt{10}$ неверно $(x_3;y_3)-$

4) $2+\frac{\sqrt{10}}{2}\geq 2-\sqrt{10}$ верно $(x_4;y_4)+$

Ответ: $\left\{(\overset{x}{6};\overset{y}{2});\ \left(2-\frac{\sqrt{10}}{2};1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\right\}$

3

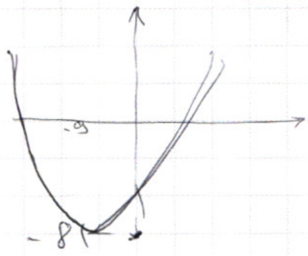
$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

$x^2+18x = d$

$x_0 = -\frac{18}{2} = -9$

$y_B = 81 - 81\cdot 2$

$(x+9)^2 - 81$



$x^2+18x = d \in [-81; +\infty)$

$$5^{\log_{12} d} + d \geq |d|^{\log_{12}13}$$

$d > 0$ тк $\log_{12} d$ $\Rightarrow |d| = d$

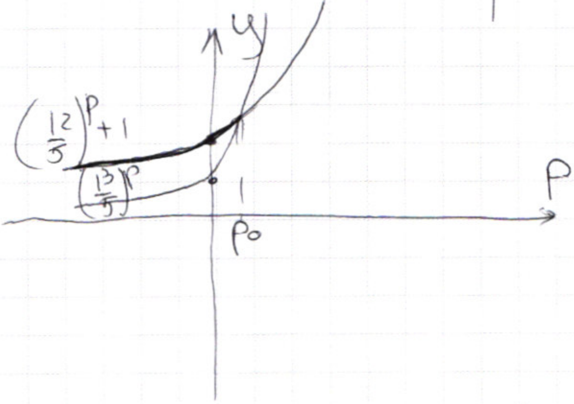
$$\Rightarrow 5^{\log_{12} d} + d \geq d^{\log_{12}13}$$

$\underline{12^p = d}$ тогда $p = \log_{12} d$

$$5^p + 12^p \geq 12^{p\cdot\log_{12}13}$$

тк $5^p \neq 0$

$$5^p + 12^p \geq 13^p \quad \Big|:5^p \Rightarrow \left(\frac{13}{5}\right)^p \leq \left(\frac{12}{5}\right)^p + 1 = y$$



Отсюда p_0 точка пересечения двух степенных функций

$p \leq p_0$

$p_0 = 2$ методом подбора легко убедиться что это истина

$$\frac{169}{25} \leq \frac{144}{25} + \frac{25}{25}$$

$p \leq 2$

$\log_{12} d \leq 2 = \log_{12} 144$

$d \leq 144$ не забываем, что $d > 0$

$x^2+18x > 0$ и $x^2+18x \leq 144$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2+18x>0$

$x(x+18)>0$

$-18 \quad 0$

$x^2+18x-144\le 0$

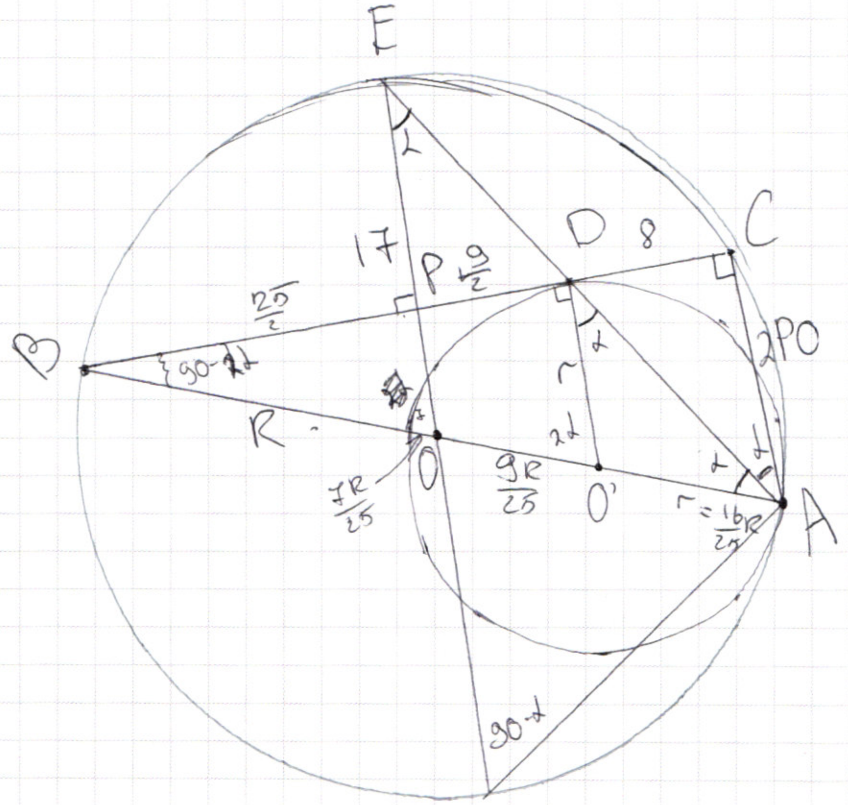
$D=900$

$x_{1,2}=\frac{-18\pm 30}{2}=-\frac{48}{2};\ \frac{12}{2}=-24;\ 6$

$-24 \quad 6$

$x\in[-24;-18)\cup(0;6]$ – ответ

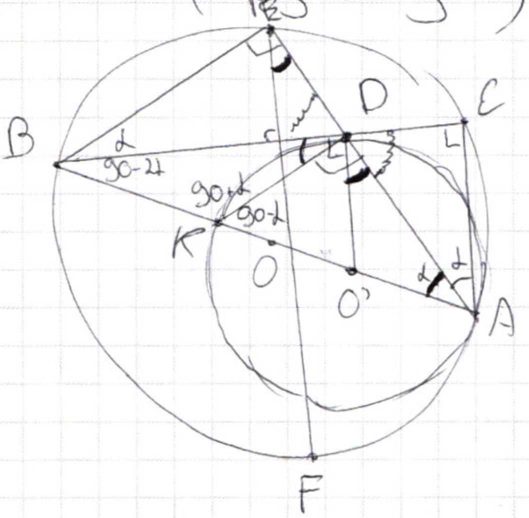
4.



ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. продолжение

Докажем, что EF проходит через центр большей окружности (через точку O)



~~Пусть это не проходит~~

$\angle BCA = \angle BEA = 90°$, тк вписанные углы опираются на диаметр AB

$\angle BDO' = 90$ (тк касат)

Пусть K пересечение AB с меньшей окр.

$\angle KDA = 90$ опирается на диаметр AK

$\angle EAB = \alpha \Rightarrow$ ~~$\angle BDK = \alpha$~~ $\angle O'DA = \alpha$ тк $\triangle O'DA$ р/б ($O'D = O'A$) медиана в прямоугольном треугольнике

$EF \parallel O'D$ тк оба отрезка $\perp BC \Rightarrow$ соответствующие углы $\angle ADO' = \angle AEF = \alpha$

Отсюда EF проходит через O, тк $\triangle OAE$ – р/б ($OE = OA = R$) $\Rightarrow \angle AEO = \alpha$ и $\angle AEF = \alpha$

$\Downarrow$

$O \in EF$

$BD = 17$
$CD = 8$

P – точка пересечения EF с BC

Из подобия $\triangle BOP \sim \triangle BCA$ (тк $PO \parallel AC$ и $\angle B$ общ)

$\frac{BP}{R} =$ Пусть R – радиус большей окр
r – радиус меньшей окр

4. продолжение

$BC = BD + DC = 25$

$$\frac{R}{2R} = \frac{BP}{BC} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{BP}{BC}$$

$$BP = \frac{25}{2}$$

$$PD = 17 - \frac{25}{2} = 4,5$$

$$PO = \sqrt{R^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2}$$

17

$$\frac{PO}{r} = \frac{25}{2} : \left(\frac{9}{2} + \frac{25}{2}\right)$$ из подобия $\triangle BPO$ и $\triangle BDO'$

$$\sqrt{R^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2} = r \cdot \frac{25}{34} \longrightarrow R^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2 = r^2 \frac{25^2}{34^2}$$

$$\frac{34^2 R^2}{25^2} - \frac{\cancel{25^2} \cdot 34^2}{2^2 \cdot \cancel{25^2}} = r^2$$

$$\left(\frac{34R}{25}\right)^2 - 17^2 = r^2$$

$\triangle BDO'$:

Теорема Пифагора

$$17^2 + r^2 = \left(\frac{34R}{25}\right)^2$$

$$r^2 + 17^2 = BO'^2 \Rightarrow BO' = \frac{34R}{25}$$

из подобия треугольников $\triangle BPO$ и $\triangle BDO'$

$$\frac{BP}{BD} = \frac{R}{BO'} \Rightarrow \frac{25}{34} = \frac{R}{BO'}$$

$$BO' = \frac{34}{25}R \Rightarrow OO' = \frac{9R}{25}$$

$$AO = R = \frac{9R}{25} + r$$

$$r = \frac{16}{25}R$$

из этого же подобия $\frac{PO}{r} = \frac{25}{34}$

$$PO = \sqrt{R^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2}$$

$$R^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2 = r^2\left(\frac{25}{34}\right)^2$$

$$r = \frac{16}{25}R \rightarrow R^2 - \left(\frac{25}{2}\right)^2 = \frac{16^2}{34^2}R^2$$

✓ $R = \frac{17 \cdot 5}{6} = \frac{85}{6}$, $r = \frac{136}{15}$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №5

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. продолжение

$R = \frac{85}{6}$; $r = \frac{136}{15}$

$\angle AFR = 90 - \alpha$ - где $\alpha = \angle KAB$

$\cos 2\alpha$ из $\triangle BRO'$

$\cancel{\cos 2\alpha = \frac{BO'}{2R} = \frac{DO'}{2R} = \frac{\sqrt{R^2 - \frac{25^2}{2^2}}}{R}} = \frac{r}{2R} = \frac{136}{15} : \left(2 \cdot \frac{85}{6}\right) = \frac{136 \cdot 3}{15 \cdot 85} = \frac{136}{85 \cdot 5}$

$\cancel{\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - 1}$

$\cancel{\cos^2\alpha = \cos 2\alpha + 1}$

$\cancel{\cos\alpha = \sqrt{\cos 2\alpha + 1} = \sqrt{\frac{136 + 85 \cdot 5}{85 \cdot 5}}}$

$\cos^2\alpha \frac{r}{\frac{34R}{25}} = \frac{r \cdot 25}{34R} = \frac{\frac{136}{15} \cdot 25}{\frac{34 \cdot 85}{6}} = \frac{136 \cdot 25 \cdot 3}{15 \cdot 1785} = \frac{136}{17^2}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{1}{-\sqrt{5}}$

$\sin(2(\alpha+\beta)) = \frac{1}{-\sqrt{5}}$

$\boxed{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$

$\operatorname{tg}\alpha \Rightarrow \cos x \neq 0$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2(\alpha+2\beta))+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin(\alpha+\beta+\beta)\cos(\alpha+\beta+\beta)+2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$2(\sin(\alpha+\beta)\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)\sin\beta)\cdot(\cos(\alpha+\beta)\cos\beta-\sin(\alpha+\beta)\sin\beta)$

$+2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$(2\sin(\alpha+\beta)\cos\beta+2\cos(\alpha+\beta)\sin\beta)(\cos(\alpha+\beta)\cos\beta-\sin(\alpha+\beta)\sin\beta)$

$+2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin(\alpha+\beta)(\cos(\alpha+\beta))\cos^2\beta - 2\sin^2(\alpha+\beta)\cos\beta\sin\beta + 2\cos^2(\alpha+\beta)\sin\beta\cos\beta$

$-2\cos(\alpha+\beta)\sin(\alpha+\beta)\sin^2\beta + 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

~~$\sin(2\alpha+2\beta)$~~ $\qquad \cos 2\beta$

$2\sin(\alpha+\beta)(\cos(\alpha+\beta))(\cos^2\beta-\sin^2\beta) - \sin^2(\alpha+\beta)\sin 2\beta +$

$+\cos^2(\alpha+\beta)\sin 2\beta$

$+2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)(\cos 2\beta + \sin 2\beta(\cos^2(\alpha+\beta)-\sin^2(\alpha+\beta))$

$+2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta(\cos(2\alpha+2\beta)) + \ldots = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

☑ черновик ☐ чистовик $\qquad$ Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) $\qquad$ (Нумеровать только чистовики)

$$1)\ -\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta+\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$$

$$2)\ -\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta-\frac{2}{\sqrt5}\sin 2\beta+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$$

$$-\frac{1}{\sqrt5}(\cos^2\beta-\sin^2\beta)+\frac{2}{\sqrt5}(2\sin\beta\cos\beta$$

$$-\frac{1}{\sqrt5}(\underbrace{\cos^2\beta-\sin^2\beta}_{2\cos^2\beta-1}-4\sin\beta\cos\beta)$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta+\cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\qquad \cos(2\alpha+2\beta)=\pm\frac{2}{\sqrt5}$$

$$2\sin 2\alpha\cos 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}\qquad \cancel{\cos^2 2\alpha-\sin^2 2\beta}$$

$$\cancel{\cos\beta=-\frac{1}{2\sin\alpha\sqrt5}}$$

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}\quad\Big|\ \frac{1}{\cos 2\alpha\cos 2\beta}$$

$$\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}2\beta=-\frac{1}{\sqrt5\cos 2\alpha\cos 2\beta}$$

$$6-4=\sqrt{12_6-6_2-4+2}\qquad 36+36-24-36-12=0$$

$$2=2$$

$$2-\frac{\sqrt{10}}{2}-2+\sqrt{10}=\sqrt{\cancel{2}-\cancel{\sqrt{10}}-\frac{\sqrt{10}}{2}+\frac{10}{4}\cancel{-2}+\cancel{\sqrt{10}}\cancel{+2}\cancel{-2}+\frac{\sqrt{10}}{2}}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{2}=$$

☑ черновик ☒ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(a;b)$

$x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$3 > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{3}}$

$6 > \frac{\sqrt{13}}{3}$

$36 > \frac{169}{9}$

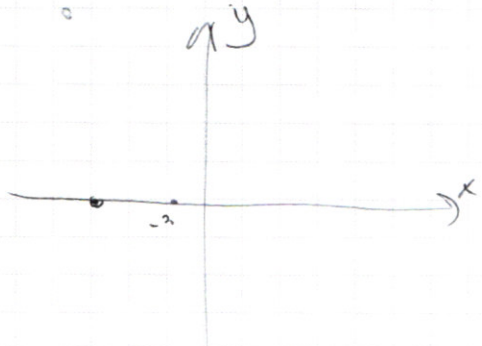
$\frac{12x+11}{4x+3} \le -8x^2-30x-17$

$\frac{12x+11}{4x+3} + 8x^2+30x+17 \le 0$

$\frac{12x+11+32x^3+24x^2+120x^2+90x+68x+51}{4x+3} \le 0$

$y = \frac{32x^3+144x^2+170x+62}{4x+3} \le 0$

$\cancel{8x^2(4x+24x^2)}$



$y' = 96x^2+288x+170 = 0$

$x^2+3x+\frac{\cancel{170}\,85}{\cancel{96}\,48} = \frac{17\cdot5}{2^4\cdot3} = 0$

$D = 9-\frac{4\cdot85}{48} = \frac{98-85}{12} = \frac{13}{12}$

$x_{1,2} = \frac{-3\pm\sqrt{\frac{13}{12}}}{2} = \frac{-3\pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{3}}}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$3(4x+3)^{-2} = 3 + \frac{2}{4x-3}$

$x = -\frac{3}{4}$ $900 - 544 = 356$

$\frac{12x+11}{4x+3} \le -8x^2 - 30x - 17$

$x_B = \frac{-(-30)}{2(-8)} = \frac{30}{-16} = \frac{15}{-8}$

$y_B = -8\frac{125}{64} + \frac{30 \cdot 15}{8} - 17$

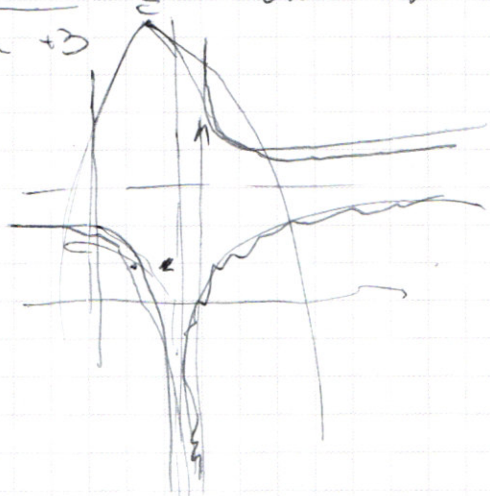
$\frac{250}{8} - \frac{125}{8}$

$\frac{125}{8} - 17$

$\frac{125}{8} - 17$

$17000 - 15625 = 1{,}375$

$125 : 8 = 15{,}625$



$ax + b$

$x^2 - 4x + 4$

$(x-2)^2$

$\frac{x_0 + 4}{2} = 2$

$-8x^2 - 30x - 17 = y\left(-\frac{11}{4}\right) =$

$= -8\frac{121}{16} + \frac{330}{4} - 17$

$= -\frac{121}{2} + \frac{330}{4} - 17$

$\frac{88}{4} = -17$

$22 - 17 = 5$

$-8\frac{9}{16} + \frac{90}{4} - 17$

$-4{,}5 + 22{,}5$

$18 - 17$

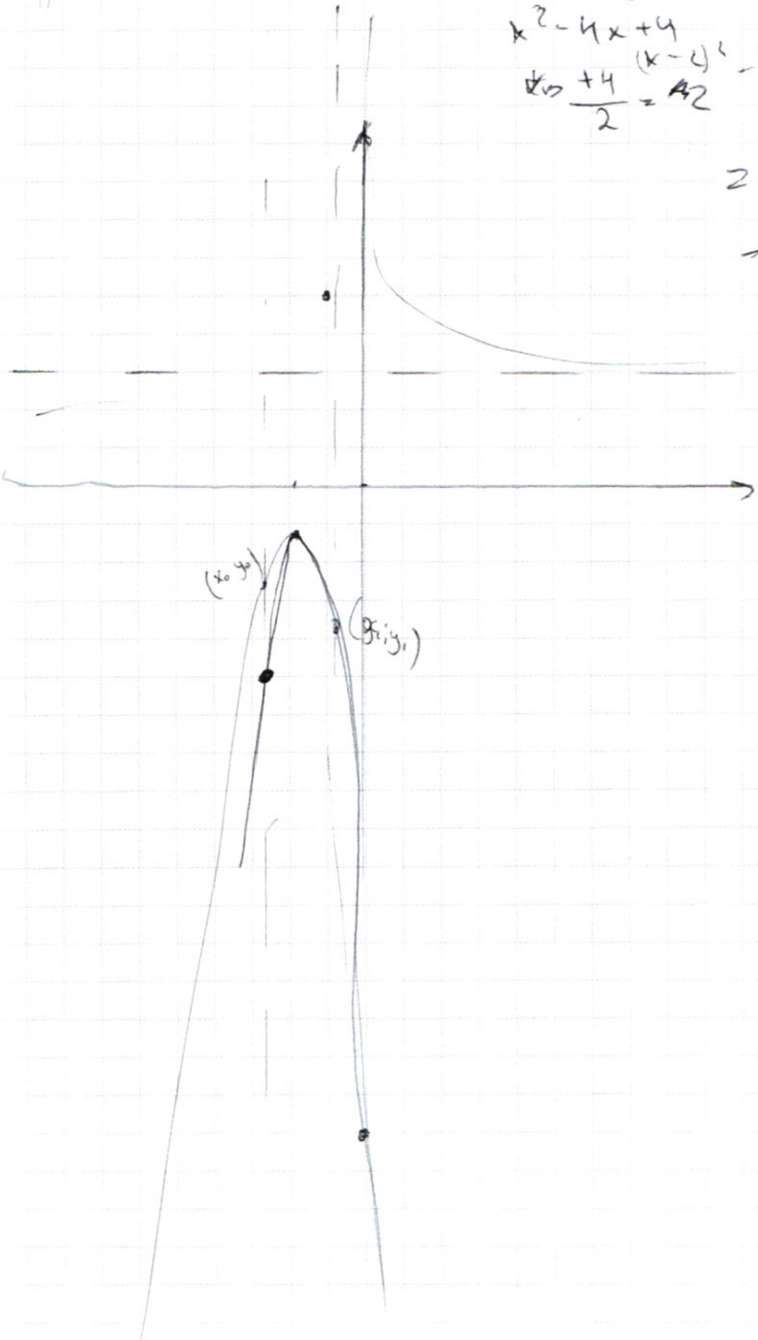
$-\frac{15}{8} \vee -\frac{3}{4}$

$-\frac{15}{8} < -\frac{6}{8}$

$-15 < -6$

$15 > 6$

$-1 \Rightarrow -8 + 30 - 17$



$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x = d$

$5^{\log_{12} d} + d \geq |d|^{\log_{12}13}$

$5 \quad 5^{\log_{5} d}$

$\log_{12} d = \log_d 12$

$\boxed{d \geq 0}$

$12^p = d$

$5^p + 12^p \geq 12^{p \log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} d} + d \geq d^{\log_{12} 13}$

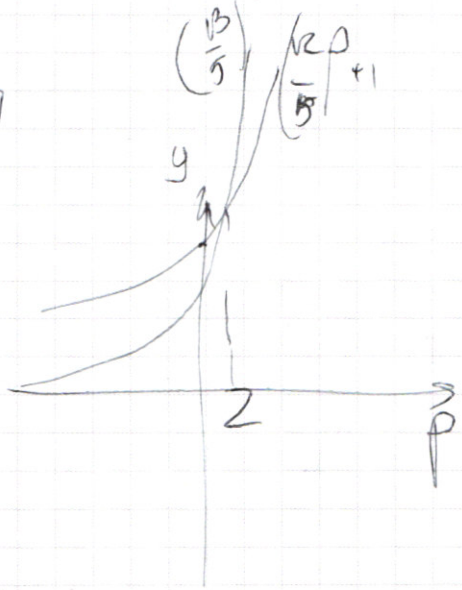
$5^p + 12^p \geq 13^p \quad | : 5^p$

$\log_{12} d = p$

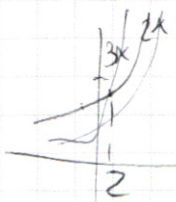
$\cancel{5^{\log_{12} d} + d \geq 13^{\log_{12} d}}$

$1 + \left(\frac{12}{5}\right)^p \geq \left(\frac{13}{5}\right)^p$

$\frac{5^p + 12^p}{5^p} \geq \left(\frac{13}{5}\right)^p$



x^2



$\left(\frac{12}{5}\right)^p + 1 = \left(\frac{13}{5}\right)^p$

$2^x + 1 = 3^x$

$1 = \left(\frac{13}{5}\right)^p - \left(\frac{12}{5}\right)^p$

$13^p - 12^p - 5^p \leq 0$

$y' = p\,13^{p-1} - p\,12^{p-1} - 5^{p-1} = 0$

$p\left(13^{p-1} - 12^{p-1} - 5^{p-1}\right)$

$169 + 144 + 25$

6 18 18 144 ; 11 144 4 576 ; 18 18 324 ; 5+6 ; 900 ; 30

$\log_{12} d \leq 2 = \log_{12} 144 \quad \boxed{p \leq 2}$

$d \leq 144 \quad d > 0$

$x^2 + 18x > 0$

$x(x+18) > 0$

$+ \quad -18 \quad - \quad 0 \quad +$

$x^2 + 18x - 144 \leq 0$

$D = 324$

$x_{1,2} = \frac{\pm 30 - 18}{2}$

☐ черновик ☒ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b$

$\frac{12x+11-4x^2a-3ax-4bx-3b}{4x+3} \le 0$

$\frac{-4ax^2+x(12-3a-4b)+11-3b}{4x+3} \le 0$ $=P$

либо $P(x_1)=0$ $x_1 \le -\frac{11}{4}$

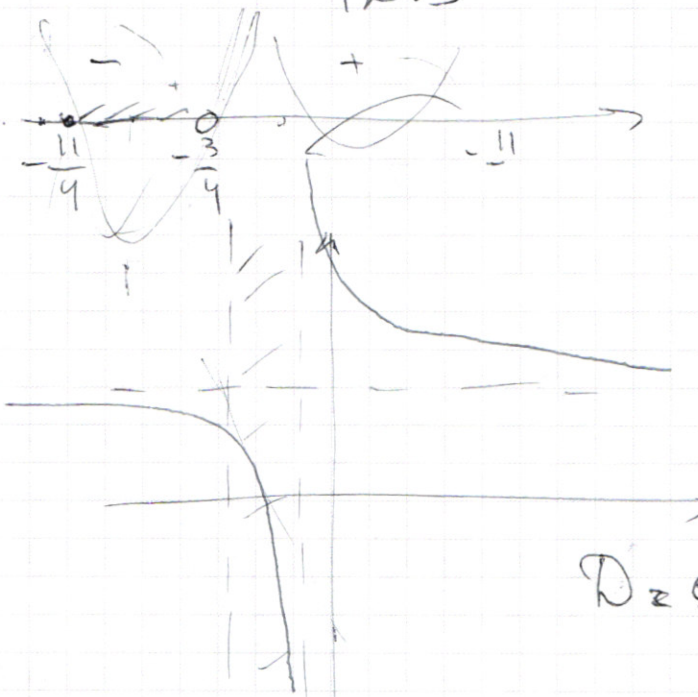
$P(x_2)=0$ $x_2 \ge -\frac{3}{4}$

$y_0 \le 0$

либо $P(x_2)=0$ $x_2 \le -\frac{11}{4}$

либо $P(x_1)=0$ $x_1 \ge -\frac{3}{4}$

$4y_0>0$



$\frac{12x+11}{4x+3} - ax - b \le 0$

$\frac{12x+11-4ax^2-3ax-4bx-3b}{4x+3} \le 0$

$\frac{4ax^2-12x-11+3ax+4bx+3b \ge}{4x+3}$

$\frac{4ax^2+x(3a+4b-12)+3b-11}{4x+3}$

$D = 9a^2+12ab - 36a + 12ba + 16b^2 - 48b$
$- 36a - 48b - 144$
$9a^2+24ab-72a-96b+16b^2+144$

$\cancel{16b^2-96b+}$

$-16a(3b-11) =$

$= 9a^2+24ab-72a-96b+16b^2+144-48ab+176a$

$= 9a^2-24ab+104a-96b+16b^2+144$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$(x^2-4x+4)-4+9(y^2-2y+1-1)=12$

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$x-2y\geq 0$

$x^2+x-5xy+4y^2+2y-2=0$ $\quad x(1-5y)$

x^2

$(x-7)(x+3)=-(3y-3)^2$

$(7-x)(x+3)=(3y-3)^2$

$x^2-4x+9y^2-18y=12$

$R^2=\frac{16^2}{34^2}$ $R^2=\frac{25^2}{2^2}$

$\frac{34^2-16^2}{34^2}$ $R^2=\frac{25^2}{2^2}$

$\frac{50\cdot 18}{34^2}$ $R^2=\left(\frac{25}{2}\right)^2$

$R^2=\frac{25^2\cdot 34^2}{50\cdot 18\cdot 2}=$

$=\frac{25\cdot 25\cdot 17^2}{50\cdot 18\cdot 2}$

$D=1-10y+25y^2-16y^2-8y+8=$

$=9y^2-18y+9=$

$=9(y^2-2y+1)$

$9(y-1)^2$

$x_{1,2}=\frac{5y-1\pm(3y-3)}{2}=$

$=4y-2;\ y+1$

$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}1)\ x=4y-2\\ 2)\ x=y+1\end{array}\right.\\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25\end{array}\right.$

$4y-2=x$

1) $y=\frac{x+2}{4}$

$(x-2)^2+9\left(\frac{x+2-4}{4}\right)^2=25$

$(x-2)^2+\frac{9}{16}(x-2)^2=25$ $\quad (x-2)^2+9\left(\frac{x-2}{4}\right)^2=25$

$(x-2)^2=\frac{25}{10}=25$ $\quad (x-2)^2=16$ $\quad (x-2)=\pm 4$ $\quad x=$

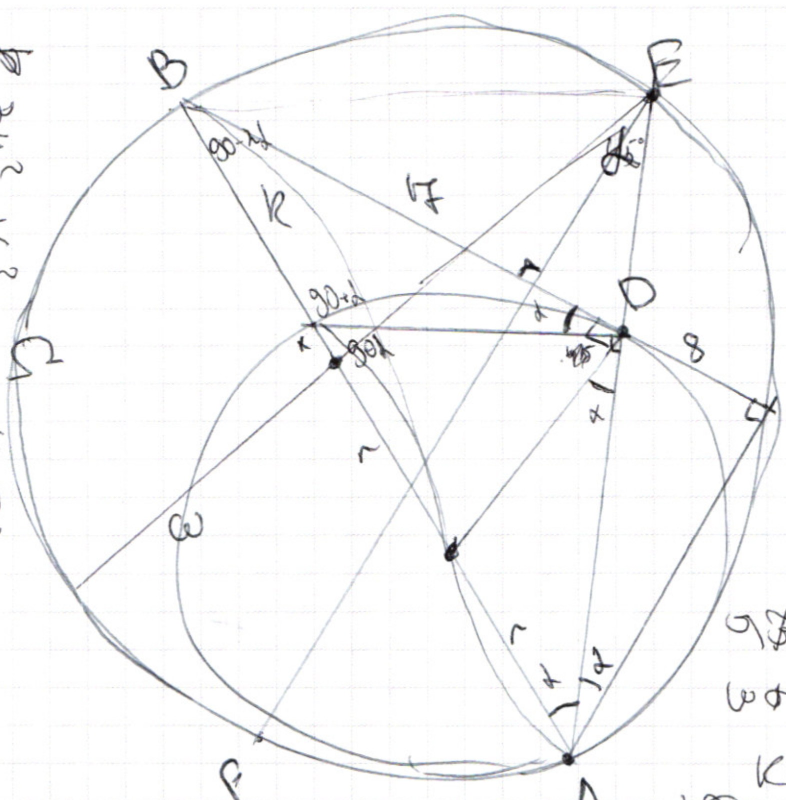
☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\left(\frac{16}{25}R\right)^2 + 17^2 = \left(\frac{34}{25}R\right)^2$$

$$\frac{34^2-16^2}{25^2}R^2 = 17^2$$

$$\frac{(34-16)(34+16)}{25^2}R^2 = 17^2$$



$$\frac{KO}{r} = \frac{12{,}5}{17}$$

$$\frac{50\cdot 18}{25^2}R^2 = 17^2$$

$$KO = \sqrt{R^2-(12{,}5)^2}$$

$$\frac{36}{25}R^2 = 17^2$$

$$R = \sqrt{\frac{25}{36}(17)^2}$$

$R\ \ r\ \ \angle AFE - ?\ \ S_{AEF}$

$$\sin 2\alpha = \frac{25}{2R}$$

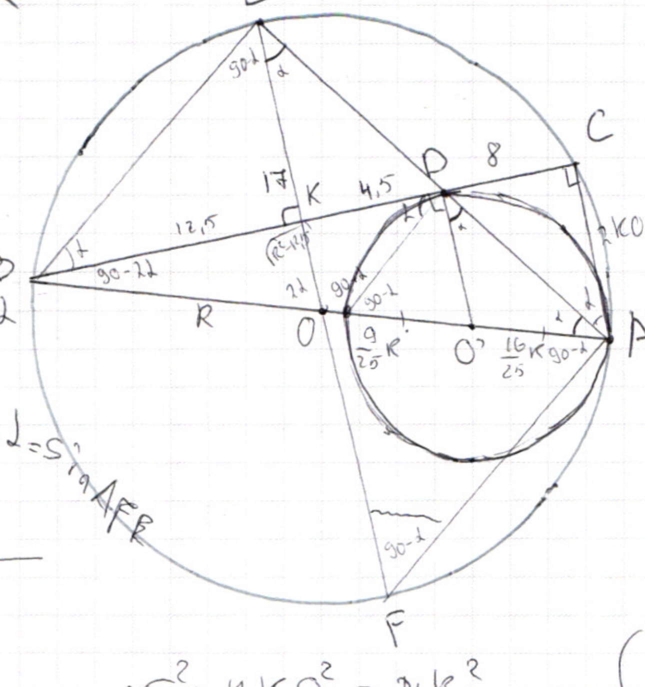
$$R = \frac{5}{6}17$$

$$\frac{BK}{BC} = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{R = \frac{25\cdot 17}{36} \quad r = \frac{16\cdot 17}{36}}$$

$$R = \frac{16}{25}\cdot\frac{5\cdot 17}{6}$$

$$\frac{17}{25} = \frac{R+R-x}{2R}$$



$$\sqrt{R^2-(12{,}5)^2} = r\cdot\frac{25}{34}$$

$$\frac{25}{2R} = \cos 2\alpha$$

$$R^2-\left(\frac{25}{2}\right)^2 = r^2\frac{25^2}{34^2}$$

$$\frac{25}{2R} = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\frac{34^2\left(R-\frac{25}{2}\right)\left(R+\frac{25}{2}\right)}{25^2} = r^2$$

$$\frac{25+2R}{2R} = 2\cos\alpha$$

$$\frac{25+2R}{4R} = \cos\alpha = \sin\angle AFE$$

$$\frac{34^2}{25^2}R^2 - \frac{25^2}{4}\cdot\frac{34^2}{25^2} = r^2$$

$$\frac{17}{25} = \sqrt{\left(\frac{34}{25}R\right)^2}$$

$$\left(\frac{34}{25}\right)^2 R^2 - 17^2 = r^2$$

$$17^2 + r^2 = \left(\frac{34}{25}R\right)^2$$

$$r = \frac{16}{25}R$$

$$25^2 + 4KO^2 = 4R^2$$

$$25^2 + 4\left(R^2-\left(\frac{25}{2}\right)^2\right) = 4R^2$$

$$= BO'^2$$

$$\frac{34}{25}R = BO'$$

$$R^2 = \frac{50\cdot 18}{34^2} \quad r^2 = \left(\frac{25}{2}\right)^2\frac{34^2}{34^2-16^2}$$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)